الفصل
1

التجارب العشوائية
Random Experiments

١ - فضاء العينة والأحداث Sample Space and Events

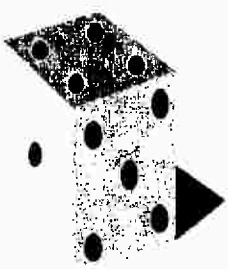
الاحتمال هو دراسة التجارب العشوائية ، وللتعرف على التجارب العشوائية بما تحويه من مفاهيم أساسية كفضاء العينة والأحداث فإننا نبدأ بتعريف التجربة العشوائية .

تعريف ١ : التجربة العشوائية Random Experiment

التجربة العشوائية هي تجربة نعلم مسبقا جميع النواتج الممكنة لها ولكننا لا نعرف بشكل حتمي أي من هذه النواتج سوف يقع أو سيتحقق أو سنحصل عليه بالضبط .
أي أن ناتج التجربة لا يكون معروف بشكل حتمي لذلك سميت تجربة عشوائية .

مثال ١ :

- تجربة إلقاء عملة معدنية هي تجربة عشوائية حيث لا نعرف أي النواتج سنحصل عليها هل صورة (Head) ويرمز لها بالرمز H أو كتابة (Tail) ويرمز لها بالرمز T أي أن نتيجة التجربة لا يكون معروف بشكل حتمي وأن كنا نعلم مسبقاً أننا سنحصل على أياً من النواتج صورة H أو كتابة T .



- تجربة إلقاء حجر نرد لملاحظة العدد الذي يظهر على الوجه العلوي هي تجربة عشوائية حيث لا نعرف أي النواتج نحصل عليها فهناك ستة أرقام 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 يمكن لأياً منها أن يظهر على الوجه العلوي لحجر النرد أي أن ناتج التجربة لا يكون معروف بشكل حتمي وأن كنا نعلم مسبقاً أننا سنحصل على أياً من الأرقام الستة 1, 2, 3, 4 , 5 , 6 .

وفى التجربة الأولى كانت النواتج التي يمكن الحصول عليها هي صورة H أو كتابة T وفى التجربة الثانية كانت النواتج التي يمكن الحصول عليها هـــي $1,2,3,4,5,6$ ومجموعــة النواتج التي يمكن الحصول عليها في أي تجربة عشـــوائية يطلق عليها اسم فضـــاء العينــة أو فراغ العينة .

تعريف ٢ : فضاء العينة (فراغ العينة) **Sample Space**

فضاء العينة لتجربة عشوائية هو مجموعة كل النواتج الممكنة للتجربة العشـــــوائية ويرمز لـــه بالرمز S وعدد عناصر فضاء العينة S يرمز له $n(S)$.

مثـــال ٢ :

في هذا المثال نوضح فضاء العينة لبعض التجارب العشوائية

– في تجربة إلقاء عملة معدنية مرة واحدة فإن فضاء العينة يكون $S = \{H, T\}$
ونلاحظ أن عدد عناصر فضاء العينة لهذه التجربة $n(S) = 2$.

– في تجربة إلقاء عملة معدنية مرتين فإن فضاء العينة يكون $S = \{HH, HT, TH, TT\}$
ونلاحظ أن عدد عناصر فضاء العينة لهذه التجربة $n(S) = 4$.

– في تجربـــة إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات على التوالي فإن فضاء العينـــة S يكون

$$S = \{ HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT \}$$

ونلاحظ أن عدد عناصر فضاء العينة لهذه التجربة $n(S) = 8$.

– في تجربة إلقـــاء حجر نرد مرة واحدة فإن فضاء العينة يكون

$$S = \{1,2,3,4,5,6\}$$

ونلاحظ أن عدد عناصر فضاء العينة لهذه التجربة $n(S) = 6$.

– في تجربة إلقاء عملة معدنية وحجر نرد على التوالي فإن فضاء العينة يكون

$$S = \{ H1, H2, H3, H4, H5, H6, T1, T2, T3, T4, T5, T6 \}$$

ونلاحظ أن عدد عناصر فضاء العينة لهذه التجربة $n(S) = 12$.

– في تجربة سحب ورقة من أوراق اللعب " أوراق كوتشينة عادية " فإن فضاء العينة يتكون من 52 عنصر وذلك لان عدد أوراق الكوتشينة يساوى 52 ورقة .

وفضاء العينة ينقسم إلى ثلاثة أنواع حسب عدد عناصره

النوع الأول : فضاء عينة منتهى **Finite Sample Space**

وفى هذه الحالة فإن فضاء العينة يحتوى على عدد منتهى من العناصر .

النوع الثاني : فضاء عينة لانهائي قابل للعد **Countable Infinite Sample Space**

وفى هذه الحالة فإن فضاء العينة يحتوى على عدد لا نهائى من العناصر لكنه قابل للعد .

النوع الثالث: فضاء عينة لانهائي وغير قابل للعد **Uncountable Infinite S . Space**

وفى هذه الحالة فإن فضاء العينة يحتوى على عدد لا نهائى من العناصر ولكنه غير قابل للعد .

تعريف ٣ : الأحداث الأولية (البسيطة) **Elementary Events**

كل ناتج أو عنصر من فضاء العينة S لأي تجربة عشوائية يسمى حدث أولي أو حدث بسيط .

مثـــال ٣ :

- في تجربة إلقاء عملة معدنية مرة واحدة فإن الأحداث الأوليـــة هي **H , T** .
- في تجربة إلقاء عملة معدنية مرتين فإن الأحداث الأوليـــة هي **HH, HT, TH, TT** .
- في تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة فإن الأحداث الأوليـــة هي **1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6** .

تعريف ٤ : الحدث المركب **Compound Event**

الحدث المركب هـــو اتحاد أي عدد من الأحداث البسيطة .

تعريف ٥ : الحدث **Event**

الحدث هو مجموعة جزئية من فضاء العينة S لأي تجربة عشوائيـــة ولذلك يســمى حدث عشوائي ويرمز للحدث بأحد الرموز الكبيرة $A , B , C , \ldots$ أو $A_1 , A_2 , A_3 , \ldots$ ونقول أن الحدث قد وقع أو ظهر إذا ظهر أحد عنـــاصره عند أجراء التجربة .

وحيث أن المجموعة الخالية Φ هي مجموعة جزئيـــة مـــن أي مجموعـــة ، أي أن $\Phi \subset S$ وبالتالي فإن المجموعة الخالية Φ تمثل حدث يسمى الحدث المستحيل **Impossible Event** وهي الحالة التي لا يكون فيها للتجربة أي نواتج وهذا بالطبع مستحيل لذلك سمـــي بـــالحدث المستحيل وكذلك حيث أن أي مجموعة هي مجموعة جزئية من نفسها , أي أن $S \subseteq S$ وبالتالي فإن فضاء العينة S يمثل حدث يسمى الحدث المؤكـد **Sure Event** وقـــد تم تسميته بالحدث المؤكد لأنه عند إجراء التجربة فلابد وان يظهر أحد عناصر فضاء العينة S . ومجموعة كل الأحداث التي يمكن تكوينها من فضاء العينة S ، أي مجموعة القوة من S تمثـل فضاء يسمى فضاء الحوادث ويرمز له $\rho(S)$. وفي حالة فضاء عينة S محدود يحتوى على n عنصر فإن فضاء الحوادث $\rho(S)$ يحتوى على 2^n حدث .

مثـــال ٤ :

في تجربة إلقاء حجر النرد مرة واحدة فقط فإن فضاء العينة $S = \{1,2,3,4,5,6\}$

- الحدث A ظهور عدد زوجي يكون $A = \{2,4,6\}$
- الحدث B ظهور عدد فردي يكون $B = \{1,3,5\}$
- الحدث C ظهور عدد يقبل القسمة على 3 يكون $C = \{3,6\}$
- الحدث D ظهور عدد أكبر من 6 يكون $D = \Phi$ وهو حدث مستحيل .
- الحدث E ظهور عدد اقل من 7 يكون $E = S$ وهو حدث مؤكد .

مثـــال ٥ :

في تجربـــة إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات على التوالي فإن فضاء العينـــة S يكون

$$S = \{ HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT \}$$

- الحدث A_1 ظهور الصورة مرتين فقط هو

$$A_1 = \{HHT, HTH, THH\}$$

- الحدث A_2 ظهور الصورة مرة واحدة على الأقل هو

$$A_2 = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH\}$$

- الحدث A_3 ظهور الصورة مرة واحدة على الأكثر هو

$$A_3 = \{HTT, THT, TTH, TTT\}$$

- الحدث A_4 ظهور الصورة مرتين على الأكثر هو

$$A_4 = \{HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$$

مثـــال ٦ :

في تجربة إلقاء حجري نرد متميزين فإن فضاء العينـــة يحتوى على ٣٦ عنصر كما هو موضح

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

- الحدث A_1 ظهور الرقم 3 على وجه حجر النرد الأول هو

$$A_1 = \{(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6)\}$$

- الحدث A_2 ظهور الرقم 3 على وجه حجر النرد الثاني هو

$$A_2 = \{(1,3),(2,3),(3,3),(4,3),(5,3),(6,3)\}$$

- الحدث A_3 ظهور الرقم 3 على أحد حجري النرد

$$A_3 = \{(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(1,3),(2,3),(4,3),(5,3),(6,3)\}$$

- الحدث A_4 ظهور نفس الرقم على حجري النرد

$$A_4 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$$

- الحدث A_5 أن يكون مجموع العددين الظاهرين يساوى 7 هو

$$A_5 = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$$

- الحدث A_6 أن يكون مجموع العددين الظاهرين أقل من 4 هو

$$A_6 = \{(1,1),(1,2),(2,1)\}$$

مثـــال ٧ :

صندوق يحتوى على 10 كرات مرقمة من 1 إلى 10 منها 6 كرات حمراء و الباقية بيضاء .

١ – إذا كانت التجربة هي سحب كرة عشوائياً من الصندوق وبفرض أن الكرات الحمـراء تم ترقيمها من 1 إلى 6 والكرات البيضاء تم ترقيمها من 7 إلى 10 فإن فضاء العينة S_1 يكون

$$S_1 = \{1,2,3, \ldots ,10\} \quad , \quad n(S_1) = 10$$

والحدث A أن تكون الكرة المسحوبة حمراء يكون $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ والحـدث B أن تكون الكرة المسحوبة بيضاء يكون $B = \{7,8,9,10\}$.

