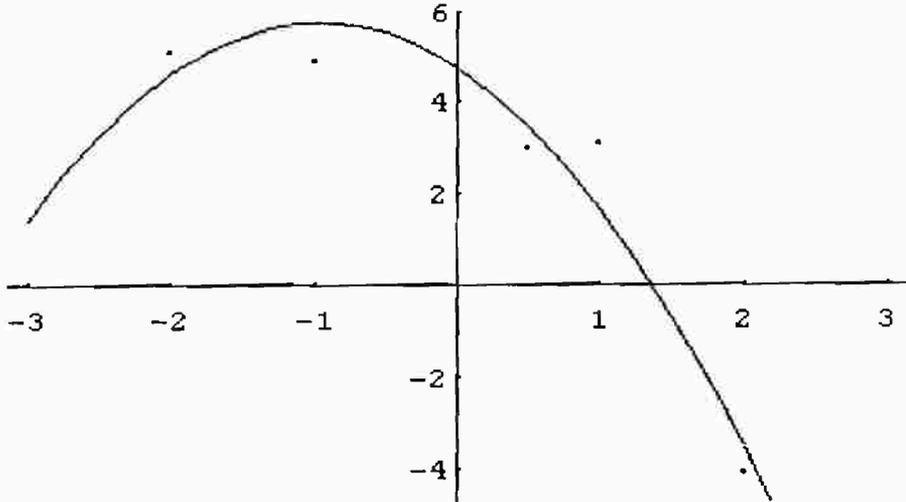


الباب السادس ماتيماتيكما والتحليل العددي



في هذا الباب سوف نتعرف على أوامر برنامج ماتيماتيكما
والخاصة بالموضوعات الآتية :

١. الحل العددي لمعادلات كثيرات الحدود

Numerical Solution of Polynomial Equations

Numerical Root Finding

٢. إيجاد جذر تقريبي

Numerical Minimization

٣. إيجاد القيم الصغرى

٤. الحساب العددي للمجموع وحواصل الضرب

Numerical Sum and Product

Numerical Integration

٥. التكامل العددي

Least - squares

٦. التقريب بالمربعات الصغرى

الباب السادس

ماتيماتكا والتحليل العددي

التحليل العددي Numerical Analysis هو أحد فروع الرياضيات التي تعتمد بقوة على التطورات الحديثة في علم الكمبيوتر وعلى التطبيقات في استخدام الطرق العددية لحل المسائل الرياضية المختلفة . ومن أكثر مميزات ماتيماتكا هو المقدرة على الحصول على نتائج مضبوطة وفي صورة رمزية Exact Symbolic Results للحسابات الرياضية المختلفة وفي بعض الحسابات يكون من غير الممكن الحصول على النتائج المضبوطة ومثل هذه الحسابات فإن ماتيماتكا يقدم العديد من الدوال والأوامر للحصول على قيم عددية تقريبية للنتائج وكما علمنا من قبل فإن الدالة N والتي تستخدم بالصورة

$expr//N$ أو $N[expr]$

تقوم بحساب قيمة عددية تقريبية للعملية الحسابية $expr$ والدالة

$N[expr,n]$

تقوم بحساب قيمة عددية تقريبية للعملية الحسابية $expr$ مقربة الى n من الأرقام العشرية وفي هذا الباب سوف نتعرف على بعض أوامر ماتيماتكا الخاصة بالحصول على قيم تقريبية لنتائج العمليات الرياضية في مجالات مختلفة من التحليل العددي .

١. الحل العددي لمعادلات كثيرات الحدود Numerical Solution of Polynomial Equations

Solve في برنامج ماتيماتكا يمكن حل معادلات كثيرات الحدود باستخدام الأمر
كما عرفنا في الباب الثالث وفي حالة عدم الحصول على حل صريح للمعادلة أو مجموعة
المعادلات يمكن استخدام الدالة N للحصول على حلول عددية تقريبية

In[1]:= Solve[x^2-3x+2==0,x] باستخدام الأمر Solve يمكن حل معادلة
Out[1]={{x -> 1}, {x -> 2}} كثيرة الحدود $x^2 - 3x + 2 = 0$ والحصول
على الجذور

In[2] := Solve[x^5+7x+1==0,x] الأمر Solve لم يتمكن من إيجاد حل معادلة
Out[2] = ToRules[Roots[7 x + x^5 == -1, x] كثيرة الحدود $x^5 + 7x + 1 = 0$

In[3] :=N[%] باستخدام الدالة N نحصل على
Out[3]={{x -> -1.11308 - 1.15173 I}, قيمة عددية تقريبية للحل
 {x -> -1.11308 + 1.15173 I},
 {x -> -0.142849},
 {x -> 1.1845 - 1.15139 I}, {x -> 1.1845 + 1.15139 I}}

ويمكن إيجاد حلول عددية تقريبية بطريقة مباشرة لمعادلات كثيرات الحدود بدون الحاجة الى إيجاد الحل المضبوط أولاً وذلك باستخدام الأمر **NRoots** كالتالي :

NRoots[poly==0,x]	للحصول على حل عددي تقريبي لمعادلة كثيرة الحدود بالنسبة الى المتغير x poly = 0
NRoots[poly==0,x,n]	للحصول على حل عددي تقريبي لمعادلة كثيرة الحدود بالنسبة الى المتغير x وبدقة n رقم عشري

In[4]:=NRoots[x^5+7x+1==0,x]

للحصول على حل عددي تقريبي لمعادلة

Out[4]=

كثيرة الحدود **x⁵ + 7x + 1 = 0**

$$x = -1.11308 - 1.15173 I$$

$$x = -1.11308 + 1.15173 I \parallel x = -0.142849$$

$$x = 1.1845 - 1.15139 I \parallel x = 1.1845 + 1.15139 I$$

In[5]:=ToRules[%]

لجعل الحل الناتج من جملة الإدخال **In[4]**

Out[5]=

في صورة قائمة بدلا من الصورة المنطقية

```
Sequence[{x -> -1.11308 - 1.15173 I},
          {x -> -1.11308 + 1.15173 I},
          {x -> -0.142849},
          {x -> 1.1845 - 1.15139 I},
          {x -> 1.1845 + 1.15139 I}]
```

٢. إيجاد جذر تقريبي Numerical Root Finding

الأمر **NRoots** يقدم طريقة لإيجاد حلول عددية تقريبية لمعادلات كثيرات الحدود لكن إيجاد حلول عددية لمعادلات عامة (تحتوى على دوال مثلثية أو أسية أو لوغاريتمية ...) يكون أكثر صعوبة ، وبرنامج ماتيماتكا يحتوى على الأمر **FindRoot** الذى يقدم طريقة عددية للبحث عن أي جذر للمعادلة أو مجموعة من المعادلات بالقرب من نقطة بداية x_0 وذلك باستخدام طريقة نيوتن **Newton's method** فى إيجاد جذر للمعادلة $f(x) = 0$ مبتدئا من نقطة البداية x_0 ومعلمية قيمة المشتقة $f'(x)$ يتم الحصول على متتابعة من القيم x_n حتى نصل الى اقرب جذر من نقطة البداية ويتم طباعة هذا الجذر فقط حتى إذا كان للمعادلة أكثر من جذر ، ومتابعة القيم x_n تحسب من العلاقة التكرارية

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} , \quad n = 0, 1, \dots$$

وفى حالة إذا كان من الصعب الحصول على مشتقة الدالة بصورة رمزية فإنه يتم حساب المشتقة $f'(x)$ بصورة عددية تقريبية من العلاقة

$$f'(x_n) \cong \frac{f(x_{n-1}) - f(x_n)}{x_{n-1} - x_n}$$

ويتم حساب جذر للمعادلة $f(x) = 0$ باستخدام طريقة القاطع **secant method** من العلاقة

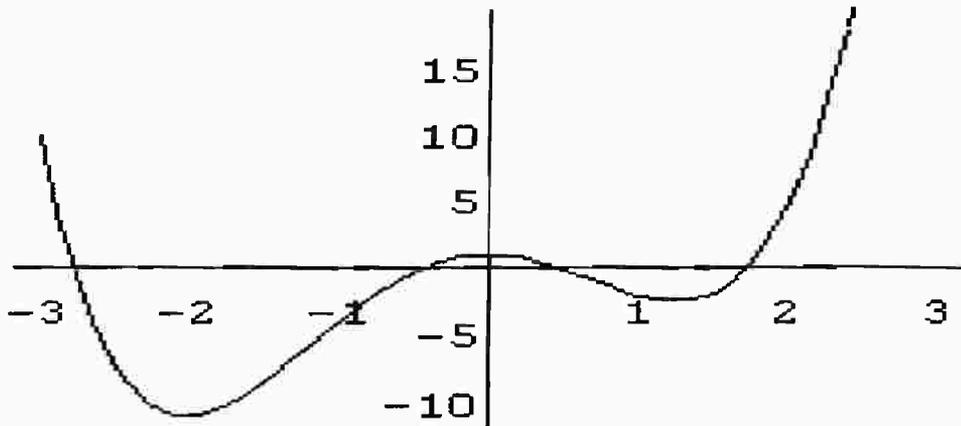
$$x_{n+1} = x_n - \left(\frac{x_{n-1} - x_n}{f(x_{n-1}) - f(x_n)} \right) f(x_n) , \quad n = 1, 2, \dots$$

حيث x_0, x_1 قيم ابتدائية يتم تحديدها .

FindRoot وفي الجدول الآتي نعرض الصيغ المختلفة للأمر

الصيغة العامة للأمر	العمل الذي يقوم به الأمر
FindRoot[lhs==rhs,{x,x0}]	البحث عن جذر للمعادلة lhs==rhs مبتدئا من النقطة x = x0
FindRoot[lhs==rhs, {x,xstart,xmin,xmax}]	البحث عن جذر للمعادلة lhs==rhs مبتدئا من النقطة x = xstart وبحيث يتم البحث داخل النطاق من x = xmin الى x = xmax ويتم إيقاف البحث عن الجذر خارج هذا الإطار
FindRoot[lhs==rhs,{x,{x0,x1}}]	البحث عن جذر للمعادلة lhs==rhs مبتدئا من القيم الابتدائية x0 , x1 باستخدام طريقة القاطع
FindRoot[{eqn1,eqn2,...},{x,x0}, {y,y0},...]	البحث عن جذر لمجموعة المعادلات eqn1 , eqn2 , ... في وقت واحد مبتدئا من نقط البداية x0 , y0 , ...

In[1]:=f[x_]:=1-5 x^2+x^3+x^4;Plot[f[x],{x,-3,3}]



تعريف الدالة $f(x)$ وهي كثيرة حدود من الدرجة الرابعة تم رسم
الدالة في الفترة $(-3,3)$

In[2]:=FindRoot[f[x]=0,{x,-2.5}]

للحصول على جذر عددي تقريبي للمعادلة

Out[2]={x -> -2.76251}

$f(x) = 0$ بالقرب من نقطة البداية $x = -2.5$

In[3]:=FindRoot[f[x]=0,{x,0.1}]

للحصول على جذر عددي تقريبي للمعادلة

Out[3]={x -> 0.483179}

$f(x) = 0$ بالقرب من نقطة البداية $x = 0.1$

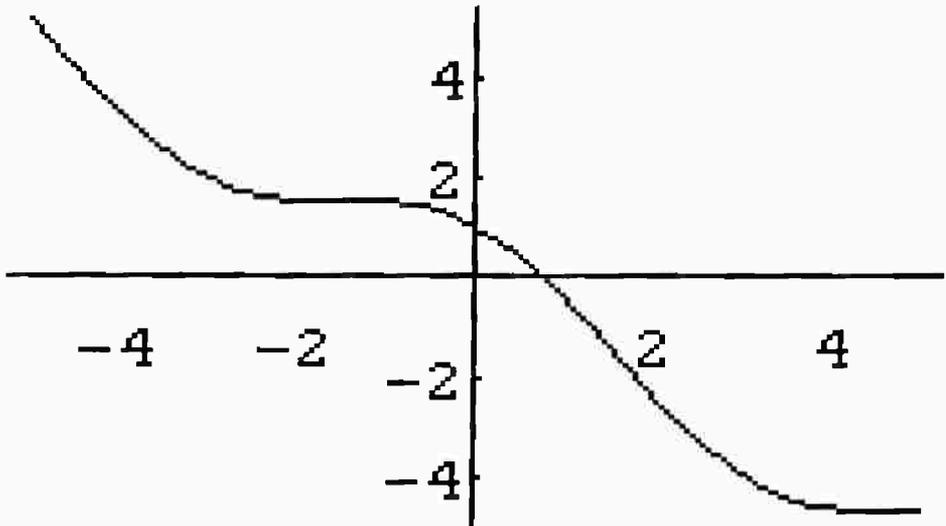
In[4]:=FindRoot[f[x]==0,{x,2}]

للحصول على جذر عددي تقريبي للمعادلة

Out[4]={x -> 1.71594}

$f(x) = 0$ بالقرب من نقطة البداية $x = 2$

In[5]:= Plot[Cos[x]-x,{x,-5,5}]



رسم الدالة $\cos(x) - x$ في الفترة $[-5,5]$

In[6]:= FindRoot[Cos[x]==x,{x,0}]

Out[6]={x -> 0.739085}

للحصول على جذر عددي تقريبي للمعادلة

$\cos x = x$ بالقرب من $x=0$

In[7]:= FindRoot[Cos[x]==x,{x,{0,1}}]

Out[7]={x -> 0.739085}

للحصول على جذر عددي تقريبي للمعادلة

مبتدئا من نطف البداية $x_0 = 0, x_1 = 1$

In[8]:= FindRoot[x^2-1==0,{x,Random[]}]

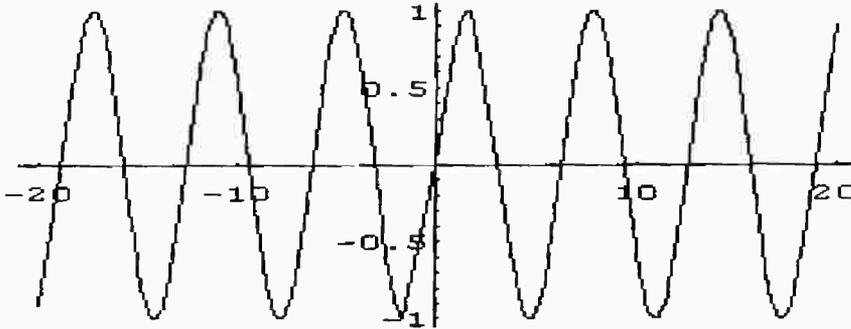
Out[8]={x -> 1.}

للحصول على جذر عددي تقريبي للمعادلة

$x^2 - 1 = 0$ بالقرب من نقطة بداية يتم

اختيارها عشوائيا داخل الفترة $(0,1)$

In[9]:=Plot[Sin[x],{x,-20,20}]



منحنى الدالة $\sin(x)$ يقطع محور x في عدد لانهاى من النقط
 $x = n\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

In[10]:=FindRoot[Sin[x]==0,{x,3}]

Out[10]={x -> 3.14159}

للحصول على جذر عددى تقريبي للمعادلة

$\sin x = 0$ بالقرب من نقطة البداية $x=3$

In[11]:=FindRoot[Sin[x]==2,{x,1}]

Out[11]=FindRoot::cvmwt:

Newton's method failed to converge to the prescribed accuracy after 15 iterations.

المعادلة $\sin x = 2$ ليس لها حل حقيقى ولكن

لها حل مركب لذلك تظهر رسالة تفيد بأن طريقة

نيوتن لا تقرب من الجذر

In[12]:=FindRoot[Sin[x]==2,{x,I}]

Out[12]={x -> 1.5708 + 1.31696 I}

للحصول على جذر عددى تقريبي للمعادلة

$\sin x = 2$ بالقرب من نقطة البداية $x=I$

In[13]:=FindRoot[Sin[x]==0,{x,3,2.5,3.5}]

Out[13]={x -> 3.14159}

الدالة FindRoot تقوم بالبحث عن جذر

عددى تقريبي للمعادلة $\sin x = 0$ بالقرب

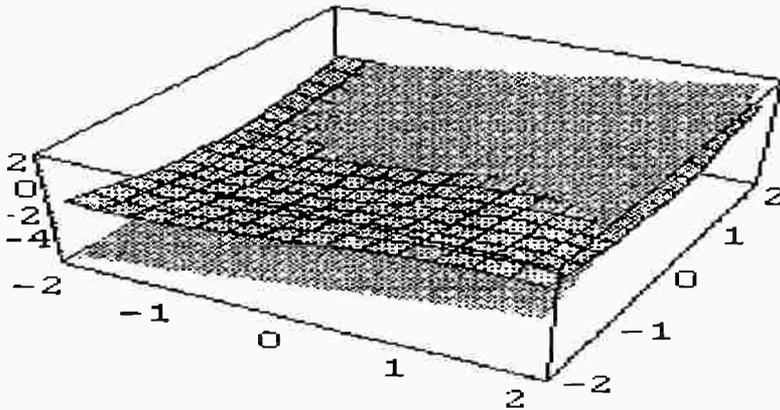
من نقطة البداية $x=3$ وداخل الفترة

[2.5,3.5] فقط ونلاحظ فى هذا المثال انه

يوجد جذر فى هذه الفترة

In[14]:=FindRoot[Sin[x]==0,{x,1,0.5,1.5}] تقوم بالبحث عن جذر عددي
 Out[14]=FindRoot::regex: $x=1$ متبدا من النقطة $\sin x = 0$ للمعادلة
 Reached the point {-0.557408} فقط ونلاحظ في هذا $[0.5, 1.5]$ الفترة
 which is outside the region {{0.5, 1.5}}. المثال انه لا يوجد جذر في هذه الفترة
 {x -> -0.557408}