٢ – إذا كانت التجربة هي سحب كرتين عشوائياً من الصندوق بحيث يتم إرجـــاع الكـرة الأولى المسحوبة قبل سحب الكرة الثانية فإن فضاء العينة S_2 يكون

$$S_2 = S_1 \times S_1 = \{(a,b) : \ a,b \in S_1\} \quad , \quad n(S_2) = 100$$

والحدث C أن تكون الكرة المسحوبة أولاً بيضاء يكون

$$C = \{(a,b) : \ a \in \{7,8,9,10\} \ , \ b \in S_1\} \quad , \quad n(C) = 40$$

والحدث D أن تكون الكرة المسحوبة ثانياً حمراء يكون

$$D = \{(a,b) : \ a \in S_1 \ , \ b \in \{1,2,3,4,5,6\}\} \quad , \quad n(D) = 60$$

والحدث E أن تكون كل من الكرتين بيضاء هو

$$E = \{(a,b) : \ a , b \in \{7,8,9,10\}\} \quad , \quad n(C) = 16$$

٣ – إذا كانت التجربة هي سحب كرتين عشوائياً من الصندوق بحيث لا يتم إرجاع الكـــرة الأولى المسحوبة قبل سحب الكرة الثانية فإن فضاء العينة S_3 يكون

$$S_3 = S_1 \times S_1 = \{(a,b) : \ a,b \in S_1 \ , \ a \neq b\} \quad , \quad n(S_3) = 90$$

والأحداث C , D , E المشار أليها في 2 تكون كالآتي :

$$C = \{(a,b) : a \in \{7,8,9,10\} \ , b \in S_1 \ , a \neq b\} \ , \ n(C) = 40 - 4 = 36$$

$$D = \{(a,b) : a \in S_1 \ , b \in \{1,2,3,4,5,6\} \ , a \neq b\} \ , \ n(D) = 54$$

$$E = \{(a,b) : \ a , b \in \{7,8,9,10\} , a \neq b\} \quad , \quad n(C) = 12$$

مثـــال ٨ :

للعائلات التي لديها طفلان بفرض أن الرمز b يعنى ولداً والرمز g يعنى بنتـــاً فإنـــه مـــع مراعاة الأسبقية في الولادة فإن فضاء العينة يكون

$$S=\{bb, bg, gb, gg\}$$

– إذا كان الحدث A_1 يعنى عدم وجود ولد للعائلة فإن $A_1 = \{ gg \}$

– إذا كان الحدث A_2 يعنى وجود ولد واحد على الأقل في العائلة فإن

$A_2 = \{ bb , bg , gb \}$

– إذا كان الحدث A_3 يعنى وجود ولد واحد على الأكثر في العائلة فإن

$A_3 = \{ bg , gb , gg \}$

– إذا كان الحدث A_4 يعنى أن المولود الثاني بنت فإن

$A_4 = \{ bg , gg \}$

وللعائلات التي لديها ثلاثة أطفال فإنه مع مراعاة الأسبقية في الولادة فإن فضاء العينة يكون

$$S = \{ bbb , bbg , bgb , bgg , gbb , gbg , ggb , ggg \}$$

وفي هذه الحالة فإن الأحداث A_1 , A_2 , A_3 , A_4 السابقة تكون كالآتي :

$A_1 = \{ ggg \}$

$A_2 = \{ bbb , bbg , bgb , bgg , gbb , gbg , ggb \}$

$A_3 = \{ bgg , gbg , ggb , ggg \}$

$A_4 = \{ bgb , bgg , ggb , ggg \}$

مثـــال ٩ :

في تجربة اختيار عددا عشوائيا من مجموعة الأعداد الطبيعية $\{1,2,3, \ldots ,1000\}$ فـإن فضاء العينة S هو $S = \{1,2,3, \ldots ,1000\}$ وعدد عناصره $n(S) = 1000$

- الحدث A اختيار عدد زوجي يكون $A = \{ 2m : 1 \le m \le 500 \}$
  وعدد عناصره $n(A) = 500$
- الحدث B اختيار عدد فردي يكون $B = \{ 2m-1 : 1 \le m \le 500 \}$
  وعدد عناصره $n(B) = 500$.
- الحدث C اختيار عدد يقبل القسمة على 3 يكون $C = \{ 3m : 1 \le m \le 333 \}$
  وعدد عناصره $n(C) = 333$.

مثـــال ١٠ :

في تجربة سحب قطعتي نقود معدنيتين معاً عشوائياً من كيس يحتوى على قطع نقود متماثلة بـــه عدد 2 قطعة نقود من فئة 25 قرش ، 3 قطع من فئة 20 قرش ، قطعة واحدة من فـــة 10 قروش وأربعة قطع من فئة 5 قروش . عين فضاء العينة للتجربة ثم وضح كل من الأحـــداث الآتية :

١ – أن يكون جملة المبلغ المسحوب 30 قرش بالضبط .

٢ – أن يكون جملة المبلغ المسحوب أكبر من 30 قرش .

٣ – أن يكون جملة المبلغ المسحوب أكبر من 30 قرش وأقل من 50 قرش .

٤ – أن يكون جملة المبلغ المسحوب 30 قرش على الأقل .

٥ – أن يكون جملة المبلغ المسحوب 30 قرش على الأكثر .

الحل :

نفرض الحدث Q سحب قطعة نقود من فئة 25 قرش والحدث W سحب قطعة نقود مـــن فئة 20 قرش والحدث T سحب قطعة نقود من فئة 10 قروش والحدث F سحب قطعـــة نقود من فئة 5 قروش . إذن عند سحب قطعتي نقود معدنيتين معاً عشوائياً فإن فضاء العينــــة للتجربة يكون

$$S = \{ QQ , QW, QT, QF, WW, WT, WF, TF, FF \}$$

١ – الحدث أن يكون جملة المبلغ المسحوب 30 قرش بالضبط هو

$\{QF , WT \}$

٢ – الحدث أن يكون جملة المبلغ المسحوب أكبر من 30 قرش هو

$\{ QQ , QW, QT , WW \}$

٣ – الحدث أن يكون جملة المبلغ المسحوب أكبر من 30 قرش وأقل من 50 قرش هو

$\{QW , QT , WW \}$

٤ – الحدث أن يكون جملة المبلغ المسحوب 30 قرش على الأقل هو

$\{ QQ , QW, QT , QF , WW, WT \}$

٥ – الحدث أن يكون جملة المبلغ المسحوب 30 قرش على الأكثر هو

$\{ QF , WT, WF, TF, FF \}$

مثـــال ١١ :

مجموعة متماثلة من ١٢ كارت ملون بها 3 كروت حمراء ، 3 كروت زرقـــاء ، 3 كـــروت بيضاء ، 3 كروت خضراء . ثلاثة أشخاص قام كل منهم على التوالي بسحب كارت عشوائياً من مجموعة الكروت اكتب فضاء عينة مناسب لهذه التجربة وأوصف كل من الأحداث الآتية :

١ – الكروت مع الأشخاص الثلاثة من اللون الأحمر .

٢ – الكروت مع الأشخاص الثلاثة من نفس اللون.

٣ – الكروت مع الأشخاص الثلاثة مختلفة الألوان .

الحل : نفرض r ترمز إلى كارت لونه احمر ، b ترمز إلى كارت لونه ازرق ، w ترمـــز إلى كارت لونه ابيض ، g ترمز إلى كارت لونه اخضر . إذن فضاء العينة S لتجربة قيام كــــل من الأشخاص الثلاثة على التوالي بسحب كارت عشوائياً من مجموعة الكروت يكون

$$S = \{ (x_1 , x_2 , x_3) : \ x_i \in \{ r , b , w , g \} , \ i = 1 , 2 , 3 \}$$

١ – نفرض الحدث A أن الكروت مع الأشخاص الثلاثة حمراء ، إذن $A = \{ (r,r,r) \}$

٢ – نفرض الحدث B أن الكروت مع الأشخاص الثلاثة من نفس اللون ، إذن

$$B = \{ (x_1 , x_2 , x_3) : \ x_1 = x_2 = x_3 \ , \ x_i \in \{ r , b , w , g \} , \ i = 1 , 2 , 3 \ \}$$

٣ – نفرض الحدث C أن الكروت مع الأشخاص الثلاثة مختلفة الألوان ، إذن

$$C = \{ (x_1 , x_2 , x_3) : \ x_1 \neq x_2 \neq x_3 \ , \ x_i \in \{ r , b , w , g \} , \ i = 1 , 2 , 3 \ \}$$

مثـــال ١٢:

مخزن للأجهزة الكهربائية به 30 جهاز راديو ، أراد أمين المخزن التحقق من صلاحية الأجـــهزة ومعرفة ما إذا كانت تعمل أو لا تعمل . أكتب فضاء عينة مناسب لهذه التجربة ووضح الحدث A أن كل الأجهزة تعمل والحدث B أن كل الاجهزة لا تعمل وكذلك الحـــدث C أن أول خمسة أجهزة فحصهم كانت لا تعمل بينما باقى الاجهزة تعمل .

الحل : نفرض أن x_i يرمز إلى الجهاز رقم i حيث $1 \le i \le 30$ وبفرض أن الرقـــم 0 يرمز إلى أن الجهاز لا يعمل والرقم 1 يرمز إلى أن الجهاز يعمل ، إذن يمكن تعريف فضاء عينة S للتجربـــة بـــــالصورة $S=\{(x_1 , x_2 , \ \dots \ , x_{30}): \ x_i \in\{0,1\} , 0\le i\le 30 \}$

إذن الحدث A هو $A = \{ (1,1, \ \dots \ , 1) \}$ والحدث B هـــو $B = \{ (0,0, \ \dots \ ,0) \}$

والحدث C هو $C = \{ (0,0,0,0,0,1,1, \ \dots \ ,1) \}$.

مثـــال ١٣ :

مصباحين كهربائيين وضعا في اختبار لمعرفة مدى صلاحية كل منهم وبفرض أن فترة التشـــغيل لكل منهم لن تتعدى 1600 ساعة ، عرف فضاء عينة مناسب لهذه التجربة وأوصف كل مـــن الأحداث الآتية :

١ – كل من المصباحين يكون غير صالح للعمل في اقل من 1000 ساعة .

٢ – كل من المصباحين يستمر صالح للعمل بعد 1000 ساعة .

٣ – أقل عمر لأياً من المصباحين يكون 1000 ساعة .

٤ – اكبر عمر لأياً من المصباحين يكون 1200 ساعة .

الحـــل :

نفرض أن x_i يرمز إلى فترة التشغيل للمصباح الكهربي رقـــم i حيـــث $1 \le i \le 2$
إذن يمكن تعريف فضاء العينة S للتجربة بالصورة

$$S = \{ (x_1 , x_2) : \ x_1 \le 1600 \ , \ x_2 \le 1600 \}$$

١ – نفرض الحدث A هو أن كل من المصباحين يكون غير صالح للعمل في اقل من 1000 ساعة ، إذن

$$A = \{ (x_1 , x_2) : \ x_1 \le 1000 \ , \ x_2 \le 1000 \}$$

٢ – نفرض الحدث B هو أن كل من المصباحين يستمر صالح للعمل بعد 1000 ساعة ، إذن

$$B = \{ (x_1 , x_2) : \ 1000 \le x_1 \le 1600 \ , \ 1000 \le x_2 \le 1000 \}$$

٣ – نفرض الحدث C أن أقل عمر لأياً من المصباحين يكون 1000 ساعة ، إذن

$$C = \{ (x_1 , x_2) : \ x_1 = 1000 \le x_2 \le 1600 \quad \text{OR} \quad x_2 = 1000 \le x_1 \le 1600 \}$$

٤ – نفرض الحدث D أن اكبر عمر لأيا من المصباحين يكون 1200 ساعة ، إذن

$$D = \{ (x_1 , x_2) : \ x_1 \le x_2 = 1200 \ \text{OR} \quad x_2 \le x_1 = 1200 \}$$

مثـــال ١٤ :

بائع جرائد يبدأ يوميا عمله ومعه 40 جريدة ، عرف فضاء عينة مناسب لتجربة معرفة أعداد الجرائد التي يبيعها في يومين متتاليين وأوصف كل من الأحداث الآتية :

١ – بيع 5 جرائد على الأقل في اليوم الأول .

٢ – بيع 5 جرائد على الأقل في اليوم الثاني .

٣ – بيع 5 جرائد على الأقل في كل من اليومين .

٤– عدد الجرائد التى تم بيعها في اليوم الثاني أكثر من التى تم بيعها في اليوم الأول .

٥– مجموع ما تم بيعه في اليومين اكبر من 60 جريدة .

الحـــل :

نفرض أن x_1 يرمز إلى عدد الجرائد التي يبيعها في اليوم الأول ، x_2 يرمز إلى عدد الجرائد التي يبيعها في اليوم الثاني . إذن يمكن تعريف فضاء العينة S للتجربة بالصورة

$$S = \{ (x_1, x_2) : \quad 0 \le x_1 \le 40 \quad , \quad 0 \le x_2 \le 40 \}$$

١ – نفرض الحدث A هو بيع 5 جرائد على الأقل في اليوم الأول ، إذن

$$A = \{ (x_1, x_2) : \quad 5 \le x_1 \le 40 \quad , \quad 0 \le x_2 \le 40 \}$$

٢ – نفرض الحدث B هو بيع 5 جرائد على الأقل في اليوم الثاني ، إذن

$$B = \{ (x_1, x_2) : \quad 0 \le x_1 \le 40 \quad , \quad 5 \le x_2 \le 40 \}$$

٣ – نفرض الحدث C هو بيع 5 جرائد على الأقل في كل من اليومين ، إذن

$$C = A \cap B = \{ (x_1, x_2) : \quad 5 \le x_1 \le 40 \quad , \quad 5 \le x_2 \le 40 \}$$

٤ – نفرض الحدث D هو أن عدد الجرائد التى تم بيعها في اليوم الثاني أكثر من التى تم بيعها في اليوم الأول ، إذن

$$D = \{ (x_1, x_2) : \quad 0 \le x_1 \le x_2 \le 40 \}$$

٥– نفرض الحدث E هو أن مجموع ما تم بيعه في اليومين اكبر من 60 جريدة ، إذن

$$E = \{ (x_1, x_2) : \quad 60 < x_1 + x_2 \le 80 \}$$

مثـــال ١٥ :

حافلة للركاب (أتوبيس Bus) تتسع لعدد 34 راكب ، تتوقف الحافلة في محطــة كليــة التربية ما بين الساعة السابعة 7:00 والساعة السابعة والنصف 7:30 صباحا من كل يـوم . نفرض التجربة العشوائية التى تتكون من رصد عدد الركاب الموجود في الحافلة وقياس وقـــت وصول الحافلة إلى محطة كلية التربية . أكتب فضاء عينة مناسب لهذه التجربة ووضح كل مــن الأحداث الآتية :

١ – الحافلة تصل إلى المحطة وبها عدد 29 راكب ما بين الساعة السابعة والربع 7:15 والساعة السابعة والنصف 7:30 .

٢– الحافلة تصل إلى المحطة الساعة السابعة والثلث 7:20 .

٣– الحافلة تصل إلى المحطة الساعة السابعة والثلث 7:20 وبها عدد 26 راكب.

الحـــل :

فضاء العينة S للتجربة العشوائية التى تتكون من رصد عدد الركاب الموجــــود في الحافلــة وقياس وقت وصول الحافلة إلى محطة كلية التربية يمكن التعبير عنه بالصورة الآتية

$$S = \{ (i,t) : \ 0 \le i \le 34 \quad , \quad 7 \le t \le 7\frac{1}{2} \ \}$$

والرمز i يمثل عدد الركاب في الحافلة في وقت الوصول إلى المحطة والزمن يعبر عنه بالرمز t وهو مقاس بالساعات وكسورها .

١ – نفرض الحدث A هو أن الحافلة تصل إلى المحطة وبها 29 راكب ما بين الساعة 7:15 والساعة 7:30 . إذن

$$A = \{ (29,t) : \quad 7\frac{1}{4} \le t \le 7\frac{1}{2} \ \}$$

٢– نفرض الحدث B هو أن الحافلة تصل إلى المحطة الساعة السابعة والثلث 7:20. إذن

$$B = \{ (i,7\frac{1}{3}) : \ 0 \le i \le 34 \ \}$$

٣– نفرض الحدث C هو أن الحافلة تصل إلى المحطة الساعة السابعة والثلث 7:20 وبها عدد 26 راكب. إذن

$$C = \{ (26,7\frac{1}{3}) \}$$

ملاحظة هامة :

التمثيل المختلف لنواتج التجربة العشوائية يمكن أن يؤدي إلى تمثيل مختلف لفضاء العينة للتجربة العشوائية نفسها

في المثال السابق كانت التجربة العشوائية تتكون من رصد عدد الركاب الموجود في الحافلة وقياس وقت وصول الحافلة إلى محطة كلية التربية ، وعناصر فضاء العينة لهذه التجربة تم تمثيلها بأزواج مرتبة (i,t) حيث الرمز i يمثل عدد الركاب في الحافلة في وقت الوصول إلى المحطة والرمز t يعبر عن زمن الوصول إلى المحطة وهذا الزمن مقاس بالساعات وكسورها ، وبناء على ذلك فإن فضاء العينة S للتجربة العشوائية تم التعبير عنه بالصورة

$$S = \{ (i,t) : \quad 0 \le i \le 34 \quad , \quad 7 \le t \le 7\frac{1}{2} \ \}$$

والآن إذا مثلنا عناصر فضاء العينة لهذه التجربة بأزواج مرتبة (i,t) حيث t هي عدد الدقائق بعد الساعة السابعة التي تصل فيها الحافلة إلى المحطة وبها عدد i من الركاب ، فبناء على ذلك فإن فضاء العينة S^* لنفس التجربة العشوائية يمكن التعبير عنه بالصورة

$$S^* = \{ (i,t) : \quad 0 \le i \le 34 \quad , \quad 0 \le t \le 30 \ \}$$

ونتيجة لذلك فإن الأحداث A , B , C في المثال السابق يمكن التعبير عنها كالآتي :

١ - الحدث A وهو أن الحافلة تصل إلى المحطة وبها 29 راكب ما بين الساعة 7:15 والساعة 7:30 أي أنها تصل ما بين 15 إلى 30 دقيقة بعد السابعة يكون

$$A = \{ (29,t) : \quad 15 \le t \le 30 \ \}$$

٢- الحدث B وهو أن الحافلة تصل إلى المحطة الساعة 7:20 أي بعد 20 دقيقة من السابعة

$$B = \{ (i,20) : \quad 0 \le i \le 34 \ \}$$

٣- الحدث C وهو أن الحافلة تصل إلى المحطة وبها عدد 26 راكب الساعة 7:20 أي بعد 20 دقيقة من السابعة

$$C = \{ (26,20) \}$$

مثال ١٦ :

نفرض تجربة قياس العمر الافتراضي للمصابيح الكهربائية التي تنتجها أحد المصانع . أكتب فضاء عينة مناسب لهذه التجربة ووضح كل من الأحداث الآتية :

١ – الحدث أن المصباح الكهربائي يكون صالح لمدة 200 ساعة على الأقل .

٢ – الحدث أن المصباح الكهربائي يكون صالح لمدة 1000 ساعة على الأكثر .

٣ – الحدث أن المصباح الكهربائي يكون صالح لمدة 465 ساعة بالضبط .

٤ – الحدث أن المصباح الكهربائي يكون صالح لمدة تتراوح بين 400 ساعة و 600 ساعة .

الحل :

العمر الافتراضي للمصابيح الكهربائية يقاس بالساعات وكسورها ، إذن فضاء العينة S لهذه التجربة يكون $S = \{ x : x \geq 0 \}$ حيث x عدد حقيقي غير سالب يمثل الزمن مقاس بالساعات وكسورها من دقائق وثواني .

١ – الحدث A_1 أن المصباح الكهربائي يكون صالح لمدة 200 ساعة على الأقل .

$$A_1 = \{ x : x \geq 200 \}$$

٢ – الحدث A_2 أن المصباح الكهربائي يكون صالح لمدة 1000 ساعة على الأكثر

$$A_2 = \{ x : x \leq 1000 \}$$

٣ – الحدث A_3 أن المصباح الكهربائي يكون صالح لمدة 465 ساعة بالضبط $A_3 = \{465\}$

٤ – الحدث A_4 أن المصباح الكهربائي يكون صالح لمدة تتراوح بين 400 و 600 ساعة

$$A_4 = \{ x : 400 \leq x \leq 600 \}$$

مثال ١٧ :

في تجربة إلقاء عملة معدنية باستمرار وحساب عدد المرات اللازمة حتى يظهر وجه الصورة لأول مرة فإن فضاء العينة لهذه التجربة يكون $S=\{1,2,3, \ldots ,\infty\}$ حيث الرمز ∞ يمثل حالة عدم ظهور الصورة على الإطلاق على الرغم من إلقاء قطعة النقود عدد لانهائي من المرات ، وفى هذه التجربة فإن فضاء العينة يكون لا نهائي قابل للعد وكل حدث أولى في S يمثل عدد مرات إلقاء العملة المعدنية حتى يظهر وجه الصورة لأول مرة ، فمثلا الحدث $A = \{46\}$ يعنى ظهور وجه الصورة لأول مرة في الرمية رقم 46 ، وهذه التجربة تعتبر مثالا لفضاء عينة لانهائي قابل للعد **Countable Infinite Sample Space** .

مثال ١٨ :

في هذا المثال نوضح بعض التجارب العشوائية التي يكون فيها فضاء العينة لانهائي وغير قـــابل للعد **Uncountable Infinite Sample Space** .

– تجربة اختيار نقطة بطريقة عشوائية من الفترة $[a , b]$ على خط الأعداد ، وفضاء العينة في هذه التجربة يكون $S = \{ x : a \le x \le b \}$

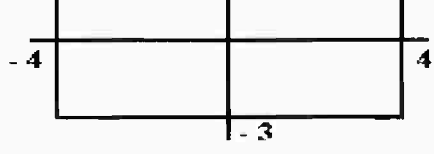
فمثلا في تجربة اختيار نقطة بطريقة عشوائية من الفترة $]0,15[$ فإن فضاء العينة في هذه التجربة يكون $S = \{ x : 0 < x < 15 \}$ والحدث A أن يتم اختيار عدد صحيح هو

$$A = \{ 1 , 2 , 3 , \ \dots \ , 14 \}$$

– تجربة اختيار نقطة بطريقة عشوائية داخل دائرة في المســـتوى مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها r ، وفضاء العينة في هذه التجربة يكون

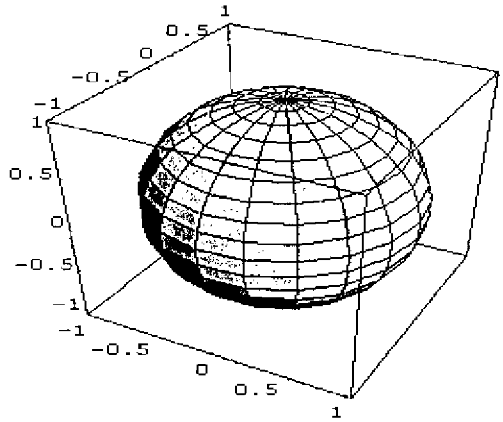
$$S = \{ (x,y) : x^2 + y^2 < r \}$$

– تجربة اختيار نقطة بطريقة عشوائية على محيط أو داخل المســـتطيل المحـــدود بالمســـتقيمات $x=\pm 4$, $y=\pm 3$ ، وفضاء العينة في هذه التجربة يكون



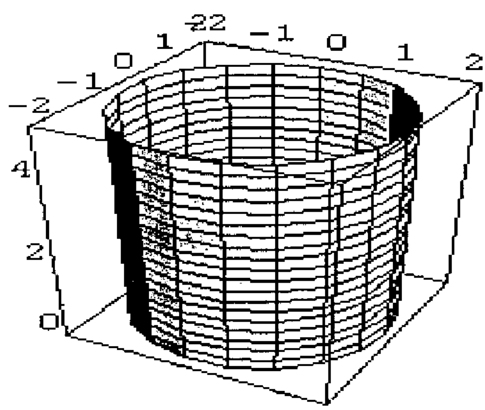
$$S = \{ (x,y) : -4 \le x \le 4 \ , \ -3 \le y \le 3 \}$$

– تجربة اختيار نقطة بطريقة عشوائية داخل كرة في الفراغ مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها 1 ، وفضاء العينة في هذه التجربة يكون



$$S = \{ (x,y,z) \ : \ x^2 + y^2 + z^2 < 1 \}$$

– تجربة اختيار نقطة بطريقة عشوائية على أو داخل سطح الاسطوانة $x^2 + y^2 = 4$ في الفراغ والمحدودة بالمستويات $z = 5$, $z = 0$ ، وفضاء العينة في هذه التجربة يكون



$$S = \{ (x,y,z) : x^2 + y^2 \le 4 \ , \ 0 \le z \le 5 \}$$

٣ - الأشجار البيانية Tree Diagrams

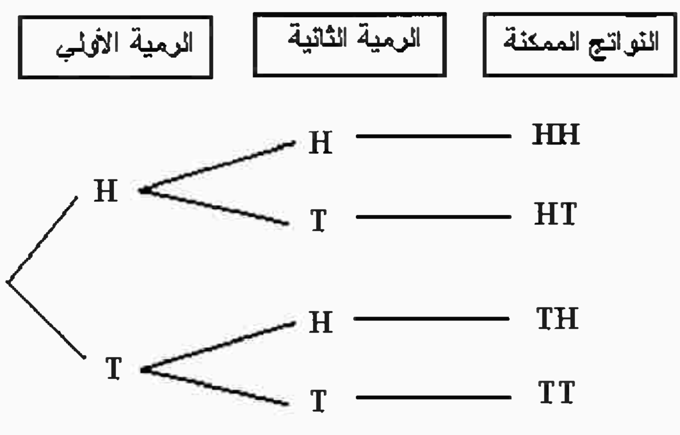
الشجرة البيانية هي طريقة مفيدة تستعمل لحصر كل المشاهدات أو النواتج التي يمكن ظهورها عند أجراء متتابعة من التجارب حيث كل تجربة منها تقع بعدد منته من الطرق وتتكون الشجرة البيانية من عدد من الأفرع توضح النواتج التي يمكن الحصول عليها في التجارب التي يتم تنفيذها ويمكن مباشرة قراءة النواتج النهائية الممكنة والتي تُمثل عدد عناصر فضاء العينة وذلك من النقاط النهائية على الأفرع المختلفة للشجرة . والأمثلة الآتية توضح فائدة الشجرة البيانية وكيفية تركيبها وبالتالي كيفية الحصول على عدد عناصر فضاء العينة .