In[15]:=p1=Plot3D[Sin[x]-Cos[y],{x,-2,2},{y,-2,2},
 DisplayFunction->Identity];
 p2=Plot3D[x+y-1,{x,-2,2},{y,-2,2},Mesh->False,
 DisplayFunction->Identity];
 Show[p1,p2]



في هذا المثال تم استعراض رسم الدالة $\sin(x) - \cos(y)$ وتخطيط السطح الناتج بخطوط
 شبكية مع رسم الدالة $x + y - 1$ بدون تخطيط السطح الناتج وقد تم رسم الدالتين معا
 في شكل واحد لتوضيح تقاطع السطحين. ولإيجاد حل عددي تقريبي للمعادلتين معا
 في آن واحد مبتدنا من نقط البداية $x = 0.1$, $y = 0.2$

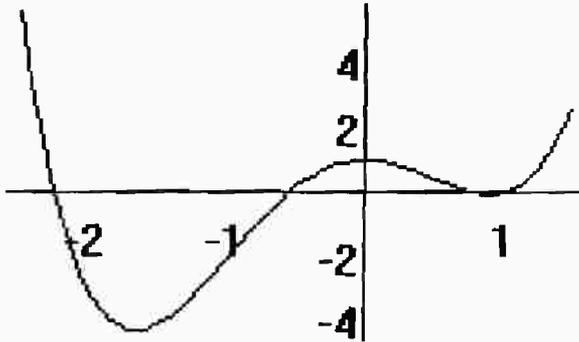
In[16]:=FindRoot[{Sin[x]==Cos[y],x+y==1},{x,0.1},{y,0.2}]
 Out[16]= $x \rightarrow 1.2854$, $y \rightarrow -0.285398$

٣ . إيجاد القيم الصغرى Numerical Minimization

فى برنامج ماتيماتكا الأمر **FindRoot** يقدم لنا طريقة عددية لإيجاد نقط تنعدم عندها الدالة وفى بعض الأحيان يكون من المهم إيجاد نقط تكون عندها الدالة $f(x)$ اصغر ما يمكن أى إيجاد نقط نهايات صغرى محلية **local minimum** للدالة $f(x)$ ويمكن الحصول على هذه النقط عن طريق تطبيق الأمر **FindRoot** على مشتقة الدالة $f(x)$ ، وماتيماتكا يقدم الأمر **FindMinimum** لحساب نقط نهايات صغرى للدالة $f(x)$ بطريقة مباشرة وكذلك القيم الصغرى للدالة عند هذه النقط وباستخدام العلاقة $\max(f) = -\min(-f)$ يمكن إيجاد نقط النهايات العظمى للدالة $f(x)$.

الصيغة العامة للأمر	العمل الذى يقوم به الأمر
FindMinimum[f,{x,x0}]	البحث عن نقطة نهاية صغرى محلية للدالة f بالقرب من نقطة البداية x_0 وحساب القيمة الصغرى للدالة.
FindMinimum[f,{x,xstart,xmin,xmax}]	البحث عن نقطة نهاية صغرى محلية للدالة f بالقرب من نقطة البداية $x=xstart$ والبحث يتم البحث فقط داخل النطاق من $x=xmin$ الى $x=xmax$ وحساب القيمة الصغرى للدالة .
FindMinimum[f,x,{x0,x1}]	البحث عن نقطة نهاية صغرى محلية للدالة f بالقرب من القيم الابتدائية x_0, x_1 وحساب القيمة الصغرى للدالة ويستخدم الأمر FindMinimum بهذه الصورة عندما يكون من الصعب إيجاد التفاضل للدالة f
FindMinimum[f,{x,x0},{y,y0},...]	البحث عن نقطة نهاية صغرى محلية لدالة فى اكثر من متغير $f(x, y, \dots)$ بالقرب من القيم الابتدائية $x=x_0, y=y_0, \dots$ وحساب القيمة الصغرى للدالة .

In[1]:= f[x_]:=1-3x^2+x^3+x^4;Plot[f[x],{x,-2.5,1.5}]



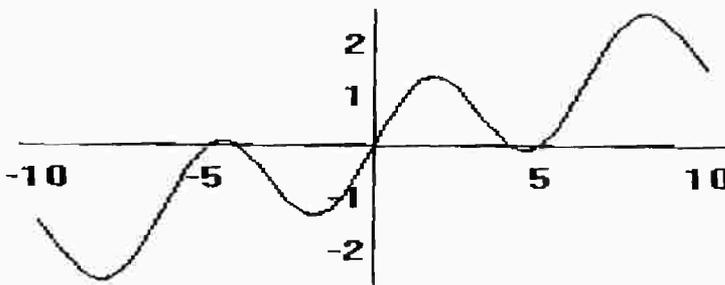
تعريف الدالة
 $f(x) = 1 - 3x^2 + x^3 + x^4$
 ثم رسمها في الفترة $[-2.5, 1.5]$
 ونلاحظ أن الدالة لها نقطتي نهاية
 صفري محلية في نطاق التعريف

In[2]:=FindMinimum[f[x],{x,-2}] للبحث عن نقطة نهاية صفري محلية للدالة بالقرب من
 Out[2]={-4.24791, {x -> -1.65587}} النقطة $x = -2$ وإيجاد القيمة الصفري للدالة عندها

In[3]:=FindMinimum[f[x],{x,0.5}] للبحث عن نقطة نهاية صفري محلية للدالة بالقرب من
 Out[3]={-0.0450589, {x -> 0.905869}} النقطة $x = 1$ اد القيمة الصفري للدالة عندها

In[4]:=maxf=-FindMinimum[-f[x],{x,.5}] للبحث عن نقطة نهاية عظمى محلية للدالة بالقرب
 Out[4]={1., {- {x->9.54982 10⁻¹³}} من النقطة $x = .5$ إيجاد القيمة العظمى للدالة عندها

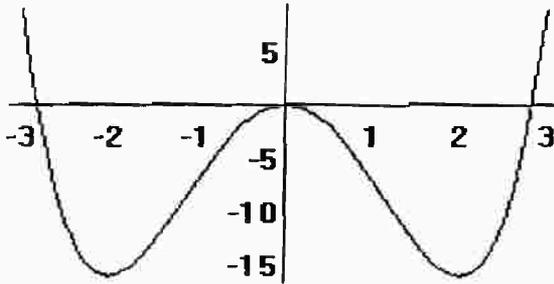
In[5]:= Plot[Sin[x]+x/5,{x,-10,10}]



رسم الدالة
 $\sin x + x/5$
 على الفترة $[-10, 10]$
 ونلاحظ أن الدالة لها أكثر
 من نقطة نهاية صفري محلية
 في نطاق التعريف .

In[6]:=FindMinimum[Sin[x]+x/5,{x,1}] للبحث عن نقطة نهاية صفري محلية للدالة بالقرب
 Out[6]={-1.33423, {x -> -1.77215}} من النقطة $x = 1$ جاد القيمة الصفري للدالة عندها

In[7]:= r3[x_]:=x^4-8x^2;Plot[r3[x],{x,-3,3}]



تعريف الدالة

$$r3(x) = x^4 - 8x^2$$

ثم رسمها في الفترة $[-3, 3]$

ونلاحظ أن الدالة لها نقطتي نهاية

صغرى محلية في نطاق التعريف .

In[8]:=FindMinimum[r3[x],{x,1.5}] للبحث عن نقطة نهاية صغرى محلية للدالة بالقرب من

Out[8]={-16., {x -> 2.}}

النقطة $x = 1.5$ وإيجاد القيمة الصغرى للدالة عندها

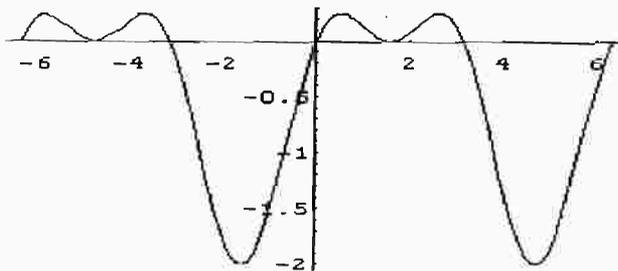
In[9]:=FindMinimum[r3[x],{x,-1,-2.5,0}] للبحث عن نقطة نهاية صغرى محلية للدالة

Out[9]={-16., {x -> -2.}}

بالقرب من النقطة $x = -1$ وفي النطاق

$[-2.5, 0]$ وإيجاد القيمة الصغرى للدالة عندها

In[10]:= r4[x_]:=Sin[x]-Sin[x]^2; Plot[r4[x],{x,-2Pi,2Pi}]



تعريف الدالة

$$r4(x) = \sin(x) - \sin^2(x)$$

ثم رسمها في الفترة $[-2\pi, 2\pi]$

ونلاحظ أن الدالة لها أكثر من نقطة

نهاية صغرى محلية في نطاق التعريف .

In[11]:= FindMinimum[r4[x],{x,6}] للبحث عن نقطة نهاية صغرى محلية للدالة $r4[x]$ بالقرب

Out[11]={-2., {x -> 4.71239}}

من النقطة $x = 6$ وإيجاد القيمة الصغرى للدالة عندها

In[12]:= FindMinimum[r4[x],{x,-3}] للبحث عن نقطة نهاية صغرى محلية للدالة $r4[x]$ بالقرب

Out[12]={-2., {x -> -1.5708}}

من النقطة $x = -3$ وإيجاد القيمة الصغرى للدالة عندها

In[13]:= FindMinimum[r4[x],{x,-4}] للبحث عن نقطة نهاية صغرى محلية للدالة $r4[x]$ بالقرب

Out[13]={2.22045 10⁻¹⁶, {x -> -4.71239}}

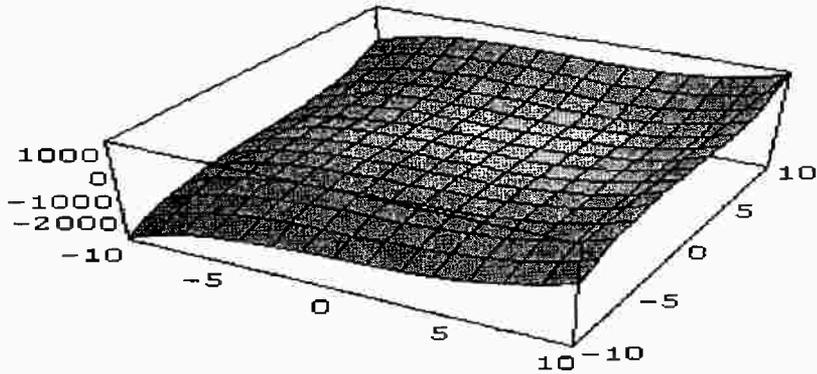
من النقطة $x = -4$ وإيجاد القيمة الصغرى للدالة عندها

In[14]:= - FindMinimum[-r4[x],{x,-4}] للبحث عن نقطة نهاية عظمى محلية للدالة $r4[x]$ بالقرب

Out[14]={0.25, {x -> -3.66519}}

من النقطة $x = -4$ وإيجاد القيمة العظمى للدالة عندها

In[15]:= f[x_,y_]:=x^3+y^3-3x y; Plot3D[f[x,y],{x,-10,10},{y,-10,10}]



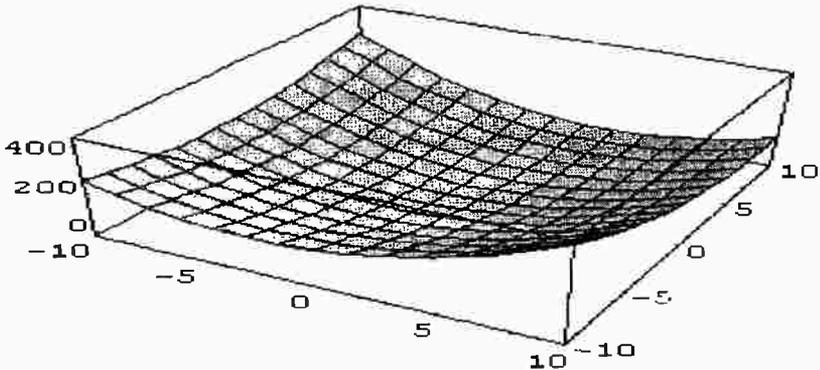
تعريف الدالة $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ ثم رسمها في الفراغ في المنطقة $-10 \leq x \leq 10$, $-10 \leq y \leq 10$

In[16]:= FindMinimum[f[x,y],{x,0.4},{y,0.5}] للبحث عن نقطة نهاية صغرى محلية للدالة

Out[16]={-1., {x -> 1., y -> 1.}}

بالقرب من $x=0.4$, $y=0.5$ وإيجاد القيمة الصغرى للدالة عندها .

In[17]:= h[x_,y_]:=2x^2+y^2-x y-7y; Plot3D[h[x,y],{x,-10,10},{y,-10,10}]



تعريف الدالة $h(x,y) = 2x^2 + y^2 - xy - 7y$ ثم رسمها في الفراغ في المنطقة $-10 \leq x \leq 10$, $-10 \leq y \leq 10$

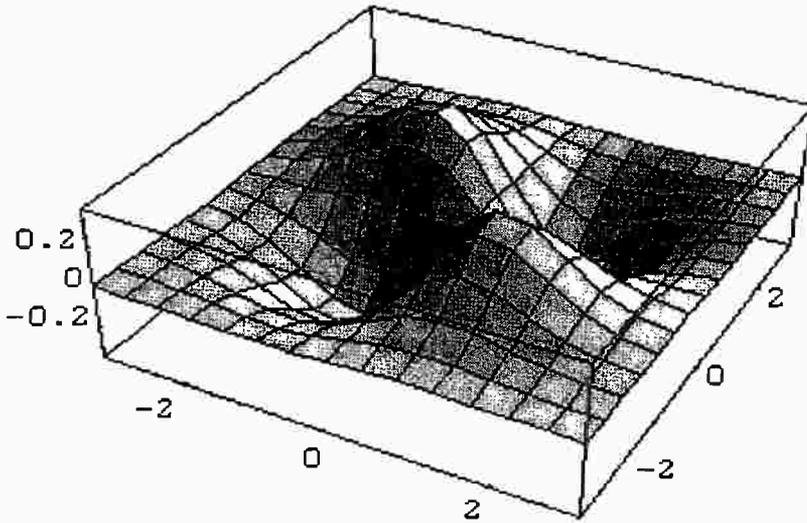
In[18]:= FindMinimum[h[x,y],{x,2},{y,5}]

للبحث عن نقطة نهاية صغرى محلية للدالة

Out[18]={-14., {x -> 1., y -> 4.}}

بالقرب من $x=0.4$, $y=0.5$ وإيجاد القيمة الصغرى للدالة عندها .

```
In[19]:= g[x_,y_]:= -x y Exp[-(x^2+y^2)/2];
Plot3D[g[x,y],{x,-Pi,Pi},{y,-Pi,Pi}]
```



تعريف الدالة $g(x,y) = -x y \text{Exp}[-(x^2 + y^2)/2]$ ثم رسمها في الفراغ في المنطقة $-\pi \leq x \leq \pi$, $-\pi \leq y \leq \pi$

```
In[20]:=FindMinimum[g[x,y],{x,0.6},{y,0.5}]
```

Out[20]={{-0.367879, {x -> 1., y -> 1.}}} وإيجاد القيمة الصغرى للدالة عندها

```
In[21]:=FindMinimum[g[x,y],{x,-1.5},{y,-0.5}]
```

Out[21]={{-0.367879, {x -> -1., y -> -1.}}} وإيجاد القيمة الصغرى للدالة عندها

```
In[22]:= -FindMinimum[-g[x,y],{x,-1.5},{y,0.5}]
```

Out[22]={{0.367879, {-x -> -1., -y -> 1.}}} وإيجاد القيمة العظمى للدالة عندها

```
In[23]:= -FindMinimum[-g[x,y],{x,1.5},{y,-0.5}]
```

Out[23]={{0.367879, {-x -> 1., -y -> -1.}}} وإيجاد القيمة العظمى للدالة عندها

٤. الحساب العددي للمجموع وحواصل الضرب Numerical Sum and Product

في برنامج ماتيماتكا أمر المجموع $\text{Sum}[f, \{i, \text{imin}, \text{imax}\}]$ يقوم بحساب قيمة

مضبوطة للمجموع $\sum_{i=\text{imin}}^{\text{imax}} f$ حتى إذا كان المجموع في صورة رمزية symbolic وفي بعض

الحالات لا يستطيع ماتيماتكا حساب الناتج المضبوط للجمع عن طريق الدالة Sum خاصة

إذا كان $\text{imax} = \infty$ ولثل هذه الحالات فإنه يمكن حساب قيمة عددية تقريبية للمجموع