مثال ١٩ :

في تجربة إلقاء عملة معدنية مرتين على التوالي فإن فضاء العينة يكون

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}$$

ويمكن الحصول على فضاء العينة من الشجرة البيانية الموضحة



ونلاحظ أن الشجرة تم تركيبها من اليسار إلى اليمين وان عدد الأفرع في كل نقطة يكافئ عدد النواتج الممكنة للتجربة التالية ، والعدد الكلى للنواتج الممكنة وبالتالي عدد عناصر فضاء العينة يساوى عدد نقاط النهاية لفروع الشجرة البيانية ، وفي هذا المثال نلاحظ أن عدد نقاط النهاية لفروع الشجرة البيانية يساوى 4 لذلك $n(S) = 4$.

مثـــال ٢٠ :

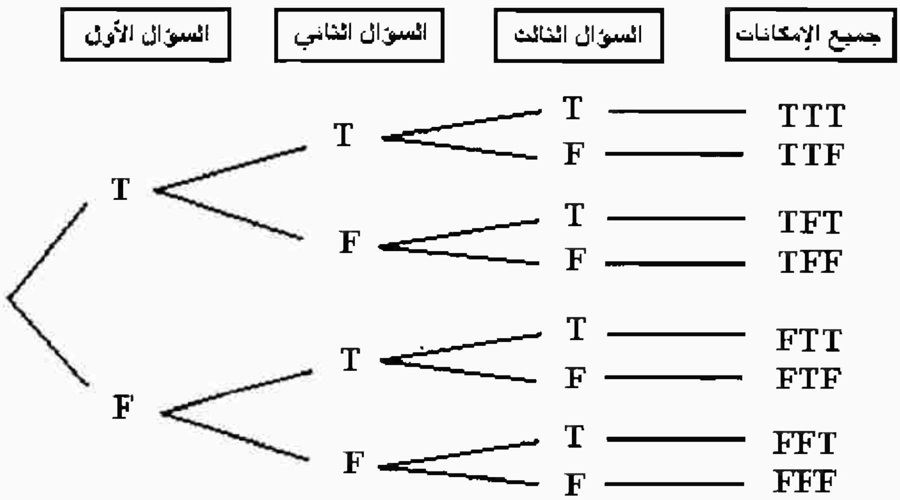
اختبار من ثلاثة أسئلة كل سؤال يتم الإجابة عليه أما صواب T أو خطأ F . أرسم شجرة بيانية توضح جميع الإمكانات المتاحة للإجابة على الاختبار ثم عبر عن كل من الأحداث الآتية :

١ – الإجابة صواب على سؤال على الأكثر .

٢ – الإجابة صواب على سؤالين على الأقل .

٣ – الإجابة صواب على سؤالين على الأكثر .

الحـــل :



الشجرة البيانية توضح جميع الإمكانات المتاحة للإجابة على الاختبار ويمكن مباشـــرة قـــراءة النواتج النهائية الممكنة والتي تُمثل عدد عناصر فضاء العينة وذلك من على الأفرع المختلفـــة للشجرة . إذن فضاء العينة S الذي يمثل جميع الإمكانات المتاحة للإجابة على الاختبار يكون

$$S = \{ TTT , TTF , TFT , TFF , FTT , FTF , FFT , FFF \}$$

١ – الحدث الإجابة صواب على سؤال على الأكثر هو

$$\{ TFF , FTF , FFT , FFF \}$$

٢ – الحدث الإجابة صواب على سؤالين على الأقل هو

$$\{ TTT , TTF , TFT , FTT \}$$

٣ – الحدث الإجابة صواب على سؤالين على الأكثر هو

$$\{ TTF , TFT , TFF , FTT , FTF , FFT , FFF \}$$

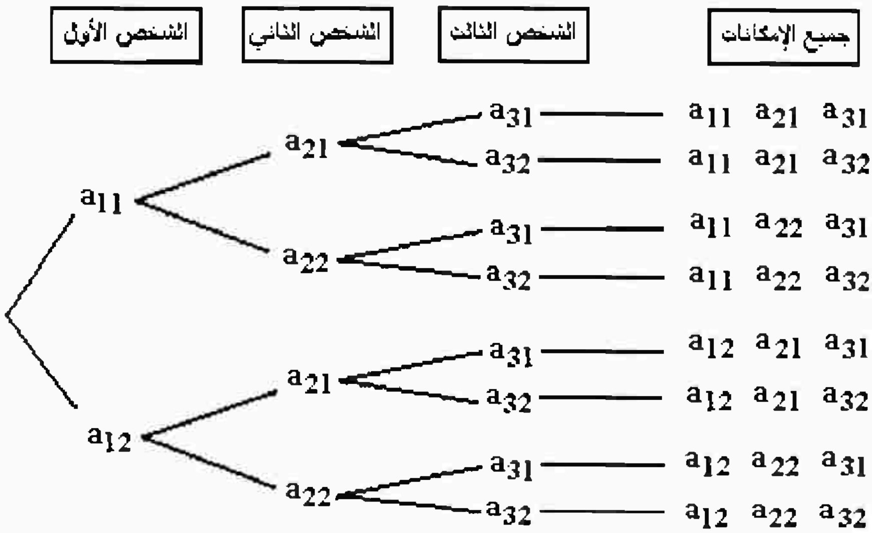
مثـــال ٢١ :

يوجد ثلاثة أشخاص بمحطة مترو وعند وصول قطار مترو من عربتان صعد الأشخاص الثلاثـــة إلى القطار . ارسم شجرة بيانية توضح جميع الإمكانات المتاحة لصعود الأشخاص الثلاثـــة إلى عربتي القطار ، ووضح الحدث صعود شخص واحد على الأقل في كل عربة .

الحـــل :

نفرض أن a_{ij} تعنى أن الشخص رقم i صعد إلى العربة رقم j حيث

$$1 \le i \le 3 \quad , \quad 1 \le j \le 2$$



الشجرة البيانية توضح جميع الإمكانات المتاحة ونلاحظ انه توجد 8 نقاط نهائية مـــن علـــى الأفرع المختلفة للشجرة وكل نقطة منها تُمثل أحد الإمكانات المتاحـــة . إذن فضـــاء العينـــة لتجربة صعود الأشخاص الثلاثة إلى عربتي القطار يكون

$$S = \{a_{11}\, a_{21}\, a_{31} , a_{11}\, a_{21}\, a_{32} , a_{11}\, a_{22}\, a_{31} , a_{11}\, a_{22}\, a_{32} ,$$
$$a_{12}\, a_{21}\, a_{31} , a_{12}\, a_{21}\, a_{32} , a_{12}\, a_{22}\, a_{31} , a_{12}\, a_{22}\, a_{32} \}$$

والحدث صعود شخص واحد على الأقل في كل عربة هو مكملة الحدث صعـــود الأشـــخاص الثلاثة في عربة واحدة $\{a_{11}\, a_{21}\, a_{31} , a_{12}\, a_{22}\, a_{32}\}'$ أي أنه الحدث

$$\{ a_{11}\, a_{21}\, a_{32} , a_{11}\, a_{22}\, a_{31} , a_{11}\, a_{22}\, a_{32} , a_{12}\, a_{21}\, a_{31} , a_{12}\, a_{21}\, a_{32} , a_{12}\, a_{22}\, a_{31} \}$$

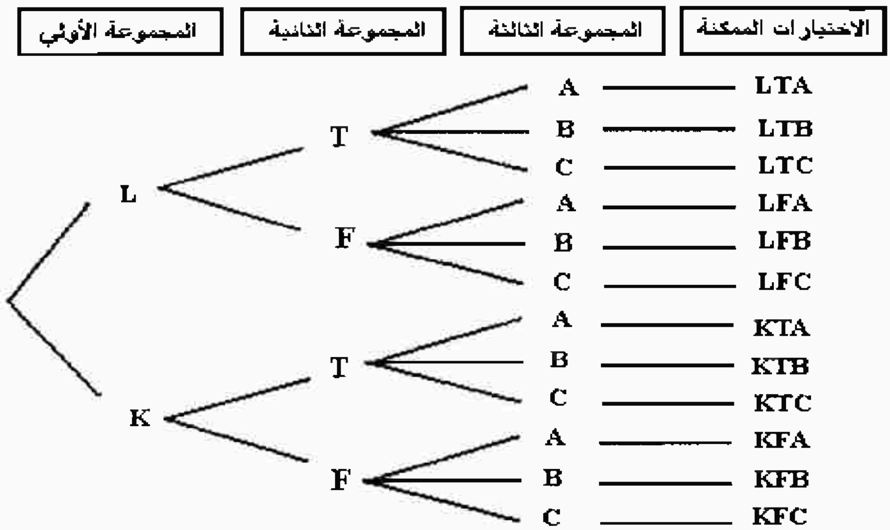
مثـــال ٢٢ :

في أحد الفنادق كان حجز الغرف يتم وفقا للاختيار من الثلاث مجموعات الموضحة بالجدول

المجموعة الأولى (عدد الآسرة)	المجموعة الثانية (الموقع)	المجموعة الثالثة (الطابق)
غرفة بسرير واحد L	تطل على البحر T	الطابق الأول A
غرفة بسريرين K	لا تطل على البحر F	الطابق الثاني B
		الطابق الثالث C

ارسم شجرة بيانية توضح جميع الاختيارات الممكنة واكتب فضاء العينة ، ثم وضـــح الحـــدث حجز جناح بسريرين يطل على البحر .

الحـــل :



الشجرة البيانية توضح جميع الاختيارات الممكنة ونلاحظ انه توجد 12 نقطة نهائية من علـــى الأفرع المختلفة للشجرة وكل نقطة منها تُمثل أحد الاختيارات الممكنة . إذن فضاء العينة

$$S = \{ LTA , LTB , LTC , LFA , LFB , LFC , KTA , KTB , KTC , KFA , KFB , KFC \}$$

والحدث حجز جناح بسريرين يطل على البحر هو الحدث $\{KTA, KTB, KTC\}$.