باستخدام الدالة N بالصورة

$\text{Sum}[f, \{i, \text{imin}, \text{imax}\}]//N$ أو في الصورة $N[\text{Sum}[f, \{i, \text{imin}, \text{imax}\}]$

وماتيماتكا يقدم الأمر $N\text{Sum}$ لحساب قيمة عددية تقريبية للمجموع مباشرة دون الحاجة

الى حساب القيمة المضبوطة والتي تتطلب العديد من العمليات وبالمثل يوجد في ماتيماتكا الأمر

$N\text{Product}$ لحساب قيمة عددية تقريبية لحاصل الضرب

الصيغة العامة للأمر	العمل الذي يقوم به الأمر
$N\text{Sum}[f, \{i, \text{imax}\}]$	إيجاد قيمة عددية تقريبية للمجموع $\sum_{i=1}^{\text{imax}} f$
$N\text{Sum}[f, \{i, \text{imin}, \text{imax}\}]$	إيجاد قيمة عددية تقريبية للمجموع $\sum_{i=\text{imin}}^{\text{imax}} f$
$N\text{Sum}[f, \{i, \text{imin}, \text{imax}, \text{step}\}]$	إيجاد قيمة عددية تقريبية للمجموع $\sum_{i=\text{imin}}^{\text{imax}} f$ من $i=\text{imin}$ الى $i=\text{imax}$ بخطوة مقدارها step
$N\text{Sum}[f, \{i, \text{imin}, \text{imax}\}, \{j, \text{jmin}, \text{jmax}\}, \dots]$	إيجاد قيمة عددية تقريبية للمجموع $\sum_{i=\text{imin}}^{\text{imax}} \sum_{j=\text{jmin}}^{\text{jmax}} f$
$N\text{Product}[f, \{i, \text{imin}, \text{imax}\}]$	إيجاد قيمة عددية تقريبية لحاصل الضرب $\prod_{i=\text{imin}}^{\text{imax}} f$

In[1]:=Sum[1/i^3,{i,1,Infinity}]

ماتيماتيكا لم يتمكن من حساب قيمة مضبوطة

Out[1]=Sum[i⁻³ , {i, 1, Infinity}]

للمجموع باستخدام دالة Sum فقط

In[2]:=Sum[1/I^3,{I,1,Infinity}]/N

عند تطبيق الدالة N أمكن الحصول على

Out[2]=1.20206

قيمة عددية تقريبية للمجموع

In[3]:=NSum[1/i^3,{i,1,Infinity}]

باستخدام دالة NSum أمكن مباشرة إيجاد

Out[3]=1.20206

قيمة عددية تقريبية للمجموع

In[4]:=Sum[Exp[-n},{n,0,5}]

ماتيماتيكا لم يتمكن من حساب قيمة مضبوطة

Out[4]=1 + E⁻⁵ + E⁻⁴ + E⁻³ + E⁻² + E⁻¹

للمجموع باستخدام دالة Sum بالرغم

من أن imax = 5 فقط

In[5]:=NSum[Exp[-n},{n,0,Infinity}]

باستخدام دالة NSum أمكن مباشرة إيجاد

Out[5]=1.58198

قيمة عددية تقريبية للمجموع حتى مالانهاية

In[6]:=NSum[1/n!,{n,0,Infinity}]

لإيجاد قيمة عددية تقريبية لمجموع

Out[6]=2.71828

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \text{ التسلسلة}$$

In[7]:=NSum[1/(n(n+1)(n+2)),{n,1,Infinity}]

لإيجاد قيمة عددية تقريبية لمجموع

Out[7]=0.25

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \text{ التسلسلة}$$

In[8]:=NSum[1/(i^2+j^2),{i,1,5},{j,1,10}]

لإيجاد قيمة عددية تقريبية لمجموع التسلسلة

Out[8]=2.39932

$$\sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^{10} \frac{1}{i^2+j^2}$$

In[9]:=Nproduct[1/i^2,{i,1,5}]

لإيجاد قيمة عددية تقريبية لحاصل الضرب

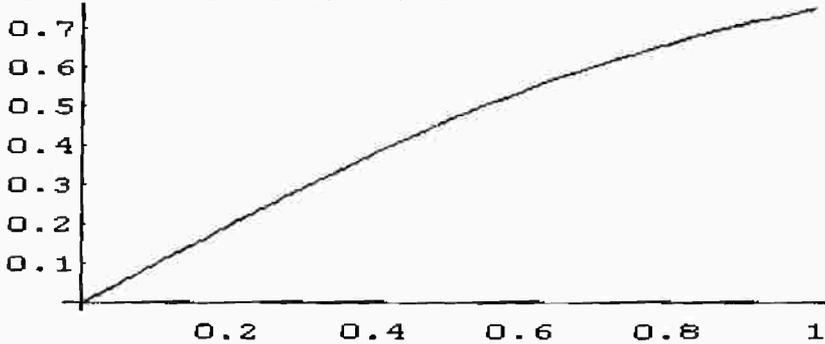
Out[9]=0.0000694444

٥ . التكامل العددي Numerical Integration

دالة التكامل Integrate تقوم بحساب التكامل $\int f(x) dx$ بصورة رمزية symbolic حيث يتعامل برنامج ماتيماتكا مع دالة التكامل $f(x)$ ويقوم بإجراء متابعة من القواعد والتحويلات الرمزية وصولاً إلى القيمة المضبوطة للتكامل في صورة رمزية وتوجد بعض الدوال لا تستطيع دالة Integrate الحصول على قيم مضبوطة لتكاملاتها المحددة definite وفي هذه الحالة يمكن استخدام الدالة N لحساب قيمة عددية للتكامل ، وفي ماتيماتكا يوجد الدالة NIntegrate لحساب قيمة عددية تقريبية للتكامل مباشرة دون الحاجة إلى حساب القيمة المضبوطة حيث يتم حساب متابعة من القيم العددية لدالة التكامل عند نقط خاصة في نطاق التكامل ثم تستخدم هذه القيم في الوصول إلى قيمة عددية تقريبية جيدة للتكامل .

$N[Integrate[f,\{x,xmin,xmax\}]] \int_{xmin}^{xmax} f(x) dx$ <p>حساب قيمة مضبوطة للتكامل</p> <p>أولاً ثم إيجاد قيمة عددية تقريبية بعد ذلك</p>
$NIntegrate[f,\{x,xmin,xmax\}] \int_{xmin}^{xmax} f(x) dx$ <p>حساب قيمة عددية تقريبية مباشرة للتكامل</p>
$NIntegrate[f,\{x,xmin,xmax\},\{y,ymin,ymax\},...] \int_{xmin}^{xmax} \int_{ymin}^{ymax} f(x,y) dx dy$ <p>حساب قيمة عددية تقريبية مباشرة للتكامل المتعدد</p>
$NIntegrate[f,\{x,xmin,x1,x2,...,xmax\}] \int_{xmin}^{xmax} f(x) dx$ <p>حساب قيمة عددية تقريبية مباشرة للتكامل مع مراعاة النقط الشاذة $x1,x2,...$ لدالة التكامل</p>

In[1]:= Plot[Sin[Sin[x]],{x,0,1}]



In[2]:= Integrate[Sin[Sin[x]],{x,0,1}]

ماتيماتيكا لا يستطيع الحصول على قيمة

Out[2]= On::none: Message SeriesData::

مضبوطة للتكامل

csa not found

$$\int_0^1 \sin(\sin(x)) dx$$

In[3]:= N[%]

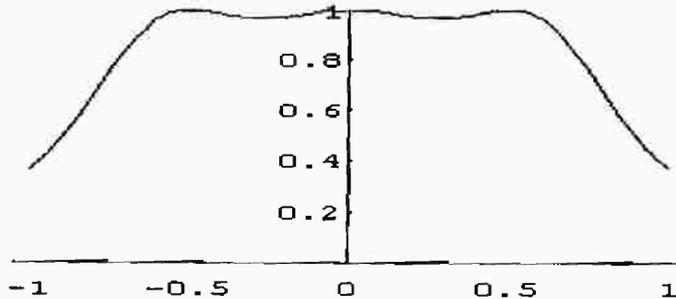
بواسطة الدالة N يمكن إيجاد قيمة

Out[3]=0.430606

عددية تقريبية للتكامل

In[4]:= f[x_]:=Exp[-x^2 Cos[Pi x]^2];

Plot[f[x],{x,-1,1},PlotRange->{0,1}]



In[5]:= NIntegrate[f[x],{x,-1,1}]

لحساب قيمة عددية تقريبية مباشرة للتكامل

Out[5]=1.71167

$$\int_{-1}^1 e^{-x^2 \cos^2(\pi x)} dx$$

In[6]:=NIntegrate[Exp[-2x],{x,0,Infinity}] لإيجاد قيمة عددية تقريبية للتكامل

Out[6]=0.5
$$\int_0^{\infty} e^{-2x} dx$$

In[7]:=NIntegrate[Sqrt[4+x^3],{x,0,3}] لإيجاد قيمة عددية تقريبية للتكامل

Out[7]=9.27972
$$\int_0^3 \sqrt{4+x^3} dx$$

In[8]:=NIntegrate[Sin[x]/(Pi+x),{x,0,Pi}] لإيجاد قيمة عددية تقريبية للتكامل

Out[8]=0.433785
$$\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{x + \pi} dx$$

In[9]:=NIntegrate[Exp[-x^2],{x,0,2}] لإيجاد قيمة عددية تقريبية للتكامل

Out[9]=0.882081
$$\int_0^2 e^{-x^2} dx$$

In[10]:=NIntegrate[Cos[x^2],{x,-1,1}] لإيجاد قيمة عددية تقريبية للتكامل

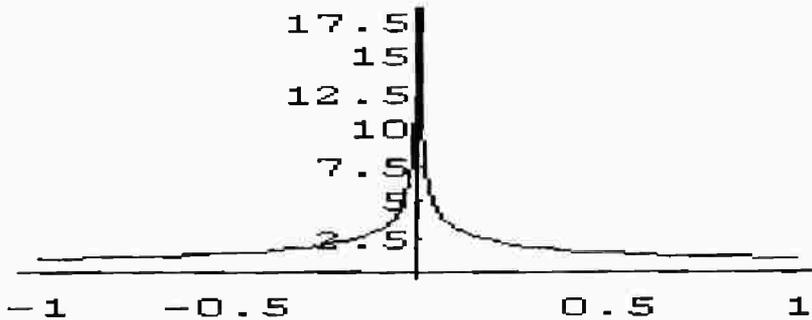
Out[10]=1.80905
$$\int_{-1}^1 \cos(x^2) dx$$

In[11]:=NIntegrate[1/(x-1)^(1/3),{x,-2,1,2}] لإيجاد قيمة عددية تقريبية للتكامل

Out[11]=3.06006 - 2.70211 I
$$\int_{-2}^2 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} dx$$

مع مراعاة النقطة الشاذة $x=1$

In[12]:=Plot[1/Sqrt[Abs[x]],{x,-1,1}]

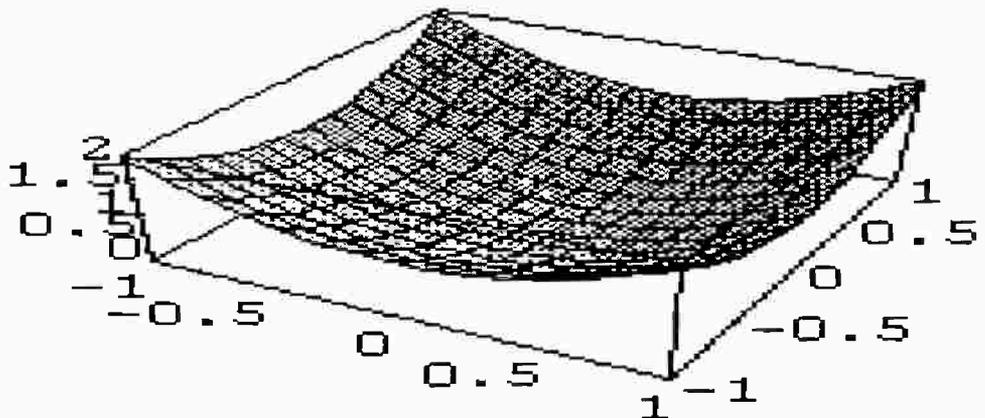


لإيجاد قيمة عددية تقريبية للتكامل مع مراعاة النقطة الشاذة $x=0$ $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx$

In[13]:=NIntegrate[1/Sqrt[Abs[x]],{x,-1,0,1}]

Out[13]=4.

In[14]:=Plot3D[x^2+y^2,{x,-1,1},{y,-1,1}]



لإيجاد قيمة عددية تقريبية للتكامل الثنائي $\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (x^2 + y^2) dx dy$

In[15]:=NIntegrate[x^2+y^2,{x,-1,1},{y,-1,1}]

Out[15]=2.66667

لايجاد قيمة عددية تقريبية للتكامل الثنائي

$$\int_{-5}^5 \int_{-3}^3 e^{\frac{-(x-y)^2}{1+(x+y)^2}} dx dy$$

In[16]:=NIntegrate[Exp[-(x-y)^2]/(1+(x+y)^2),{x,-3,3},{y,-5,5}]

Out[16]=2.48738

لايجاد قيمة عددية تقريبية للتكامل الثنائي

$$\int_0^1 \int_{x^2}^x (2x^2 + y^2) dy dx$$

In[17]:=NIntegrate[2 x^2+y^2,{x,0,1},{y,x^2,x}]

Out[17]=0.135714

لايجاد قيمة عددية تقريبية للتكامل الثلاثي

$$\int_0^1 \int_0^z \int_0^{y+z} x y z dx dy dz$$

In[18]:= NIntegrate[x y z,{z,0,1},{y,0,z},{x,0,y+z}]

Out[18]=0.118056

لايجاد قيمة عددية تقريبية للتكامل الثلاثي

$$\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-y^2}} \int_0^{\sqrt{9-x^2-y^2}} z \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dz dx dy$$

In[19]:=NIntegrate[zSqrt[x^2+y^2+z^2],{y,0,3},{x,0,Sqrt[9-y^2]},
{z,0,Sqrt[9-x^2-y^2]}]

Out[19]=38.1704

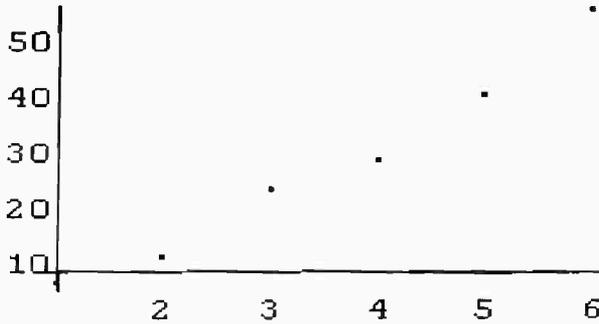
٦ . التقريب بالمربعات الصغرى Least - squares

في داخل بناء ماتيماتكا **built-in** يوجد إمكانات متعددة للحصول على كثيرة حدود المربعات الصغرى التي تلائم قائمة من البيانات والفكرة الأساسية التي يعتمد عليها ماتيماتكا لللائمة البيانات هو اخذ قائمة من الدوال التي نقوم بتحديددها ثم محاولة إيجاد تركيبة خطية من هذه الدوال معا لتقريب البيانات المعطاة باستخدام قاعدة المربعات الصغرى ويتم ذلك عن طريق جعل المقدار $\sum_i |y_i - f_i|^2$ اصغر ما يمكن حيث y_i من البيانات المعطاة , f_i هي القيمة من التركيبة الخطية للدوال التي قام المستخدم بتحديددها ويتم ذلك باستخدام الدالة **Fit** والصيغة العامة لها كالتالي :

Fit[data,funcs,vars]	لائمة البيانات data باستخدام تركيبة خطية من الدوال funcs في المتغيرات vars
Fit[{y1,y2,...},{f1,f2,...},x]	إيجاد افضل تركيبة خطية من الدوال f1, f2, ... تلائم النقط (1,y1),(2,y2),... حيث تم اعتبار قيم x المناظرة لقيم yi هي xi = i
Fit[{x1,y1},{x2,y2},...,{f1,f2,...},x]	إيجاد افضل تركيبة خطية من الدوال f1,f2,... تلائم النقط (x1,y1),(x2,y2),...