مثـــال ٢٣ :

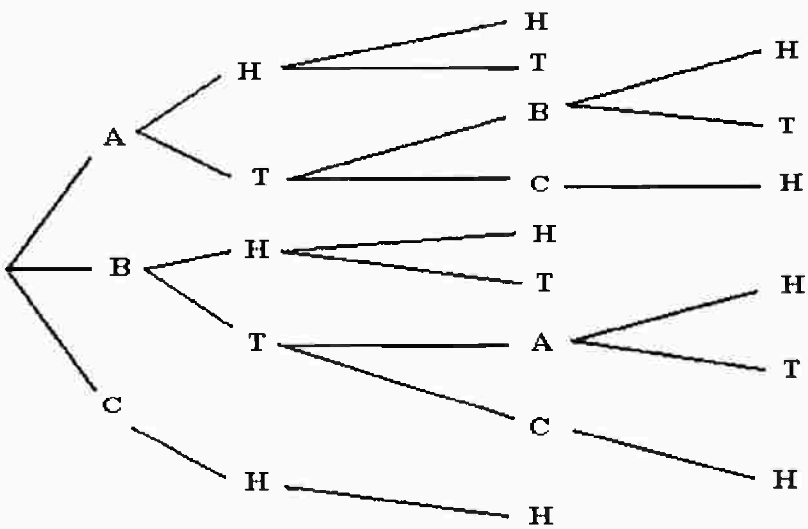
كيس يحتوى على ثلاث قطع نقود اثنتان عاديتان وواحدة ذات صورتين ، اختيرت قطعة مـــن الكيس بطريقة عشوائية ثم ألقيت ، إذا ظهر وجه الصورة فإن القطعة نفسها تلقى مرة أخـــرى بينما إذا ظهر وجه الكتابة فإنه يتم اختيار قطعة نقود من القطعتين المتبقيتين بالكيس ثم تلقـــى . ارسم شجرة بيانية للتجربة واكتب فضاء العينة ، ثم اكتب عناصر كل من الأحداث الآتية :

١ - الحدث ظهور الصورة مرتين .

٢ - الحدث عدم ظهور الصورة .

الحـــل :

نفرض أن A , B يرمزان إلى قطعتي النقود العاديتين ، C ترمز إلى قطعة النقود ذات الصورتين



الشجرة البيانية توضح جميع الإمكانات للتجربة ونلاحظ انه توجد 11 نقطة نهائية من علـــى الأفرع المختلفة للشجرة وكل نقطة منها تُمثل أحد النواتج الممكنة للتجربة . إذن فضاء العينة

$$S = \{ AHH\ ,\ AHT\ ,\ ATBH\ ,\ ATBT\ ,\ ATCH\ ,\ BHH\ ,\ BHT\ ,\ BTAH\ ,\ BTAT\ ,\ BTCH\ ,\ CHH \}$$

١ - الحدث ظهور الصورة مرتين يكون $\{ AHH\ ,\ BHH\ ,\ CHH \}$

٢ - الحدث عدم ظهور الصورة يكون $\{ ATBT\ ,\ BTAT \}$.

مثـــال ٢٤ :

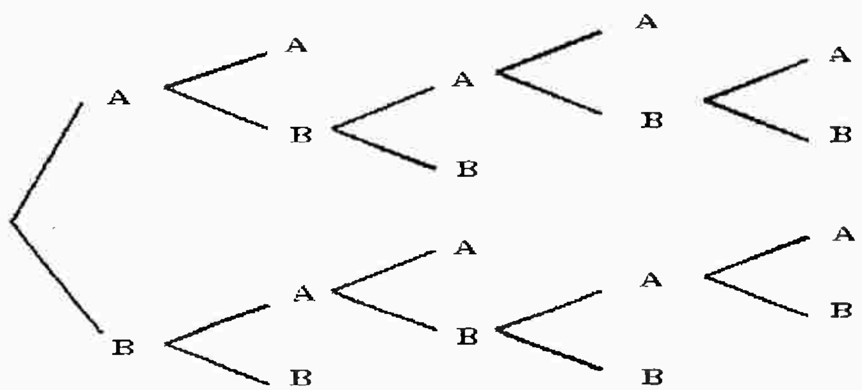
في مباراة للتنس بين لاعبين A , B يفوز بالمباراة اللاعب الذي يفوز بشوطين متتــــــاليين أو يفوز بثلاثة أشواط على طول المباراة . كون الشجرة البيانية التي تمثل جميع النواتـــج الممكنـــة للمباراة ، واكتب عناصر كل من الأحداث الآتية :

١ – الحدث أن المباراة تنتهي بعد خمسة أشواط .

٢ – الحدث أن اللاعب A يفوز بالمباراة .

الحـــل :

نفرض أن الحدث A يعني فوز اللاعب A وأن الحدث B يعني فوز اللاعب B



الشجرة البيانية توضح جميع النواتج الممكنة للمباراة ويمكن مباشرة قراءة النواتــــج النهائيـــة الممكنة والتي تمثل عدد عناصر فضاء العينة وذلك من على الأفرع المختلفة للشـــجرة حيـــث نلاحظ انه توجد عشر نقاط نهائية ، كل نقطة منهم تُمثل أحد النواتـــج العشـــــرة الممكنـــة للمباراة . إذن فضاء العينة S الذي يُمثل جميع النواتج الممكنة للمباراة

$$S = \{ AA , ABAA , ABABA , ABABB , ABB , BAA , BABAA , BABAB , BABB , BB \}$$

١ – الحدث أن المباراة تنتهي بعد خمسة أشواط هو

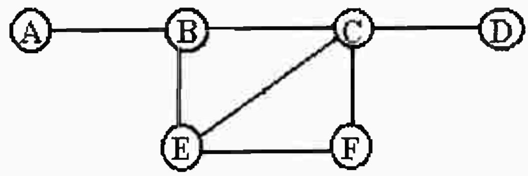
$$\{ ABABA , ABABB , BABAA , BABAB \}$$

٢ – الحدث أن اللاعب A يفوز بالمباراة هو

$$\{ AA , ABAA , ABABA , BAA , BABAA \}$$

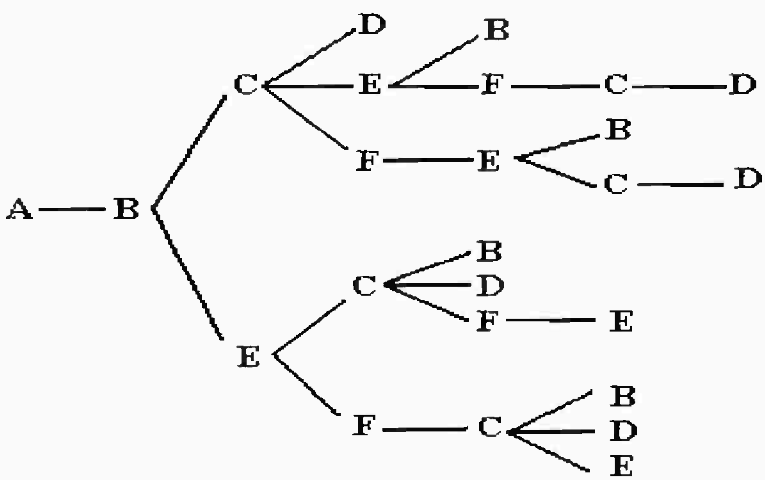
مثـــال ٢٥ :

النقاط A , B , C , D , E , F في الرسم الآتي تدل على 6 مدن والخطوط تدل على



جسور تربط بينها . بدأ رجل من المدينة A رحلة بسيارته للتجول من مدينة إلى أخرى واعــتزم التوقف واخذ استراحة إذا لم يُمكنه مواصلة التجول بدون أن يعبر نفس الجسر مرتين . أوجـد عدد الطرق التي يمكنه التجول بها بين المدن قبل أن يتوقف للاستراحة .

الحـــل :



نلاحظ من الشجرة البيانية أنه توجد 11 طريقة يمكن للرجل أن يتجول بها حـــتى يصـــل إلى جسر مر عليه من قبل ويكون مضطر للعبور عليه مرة ثانية وبالتالي يأخذ استراحة ،كما نلاحظ من الشجرة في النقاط النهائية أنه يجب أن يتوقف للاستراحة في أحد المدن B أو D أو E .

إذن فضاء العينة

S = { ABCD, ABCEB, ABCEFCD, ABCFEB, ABCFECD, ABECB, ABECD, ABECFE, ABEFCB, ABEFCD, ABEFCE}

مثـــال ٢٦ :

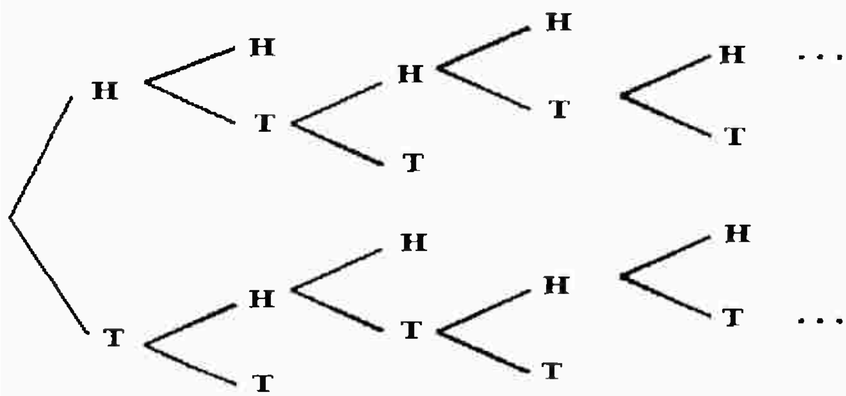
في تجربة إلقاء عملة معدنيـــة باستمرار حتى نحصل على نفس الوجه مرتين متتاليتين ، عـــرف فضاء العينة للتجربة وأوجد كل من الأحداث الآتية :

١ – الحدث إنهاء التجربة بعد إلقاء العملة للمرة الثالثة .

٢– الحدث إنهاء التجربة قبل الرمية الخامسة .

٣– الحدث أن تستمر التجربة أربع رميات على الأكثر .

الحـــل :



فضاء العينة في هذه التجربة لا نهائي قابل للعد ويكون

S = { HH,TT,HTT,THH,HTHH,THTT,HTHTT,THTHH , . . . }

١ – نفرض الحدث A هو أن تنتهي التجربة بعد إلقاء العملة للمرة الثالثة أي انه بعد إلقـــاء العملة للمرة الثالثة يتحقق ظهور نفس الوجه مرتين متتاليتين ، إذن

A = { HTT,THH }

٢– نفرض الحدث B هو أن تنتهي التجربة قبل الرمية الخامسة ، أي أن الحـــدث B هـــو ظهور نفس الوجه مرتين متتاليتين قبل الرمية الخامسة ، إذن

B = { HH,TT,HTT,THH,HTHH,THTT }

٣– نفرض الحدث C هو أن تستمر التجربة أربع رميات على الأكثر ، أي أن الحدث C هو أن تنتهي التجربة بعد إلقاء العملة مرتين أو ثلاث أو أربع مرات ، إذن

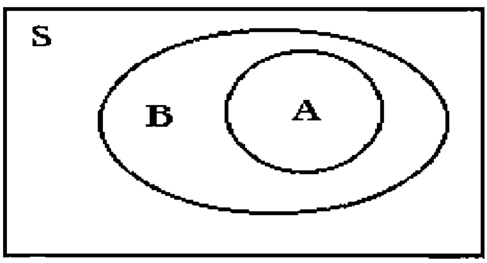
C = { HH,TT,HTT,THH,HTHH,THTT }

٣ - الأحداث ونظرية المجموعات Events and Set Theory

في دراستنا لنظرية الاحتمال فإن العلاقات بين الأحداث المختلفة للتجربة العشوائية تلعب دوراً رئيسياً في هذه الدراسة وسوف نتعرف الآن على هذه العلاقات وكيفية التعبير عنها باستخدام المجموعات وكذلك سوف نستخدم أشكال فن لتمثيل العلاقات بين الأحداث وفضاء العينة S للتجربة العشوائية حيث نستخدم شكل المستطيل لتمثيل فضاء العينة S ونستخدم الدوائر أو أي أشكال هندسية أخرى داخل S لتمثل الأحداث المرتبطة بالتجربة كما سيتضح من خلال التعريفات الآتية :

تعريف ٦ :

الحدث A يقال انه مجموعة جزئية من الحدث B إذا كان جميع الأحداث الأولية المكونة للحدث A موجودة داخل الحدث B وبلغة المجموعات يتم التعبير عن ذلك بالصورة $A \subseteq B$ أي أن A محتواه في B وهذا يعنى أن وقوع الحدث A يتضمن وقوع الحدث B وبمعنى آخر أنه إذا وقع الحدث A فإن الحدث B يقع ايضاً



شكل فن يوضح $A \subset B$ حيث نلاحظ
أن الحدث A داخل الحدث B

تعريف ٧ :

الحدثان A , B يقال انهما متساويان إذا كان وقوع الحدث A يؤدى إلى وقوع الحدث B ووقوع الحدث B يؤدى الى وقوع الحدث A وبلغة المجموعات يتم التعبير عن ذلك بالصورة

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad A \subseteq B \;\; , \;\; B \subseteq A$$

تعريف ٨ :

يقال أن حدث ما هو تقاطع حدثان A , B إذا كان هذا الحدث يقع فقط عندما يقع A , B معاً في نفس الوقت وبلغة المجموعات يرمز له

$$A \cap B$$

لأنه يحتوى على الأحداث الأولية المشتركة بين A , B وبمعنى آخر $A \cap B$ يرمز لوقوع الحدثان معاً.

تعريف ٩ :

يقال أن حدث ما هو اتحاد حدثان A , B إذا كان هذا الحدث يقع عندما يقع على الأقل واحد من A أو B وبلغة المجموعات يرمز له

$$A \cup B$$

لأنه يحتوى على الأحداث الأولية في A أو B أو كليهما وبمعنى آخر $A \cup B$ يرمز لوقوع إحدى الحدثان على الأقل .

تعريف ١٠ :

يقال أن حدث ما هو مكملة الحدث A إذا كان هذا الحدث يقع فقط عندما لا يقع A ويرمز لمكملة الحدث A بالرمز A' ومن الواضح أن A' يتكون من عناصر S التى لا تنتمى إلى A ، أي أن

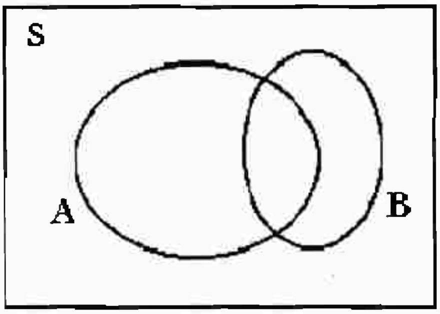
$$A' = S - A$$

تعريف ١١ :

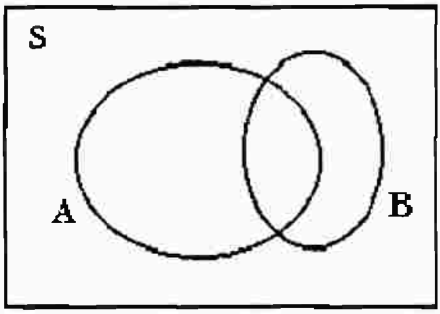
الفرق بين حدثان A , B هو حدث يرمز له $A - B$ وهو يتكون من عناصر A والتى لا تنتمى إلى B ، أي أن $A - B$ يرمز لوقوع A وعدم وقوع B وهو يقع فقط عندما يقع A , B' معاً في نفس الوقت وبلغة المجموعات يعرف بالصورة

$$A - B = A \cap B'$$

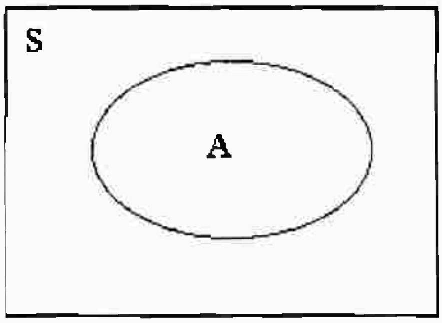
نفرض الحدثان A , B من فضاء العينة S لتجربة عشوائية . العمليـــــات على الأحداث (التقاطع – الاتحاد – المكملة – الفرق) موضحة في أشكال فن الآتية :



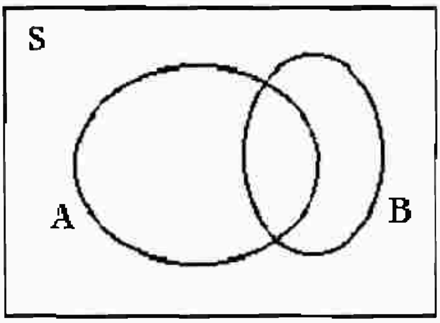
الجزء المظلل يمثل الحدث $A \cup B$



الجزء المظلل يمثل الحدث $A \cap B$



الجزء المظلل يمثل الحدث A'



الجزء المظلل يمثل الحدث $A - B$

مثـــال ٢٧ :

في تجربة إلقاء قطعة نقود معدنية مرتين على التوالي لملاحظة ظهور الصورة ، فإن فضاء العينة

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}$$

وإذا كان الحدث A هو ظهور الصورة مرة واحدة على الأقل والحدث B هو ظهور الصـــورة مرتين بالضبط فإن

$$A = \{HH, HT, TH\} \quad , \quad B = \{HH\}$$

$$A \cup B = \{HH, HT, TH\} = A \quad , \quad A \cap B = \{HH\} = B$$

$$A' = \{TT\} \quad , \quad A - B = \{HT, TH\}$$

مثـــال ٢٨ :

في تجربة إلقاء حجر النرد مرة واحدة فقط فإن فضاء العينة $S = \{1,2,3,4,5,6\}$ وإذا كـــان الحدث A هو ظهور عدد زوجي ، الحدث B هو ظهور عدد فردي والحدث C هو ظـــهور عدد يقبل القسمة على 3 فإن $A=\{2,4,6\}$, $B=\{1,3,5\}$, $C=\{3,6\}$

– الحدث وقوع B و C هو $B \cap C$ ويعنى ظهور عدد فردى ويقبل القســـمة علـــى 3 وهو يقع إذا وقع B , C في آن واحد ونلاحظ أن $B \cap C = \{3\}$.

– الحدث وقوع B أو C هو $B \cup C$ ويعنى ظهور عدد فردى أو عدد يقبل القسمة على 3 وهو يقع إذا وقع B أو C أو كليهما ونلاحظ أن $B \cup C = \{1,3,5,6\}$.

– الحدث B' هو $B' = S - B = \{2,4,6\} = A$.

– الحدث $A - C$ نحصل عليه من $A - C = A \cap C'$ وحيث أن $C' = \{1,2,4,5\}$ ، إذن

$$A - C = \{2,4,6\} \cap \{1,2,4,5\} = \{2,4\}$$

مثـــال ٢٩ :

في تجربة إلقاء قطعة نقود معدنية 4 مرات على التوالي لملاحظـــة ظـــهور الصـــورة ، إذا كان الحدث A هو ظهور الصورة 3 مرات على الأقل ، الحدث B هو ظهور الصورة مرتين على الأكثر والحدث C هو ظهور الصورة مرتين بالضبط أوجد فضاء العينة للتجربة ووضح كل من الأحداث $A \cap B$, $B \cap C$, A' , B' , $A - B$, $B - C$.

الحـــل :

فضاء العينة S للتجربة والأحداث A , B , C تكون

$$S = \{HHHH, HHHT, HHTH, HHTT, HTHH, HTHT, HTTH, HTTT, THHH, THHT, THTH, THTT, TTHH, TTHT, TTTH, TTTT\}$$

$$A = \{HHHH, HHHT, HHTH, HTHH, THHH\}$$

$$B = \{HHTT, HTHT, HTTH, HTTT, THHT, THTH, THTT, TTHH, TTHT, TTTH, TTTT\}$$

$$C = \{HHTT, HTHT, HTTH, THHT, THTH, TTHH\}$$

إذن

$$A \cap B = \Phi \quad , \quad B \cap C = C \quad , \quad A - B = A$$

$$B' = \{HHHH, HHHT, HHTH, HTHH, THHH\}$$

$$B - C = \{HTTT, THTT, TTHT, TTTH, TTTT\}$$

مثـــال ٣٠ :

في أحد المطارات الدولية المزدحمة يتم اختيار سيارات الأجرة التي يأخذها الركاب وفقاً لـترتيب وصولها إلى المطار. نفرض الحدث A وجود 5 سيارات على الأقل تنتظـــر دورهـــا لتـــأخذ الركاب ، الحدث B وجود 3 سيارات على الأكثر والحدث C يوجد سيارتين بـــالضبط .

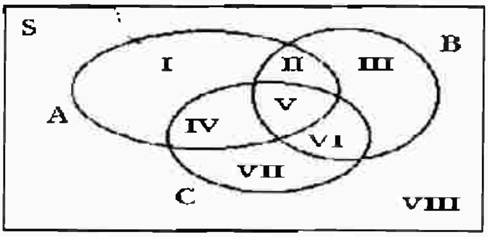
عبر عن كل من الأحداث الآتية :

$$A' \ , \ B' \ , \ A-B \ , \ B\cap C \ , \ A\cap B \ , \ A\cap C \ , \ B\cap C' , \ A\cap C'$$

الحـــل :

- حيث أن الحدث A هو وجود 5 سيارات على الأقل فإن A' هو الحـــدث وجـــود 4 سيارات على الأكثر تنتظر دورها لتأخذ الركاب .
- حيث أن الحدث B وجود 3 سيارات على الأكثر فإن B' هـــو الحـــدث وجـــود 4 سيارات على الأقل تنتظر دورها لتأخذ الركاب .
- الحدث $A-B$ هو الحدث $A\cap B'$ وحيث أنه إذا وقع الحدث A والـــذى يُمثـــل وجود 5 سيارات على الأقل فإن الحدث B' والذى يُمثل وجود 4 سيارات على الأقل يقع ايضاً ، إذن $A\subseteq B'$ وبالتالي ينتج أن $A\cap B' = A$.
- حيث أنه إذا وقع الحدث C فإن B يقع ايضاً ، أي أن $C\subseteq B$ وبالتالي $B\cap C = C$.
- الحدثان A , B لا يوجد وقوع مشترك بينهما أي أن $A\cap B = \Phi$.
- الحدثان A , C لا يوجد وقوع مشترك بينهما أي أن $A\cap C = \Phi$.
- حيث أن الحدث B هو وجود 3 سيارات على الأكثر أي وجود عـــدد 0 ، 1 ، 2 أو 3 من السيارات تنتظر دورها لتأخذ الركاب وحيث أن الحدث C هـــو وجـــود ســـيارتين بالضبط فإن الحدث C' هو وجود أي عدد من السيارات لا يساوى 2 وبالتـــالي فـــإن الحدث $B\cap C'$ هو الحدث وجود عدد 0 ، 1 أو 3 من السيارات تنتظر دورها لتأخذ الركاب .
- حيث أن الحدث A هو وجود 5 سيارات على الأقل أي وجود عدد n من الســـــيارات تنتظر دورها لتأخذ الركاب حيث $n \geq 5$ وحيث أن الحدث C' هو وجود أي عـــدد من السيارات لا يساوى 2 أي $n \neq 2$ وبالتالي فإن الحدث $A\cap C'$ هـــو الحـــدث وجود عدد n من السيارات تنتظر دورها لتأخذ الركاب حيث $n \geq 5$.

وعند التعامل مع ثلاثة أحداث A , B , C من فضاء عينة S ولكي نتمكن من توضيح جميع العلاقات بينها فإنه يفضل في بعض الأحيان استخدام شكل فن الآتى :



ونقوم بإعطاء رقم لكل منطقة بالشكل وهذا يمكننا من مناقشة الأحداث المختلفة ، فمثلا

الحدث $A \cap B \cap C$ يمثله المنطقة V

الحدث $A \cup (B \cap C)$ يمثله المناطق I , II , IV , V , VI

الحدث $(A \cup B) \cap C$ يمثله المناطق IV , V , VI

الحدث $(A \cup B)'$ يمثله المناطق $VII , VIII$

وفائدة أشكال فن لا تقتصر فقط على توضيح العلاقة بين الأحداث وإنما يمكن استخدامها في التعرف على عدد العناصر في الأحداث المختلفة ، حيث يتم كتابة العدد الممثل لعدد العناصر داخل المنطقة الممثلة للحدث .