Fit[{y1,y2,...},{1,x},x]	إيجاد افضل خط مستقيم linear fit يلائم البيانات (1,y1),(2,y2), ...
Fit[{y1,y2,...},{1,x,x^2},x]	إيجاد افضل كثيرة حدود من الدرجة الثانية Quadratic fit تلائم البيانات (1,y1),(2,y2), ...
Fit[data,Table[x^i,{i,0,n},x],x]	إيجاد افضل كثيرة حدود من درجة n تلائم البيانات data

In[1]:=data1={6,11,23,28,40,55}; m1=ListPlot[data1]



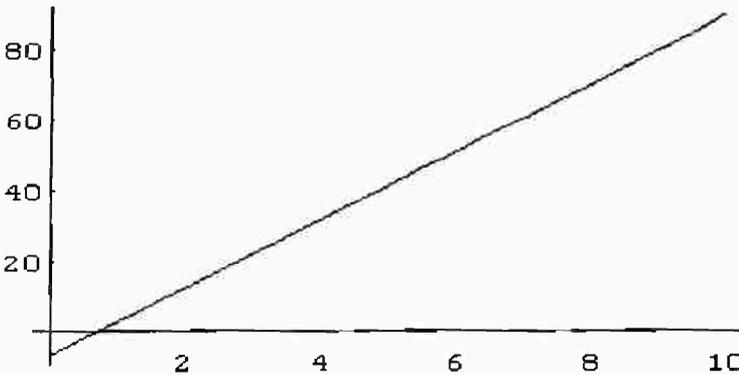
تعريف قائمة data1 من الأعداد
ثم تحديد مواضع هذه الأعداد
في المستوى

In[2]:= f1=Fit[data1,{1,x},x]

Out[2]=-6.53333 + 9.62857 x

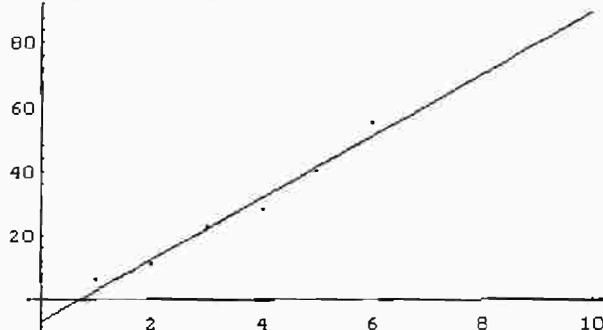
إيجاد معادلة افضل خط مستقيم
يلتئم قائمة البيانات data1

In[3]:=s1=Plot[f1,{x,0,10}]



رسم الخط المستقيم f1
النتائج من الدالة Fit

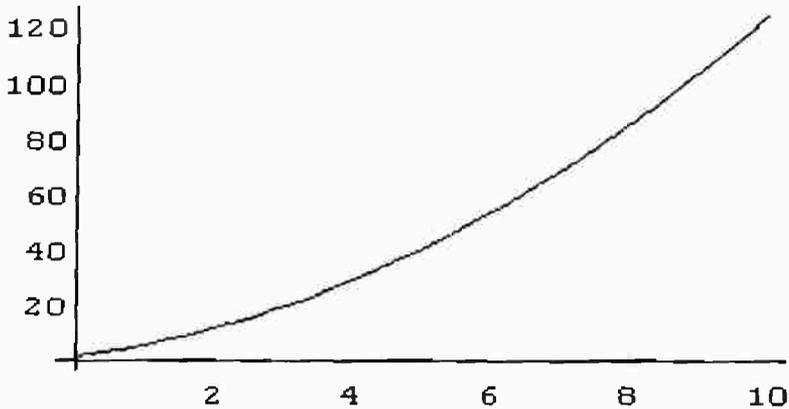
In[4]:=Show[s1,m1]



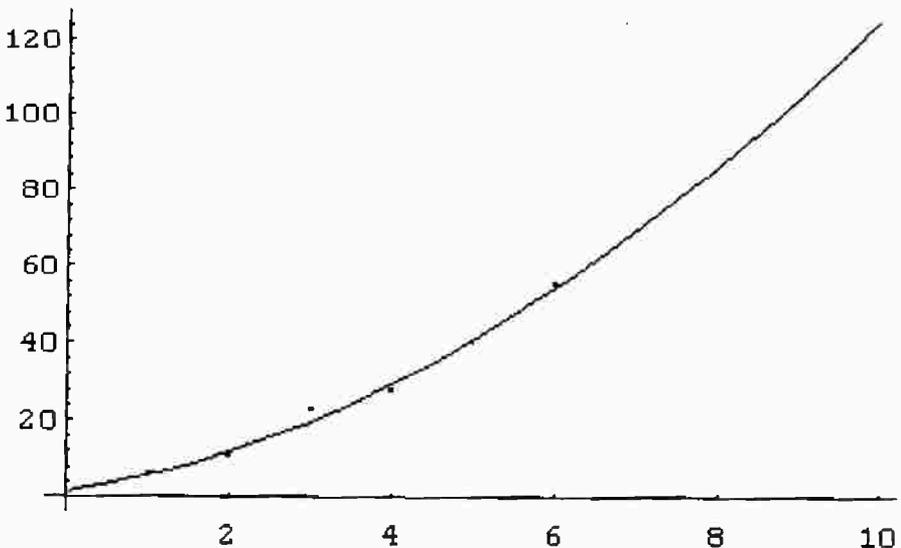
إظهار رسم الخط المستقيم الناتج من
الدالة Fit مع رسم القائمة data1

In[5]:= f2=Fit[data1,{1,x,x^2},x] إيجاد افضل كثيرة حدود من الدرجة الثانية
 Out[5]=3.37857+1.8x+ 0.892857 x² تلائم قائمة البيانات data1

In[6]:= s2=Plot[f2,{x,0,10}] رسم كثيرة الحدود f2 الناتجة من
 الدالة Fit



In[7]:= Show[m1,s2]



إظهار رسم كثيرة الحدود s2 الناتجة من الدالة Fit مع رسم القائمة data1

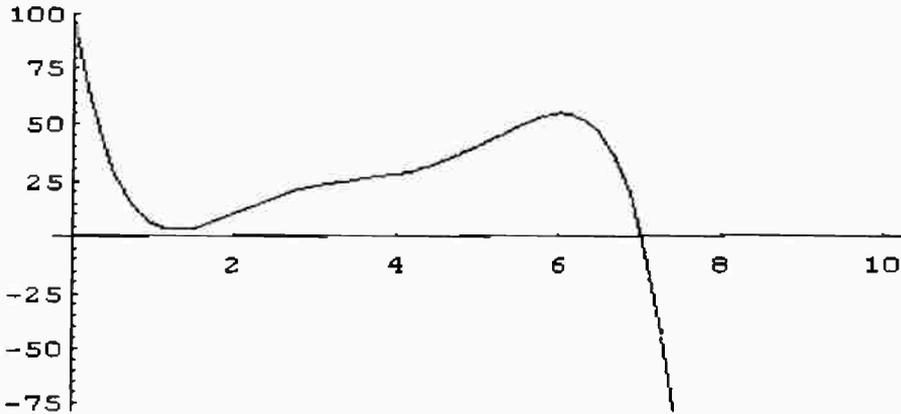
إيجاد افضل كثيرة حدود من الدرجة الخامسة تلائم قائمة البيانات **data1** ثم رسم كثيرة

الحدود **f3** الناتجة من الدالة **Fit**

In[8]:= f3=Fit[data1,Table[x^i,{i,0,5}],x]

Out[8]=96. - 194.533 x + 144.583 x² - 46.5833 x³ +
6.91667 x⁴ - 0.383333 x⁵

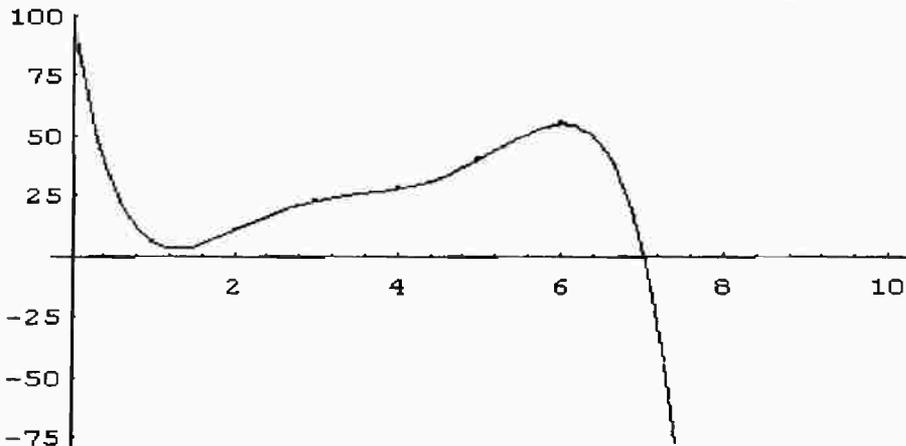
In[9]:=s3=Plot[f3,{x,0,10}]



In[10]:= Show[m1,s3]