والأحداث $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$, $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ يتم تعريفها بنفس طريقة تعريف $A_1 \cap A_2$, $A_1 \cup A_2$ فمثلا إذا كان $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ مجموعة من الأحداث فإن $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ هو الحدث الذى يتكون من عناصر واحد على الأقل من الأحداث $A_1, A_2, \ldots, A_n$ وهو يرمز لوقوع حدث واحد على الأقل من هذه الأحداث ، أي أن الحدث $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ يقع عندما يقع واحد على الأقل من الأحداث $A_i \; , \; 1 \le i \le n$.

وأيضا $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ هو الحدث الذى يتكون من العناصر المشتركة بين الأحداث $A_1, A_2, \ldots, A_n$ وهو يرمز لوقوع جميع هذه الأحداث معاً ، أي أن الحدث $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ يقع فقط عندما يقع كل من الأحداث $A_i \; , \; 1 \le i \le n$.

ومن معرفتنا للمجموعات فإن الاتحاد والتقاطع والمكملة يحقق العديد من العلاقات المفيدة عند تطبيقها على الأحداث وفى الجدول الآتى نعرض قائمة من القوانين التى يمكن تطبيقها على أى أحداث A , B , C من فضاء عينة S لتجربة عشوائية ما

اسم القانون	علاقات مفيدة بين الأحداث
قوانين اللانمو **Idempotent Laws**	$A \cup A = A$ $A \cap A = A$
قوانين الإبدال **Commutative Laws**	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
قوانين الدمج **Associative Laws**	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
قوانين التوزيع **Distributive Laws**	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
قوانين الوحدة **Identity Laws**	$A \cup \Phi = A \quad , \quad A \cap S = A$ $A \cup S = S \quad , \quad A \cap \Phi = \Phi$
قوانين المكملة **Complement Laws**	$A \cup A' = S \quad , \quad A \cap A' = \Phi$ $S' = \Phi \quad , \quad \Phi' = S \quad , \quad A'' = A$
قوانين ديمورجان **De Morgan's Laws**	$(A \cup B)' = A' \cap B'$ $(A \cap B)' = A' \cup B'$

ويمكن تطبيق قوانين ديمورجان لأي عدد منتهى أو لانهائى من الأحداث فبوجه عام

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right)' = \bigcap_{i=1}^{n} A_i' \quad , \quad \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right)' = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i'$$

$$\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i \right)' = \bigcup_{i=1}^{n} A_i' \quad , \quad \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \right)' = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i'$$

وجميع هذه القوانين بالإضافة إلى قوانين أخرى يمكن إثباتها باستخدام طريقة انتماء العنصر كما في المجموعات مع الأخذ في الاعتبار أن العنصر في هذه الحالة هو حدث أولى وتعتمد الفكرة

الأساسية كما في المجموعات على أن الأحداث في طرفي المعادلة تتكون من نفس الأحداث الأولية . أي أن الأحداث الأولية التي تنتمي إلى الحدث على يسار المعادلة تنتمي أيضا إلى الحدث على يمين المعادلة والعكس صحيح .

مثال ٣١ :

لأي حدثان B , A وباستخدام طريقة انتماء العنصر اثبت صحة قانون ديمورجان

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

الحل : من شرط تساوى حدثان نحاول إثبات

$$1-(A \cup B)' \subseteq A' \cap B'$$
$$2-\ A' \cap B' \subseteq (A \cup B)'$$

ولإثبات (1)

نفرض الحدث الأولي x حيث $x \in (A \cup B)'$

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B)' &\Rightarrow x \notin A \cup B \\ &\Rightarrow x \notin A \quad \wedge \quad x \notin B \\ &\Rightarrow x \in A' \quad \wedge \quad x \in B' \\ &\Rightarrow x \in A' \cap B' \end{aligned}$$

وبالتالي ينتج أن $(A \cup B)' \subseteq A' \cap B'$

ولإثبات (2)

نفرض الحدث الأولي x حيث $x \in A' \cap B'$

$$\begin{aligned} x \in A' \cap B' &\Rightarrow x \in A' \quad \wedge \quad x \in B' \\ &\Rightarrow x \notin A \quad \wedge \quad x \notin B \\ &\Rightarrow x \notin A \cup B \\ &\Rightarrow x \in (A \cup B)' \end{aligned}$$

وبالتالي ينتج أن $A' \cap B' \subseteq (A \cup B)'$

إذن لأي حدثان B , A يتحقق قانون ديمورجان

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

نظرية ١ : إذا كان A , B حدثان من فضاء عينة S فإن عدد عناصر $A \cup B$ يكون

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

وإذا كانت A , B , C ثلاث أحداث فإن

$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) = {} & n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) \\ & - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

وبالمثل يمكن حساب عدد عناصر الحدث وقوع واحد على الأقل مـــن الأحـــداث الأربعـــة A_1 , A_2 , A_3 , A_4 أي حساب $n(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)$ ويكون بالصورة

$$\begin{aligned} n(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = {} & n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) + n(A_4) \\ & - n(A_1 \cap A_2) - n(A_1 \cap A_3) - n(A_1 \cap A_4) - n(A_2 \cap A_3) \\ & - n(A_2 \cap A_4) - n(A_3 \cap A_4) + n(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + n(A_1 \cap A_2 \cap A_4) \\ & + n(A_1 \cap A_3 \cap A_4) + n(A_2 \cap A_3 \cap A_4) - n(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) \end{aligned}$$

أي في الصورة

$$\begin{aligned} n\left(\bigcup_{i=1}^{4} A_i\right) = {} & \sum_{i=1}^{4} n(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le 4} n(A_i \cap A_j) \\ & + \sum_{1 \le i < j < k \le 4} n(A_i \cap A_j \cap A_k) - n\left(\bigcap_{i=1}^{4} A_i\right) \end{aligned}$$

وبوجه عام لحساب عدد عناصر الحـــدث وقـــوع واحـــد علـــى الأقـــل مـــن الأحـــداث $A_1, A_2, \dots, A_m$ أي لحساب $n\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right)$ نوجد أولاً جميـــع التقاطعـــات الممكنة لأحداث من $A_1, A_2, \dots, A_m$ ونحسب عدد عناصر كل منها ، وبعد ذلـــك نضيف عدد عناصر التقاطعات التي تتكون من عدد فردى من الأحداث ونطرح منـــها عـــدد عناصر التقاطعات التي تتكون من عدد زوجي من الأحداث أي أن

$$n\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) = \sum_{i=1}^{m} n(A_i) - \sum_{1\le i<j\le m} n\left(A_i \cap A_j\right)$$
$$+ \sum_{1\le i<j<k\le m} n\left(A_i \cap A_j \cap A_k\right) + \ldots + (-1)^{m+1}\, n\left(\bigcap_{i=1}^{m} A_i\right)$$

وتعرف هذه العلاقة بقاعدة التضمين والاستثناء inclusion – exclusion principle .

والآن نفرض $1 \le i \le m$, A_i أحداث من فضاء العينة S لتجربة عشوائية ما .

إذن عدد عناصر الحدث عدم وقوع A_i لكل $1 \le i \le m$ يكون

$$n\left(\bigcap_{i=1}^{m} A_i'\right) = n\left(\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right)'\right)$$
$$= n(S) - n\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right)$$

ومن قاعدة التضمين والاستثناء نحسب $n\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right)$. وبالتالي نحصل على $n\left(\bigcap_{i=1}^{m} A_i'\right)$

مثـال ٣٢ :

نفرض $1 \le k \le 4$ $\forall$ A_k أحداث من فضاء العينة S لتجربة عشوائية ما بحيث أن

$$n(S) = 2^5 \quad , \quad n(A_k) = k! \quad \forall \quad 1 \le k \le 4$$
$$n(A_i \cap A_j) = n(A_i) \quad \forall \quad 1 \le i < j \le 4$$
$$n(A_i \cap A_j \cap A_k) = n(A_i) \quad \forall \quad 1 \le i < j < k \le 4$$
$$n(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = n(A_1)$$

أوجد عدد عناصر الحدث عدم وقوع A_k لكل $1 \le k \le 4$.

الحـل :

المطلوب هو $n\left(\bigcap_{k=1}^{4} A_k'\right)$ وحيث أن

$$n(A_k) = k! \quad \forall \quad 1 \le k \le 4$$

إذن

$$n(A_1)=1 \quad , \quad n(A_2)=2 \quad , \quad n(A_3)=6 \quad , \quad n(A_4)=24$$

وحيث أن

$$n(A_i \cap A_j) = n(A_i) \qquad \forall \quad 1 \le i < j \le 4$$

إذن

$$n(A_1 \cap A_2) = 1 \quad , \quad n(A_1 \cap A_3) = 1 \quad , \quad n(A_1 \cap A_4) = 1$$
$$n(A_2 \cap A_3) = 2 \quad , \quad n(A_2 \cap A_4) = 2 \quad , \quad n(A_3 \cap A_4) = 6$$

وحيث أن

$$n(A_i \cap A_j \cap A_k) = n(A_i) \qquad \forall \quad 1 \le i < j < k \le 4$$

إذن

$$n(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 1 \quad , \quad n(A_1 \cap A_2 \cap A_4) = 1 \quad ,$$
$$n(A_1 \cap A_3 \cap A_4) = 1 \quad , \quad n(A_2 \cap A_3 \cap A_4) = 2 \quad ,$$
$$n(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = n(A_1) = 1$$

ومن قاعدة التضمين والاستثناء فإن

$$n\left(\bigcup_{i=1}^{4} A_i\right) = \sum_{i=1}^{4} n(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le 4} n\left(A_i \cap A_j\right)$$
$$+ \sum_{1 \le i < j < k \le 4} n\left(A_i \cap A_j \cap A_k\right) - n\left(\bigcap_{i=1}^{4} A_i\right)$$

$$= (1+2+6+24) - (1+1+1+2+2+6)$$
$$+ (1+1+1+2) - 1$$
$$= 24$$

إذن

$$n\left(\bigcap_{k=1}^{4} A'_k\right) = n(S) - n\left(\bigcup_{k=1}^{4} A_k\right)$$
$$= 2^5 - 24$$
$$= 8$$

مثـــال ٣٣ :

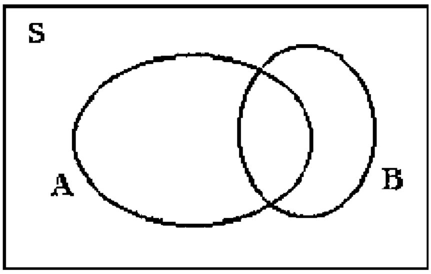
نفرض الحدثان A , B من فضاء العينة S لتجربة عشوائية . عبر عن ثم كون شكل فـــن لكل من الأحداث الآتية :

١ – الحدث أن يقع A ولا يقع B أي أن A فقط هو الذى يقع .

٢ – الحدث أن يقع A أو B وليس كلاهما ، أي وقوع أحد الحدثان فقط .

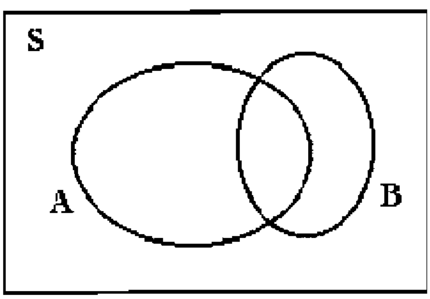
الحـــل :

١ –



حيث أن الحدث A يقع بينما الحدث B لا يقع ، إذن نظلل الجزء من A الموجود خارج B كما موضح بشكل فن ، وحيث أن عدم وقوع B يعنى وقوع المكملة B' إذن الحدث أن يقع A ولا يقع B هو الحدث وقوع B' , A معاً ، أي انه الحدث $A \cap B'$.