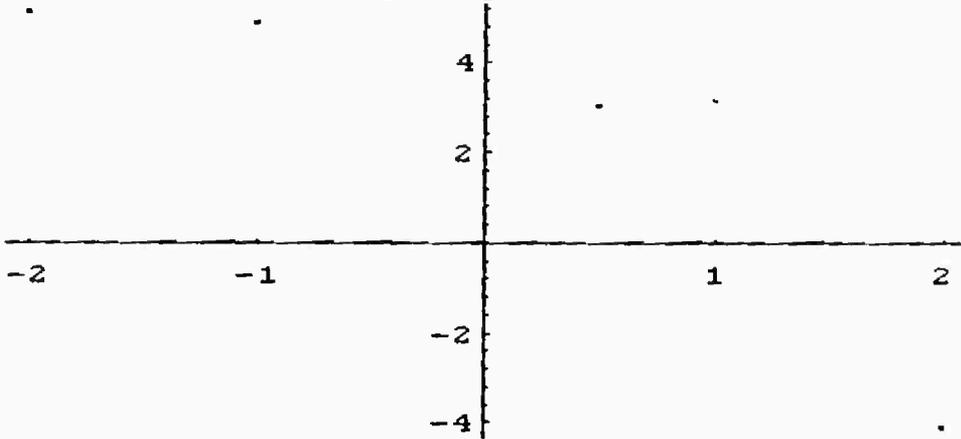
إظهار رسم كثيرة الحدود **s3** الناتجة من

الدالة **Fit** مع رسم القائمة **data1**



تعريف قائمة data2 من الأعداد ثم تحديد مواضع هذه الأعداد في المستوى

```
In[11]:= data2={{-2,5.1},{-1,4.9},{0.5,3},{1,3.1},{2,-4.1}};
m2=ListPlot[data2]
```



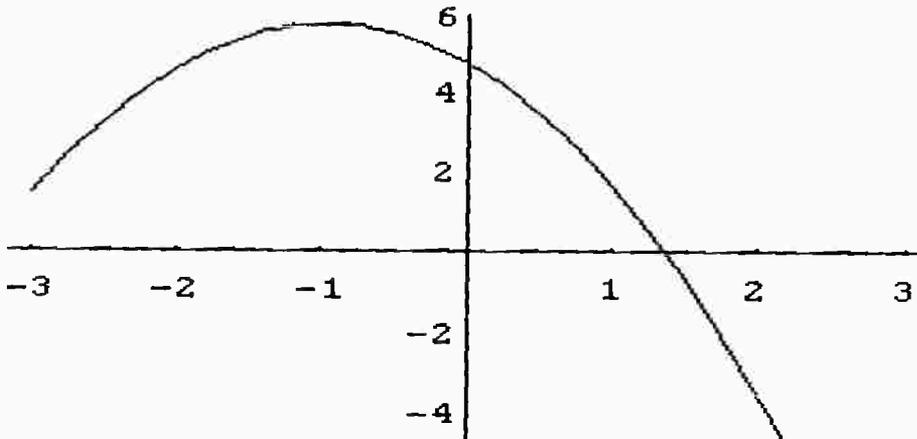
إيجاد افضل كثيرة حدود من الدرجة الثانية تلائم قائمة البيانات data2 ثم رسم كثيرة

الحدود f4 الناتجة من الدالة Fit

```
In[12]:= f4=Fit[data2,{1,x,x^2},x]
```

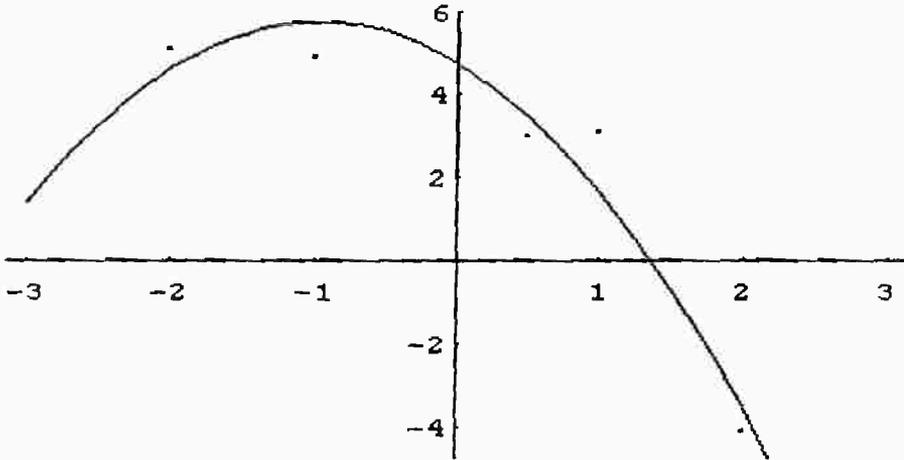
```
Out[12]=4.75476 - 2.04354 x - 1.04898 x^2
```

```
In[13]:= s4=Plot[f4,{x,-3,3}]
```



إظهار رسم كثيرة الحدود s4 الناتجة من الدالة Fit مع رسم القائمة data2

In[14]:= Show[m2,s4]



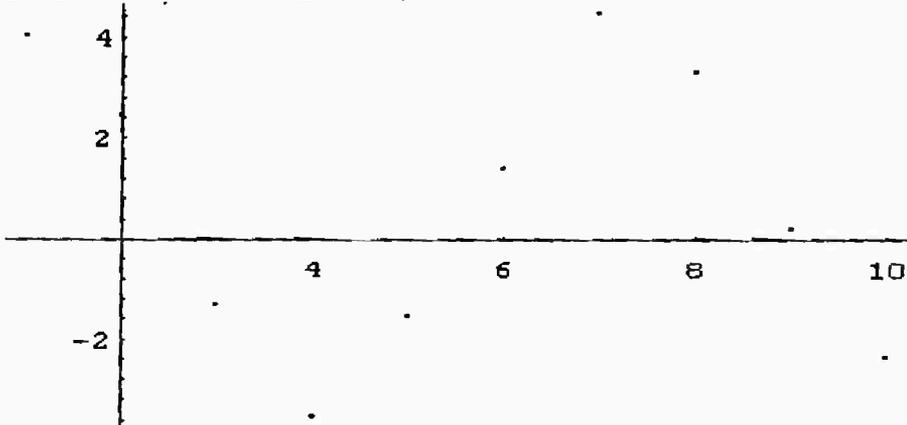
وتعتبر كثيرات الحدود هي الأكثر استخداما مع دالة Fit ولكن يمكن استخدام أي دوال أخرى في قائمة الدوال نرى أنها مناسبة للبيانات مثل الدوال الأسية واللوغاريتمية والمثلثية والزائدية ... الخ .

تعريف قائمة data3 من الأعداد ثم تحديد مواضع هذه الأعداد في المستوى

In[15]:=data3=Table[N[Random[]+2Cos[x]+3Sin[x]],{x,1,10}]

Out[15]={{4.02232, 2.45486, -1.32769, -3.54897, -1.54028,
1.4028, 4.47493, 3.28246, 0.177847, -2.3534}

In[16]:=m3=ListPlot[data3]

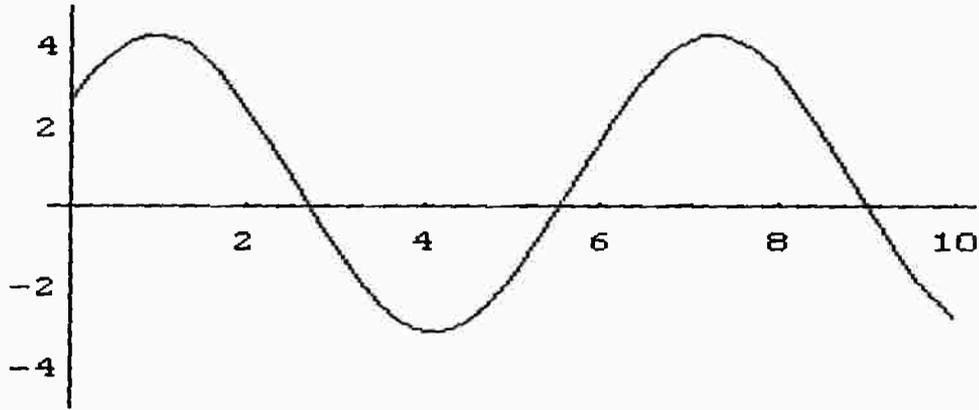


إيجاد افضل تركيبة خطية من مجموعة الدوال $\{1, \text{Cos}(x), \text{Sin}(x)\}$ بحيث تلائم قائمة البيانات **data3** ثم رسم المعادلة **f5** الناتجة من الدالة **Fit**

In[17]:=f5=Fit[data3,{1,Cos[x],Sin[x]},x]

Out[17]=0.56281 + 2.04344 Cos[x] + 3.05647 Sin[x]

In[18]:=s5=Plot[f5,{x,0,10},PlotRange->{-5,5}]



إظهار رسم المعادلة **s5** الناتجة من الدالة **Fit** مع رسم القائمة **data3**

In[19]:=Show[m3,s5]