٢ –



حيث أن الحدث أن يقع A أو B وليس كلاهما يكافئ الحدث وقوع A بينما B لا يقـــع أو وقوع B بينما A لا يقع كما يوضحه الجزء المظلل في شكل فن . وحيث أن وقـــوع A بينما B لا يقع هو الحدث $A \cap B'$ ووقوع B بينما A لا يقع هو الحدث $A' \cap B$ إذن الحدث أن يقع A أو B وليس كلاهما هو الحدث $(A \cap B') \cup (A' \cap B)$.

مثـــال ٣٤ :

نفرض الأحداث C , B , A من فضاء العينة S لتجربة عشوائية . عبر عن ثم كون شـكل فن لكل من الأحداث الآتية :

١ - الحدث وقوع A فقط .

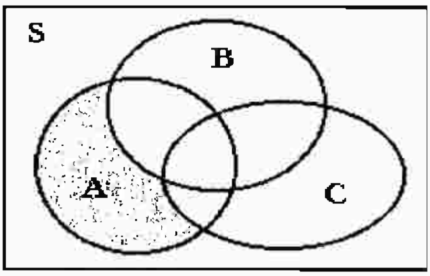
٢ - الحدث وقوع A و B و C معاً .

٣ - الحدث وقوع A و B وعدم وقوع C .

٤ - الحدث وقوع A أو B وعدم وقوع C .

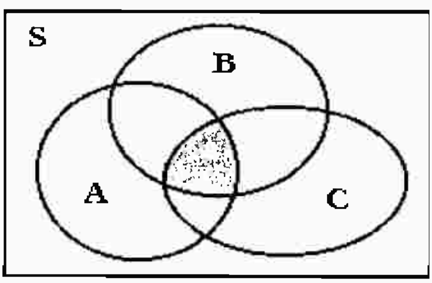
الحـــل :

١ - الحدث وقوع A فقط



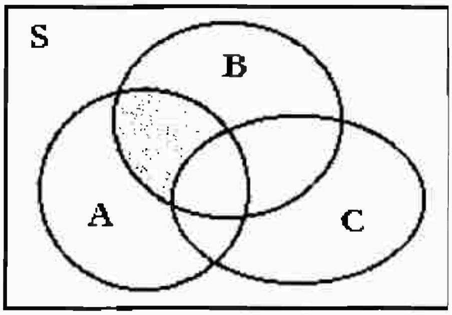
حيث أن وقوع الحدث A فقط يعنى وقوع A مع عدم وقوع B أو C أي انه وقوع A مع عدم وقوع $B \cup C$ وهذا يعنى وقوع A ووقوع $(B \cup C)'$ ولذلك نظلل الجـــزء من A الموجود خارج $B \cup C$ وهذا يُمثله $A \cap (B \cup C)'$ كما موضح بشكل فن ومن قانون ديمورجان $(B \cup C)' = B' \cap C'$ وبالتالي فإن الحدث وقوع A فقـــط هو $A \cap B' \cap C'$.

٢ - الحدث وقوع A و B و C معاً



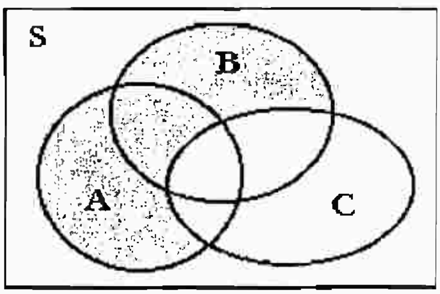
نظلل الجزء المشترك بين A , B , C فيكون هو الحدث $A \cap B \cap C$ موضع الدراسة .

٣ – الحدث وقوع A و B وعدم وقوع C .



حيث أن وقوع الحدث A و B وعدم وقوع C يعنى وقوع $B \cap A$ وعدم وقوع C أى وقوع $B \cap A$ ووقوع C' لذلك نظلل الجزء من $B \cap A$ الموجود خارج C كما موضح بشكل فن ، إذن الحدث وقوع A و B وعدم وقوع C هو $A \cap B \cap C'$.

٤ – الحدث وقوع A أو B وعدم وقوع C .



حيث أن وقوع الحدث A أو B وعدم وقوع C يعنى وقوع $B \cup A$ وعدم وقوع C وهذا يعنى وقوع $B \cup A$ ووقوع C' لذلك نظلل الجزء من $B \cup A$ الموجود خارج C كما موضح بشكل فن ، وبالتالي الحدث وقوع A أو B وعدم وقوع C هو $(A \cup B) \cap C'$.

مثـــال ٣٥ :

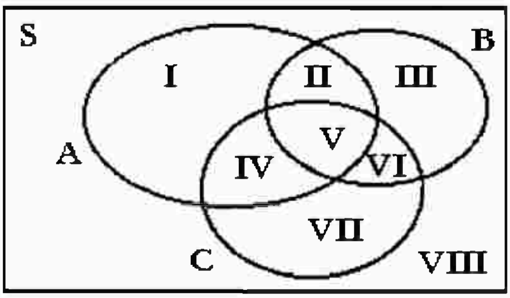
نفرض الأحداث A, B, C من فضاء العينة S لتجربة عشوائية . وضح شكل فن لكـل من الأحداث الآتية :

1 - $(A \cap B) \cup (C - A)$

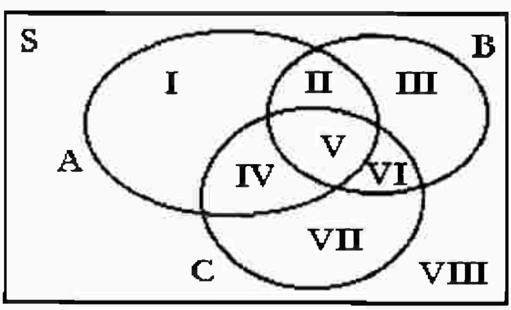
2 - $(A \cap B \cap C') \cup (B \cap C \cap A')$

الحـــل :

١ – نقوم بتظليل $A \cap B$ ويمثله المناطق V , II ثم نقوم بتظليل $C - A$ ويمثله المناطق VI , VII وبالتالي فإن الحدث $(A \cap B) \cup (C - A)$ يمثله المناطق VII , VI , V , II المظللة بالشكل .



٢ – نقوم بتظليل $(A \cap B \cap C')$ ويمثله المنطقة II ثم نقوم بتظليل $(B \cap C \cap A')$ ويمثله المنطقة VI وبالتالي فإن الحدث $(A \cap B \cap C') \cup (B \cap C \cap A')$ يمثله المناطق II , VI المظللة بالشكل .



مثـــال ٣٦:

نفرض الأحداث A , B , C من فضاء العينة S لتجربة عشوائية . عبر عـــن كـــل مـــن الأحداث الآتية بصورة مبسطة :

1- $(A \cup B) \cap (A' \cup B) \cap (A \cup B')$

2- $(A \cup B) \cap (A \cup C) \cap (A \cup (B' \cup C'))$

الحـــل :

$$1 - (A \cup B) \cap (A' \cup B) \cap (A \cup B') = ((A \cap A') \cup B) \cap (A \cup B')$$
$$= (\Phi \cup B) \cap (A \cup B') = B \cap (A \cup B')$$
$$= (B \cap A) \cup (B \cap B') = (B \cap A) \cup \Phi$$
$$= B \cap A$$

$$2 - (A \cup B) \cap (A \cup C) \cap (A \cup (B' \cup C'))$$
$$= (A \cup (B \cap C)) \cap (A \cup (B' \cup C'))$$
$$= (A \cup (B \cap C)) \cap (A \cup (B \cap C)')$$
$$= (A \cup ((B \cap C) \cap (B \cap C)'))$$
$$= A \cup \Phi$$
$$= A$$

مثـــال ٣٧:

للأحداث A , B , C من فضاء العينة S وضح أياً من العبارات الآتية صواب وأيهما خطأ

1 – $(A - A \cap B) \cup B = A \cup B$

2 – $(A' \cup B)' \cap C = A \cap (B \cup C)'$

الحـــل :

$$1 - \quad (A - A \cap B) \cup B = (A \cap (A \cap B)') \cup B$$
$$= (A \cap (A' \cup B')) \cup B = (A \cap A') \cup (A \cap B') \cup B$$
$$= \Phi \cup (A \cap B') \cup B = (A \cap B') \cup B$$
$$= (A \cup B) \cap (B' \cup B) = (A \cup B) \cap S$$
$$= A \cup B$$

إذن العبارة تكون صحيحة .

$$2 - \quad (A' \cup B)' \cap C = (A'' \cap B') \cap C$$
$$= (A \cap B') \cap C = A \cap (B' \cap C)$$
$$= A \cap (B \cup C')' \neq A \cap (B \cup C)'$$

إذن العبارة تكون خطأ .

مثـــال ٣٨:

في مجموعة تتكون من 75 طالب بكلية التربية وجد أن 16 طالب يدرســـون الرياضيـــات والفيزياء واللغة الإنجليزية ، 24 طالب يدرسون الرياضيات والفيزياء ، 30 طالب يدرســـون الرياضيات واللغة الإنجليزية ، 22 طالب يدرسون الفيزياء واللغـــة الإنجليزيـــة ، 7 طـــلاب يدرسون الرياضيات فقط ، 10 طلاب يدرسون الفيزياء فقط ، 5 طلاب يدرسون اللغـــة الإنجليزية فقط . تم اختيار طالب بطريقة عشوائية من مجموعة الطلاب . عبر عن ثم كون شكل فن وأوجد عدد عناصر كل من الأحداث الآتية :

(١) – الحدث أن الطالب يدرس الرياضيات .

(٢) – الحدث أن الطالب يدرس الرياضيات فقط .

(٣) – الحدث أن الطالب يدرس الرياضيات والفيزياء ولا يدرس اللغة الإنجليزية .

(٤) – الحدث أن الطالب لا يدرس أياً من المقررات الثلاثة .

(٥) – الحدث أن الطالب يدرس مقررين بالضبط .

(٦) – الحدث أن الطالب يدرس مقررين على الأقل .

(٧) – الحدث أن الطالب يدرس مقرر واحد على الأكثر .

الحـــل :

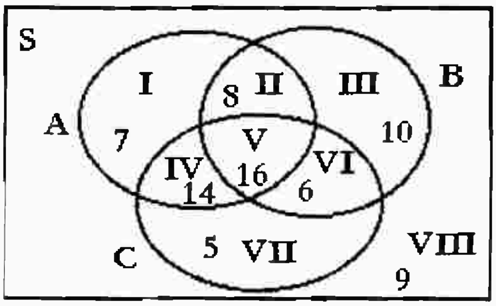
نفرض الحدث A اختيار طالب يدرس مقرر الرياضيات ،

الحدث B اختيار طالب يدرس مقرر الفيزياء ،

الحدث C اختيار طالب يدرس مقرر اللغة الإنجليزية .

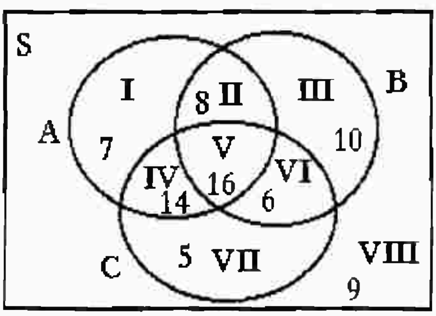
الأحداث الثلاثة A , B , C يمكن تمثيلها باستخدام أشكال فن ومن المفضل أن نبـــدأ مـــع البيانات الأكثر وضوحا والتى يمكن وضعها مباشرة داخل شكل فن لتُمثل الأساس الذى ننطلق منه لإكمال باقى البيانات داخل الشكل وفى هذا المثال نلاحظ أن البيانات الأكثر وضوحا هـــى الطلاب الذين يدرسون المقررات الثلاثة وعددهم 16 وهذا يعنى أن المنطقة V الممثلة لتقـــاطع الأحداث الثلاثة $A \cap B \cap C$ تحتوى على 16 عنصر لذلك نضع العدد 16 في المنطقـــة V وإذا أخذنا الطلاب الذين يدرسون الرياضيات والفيزياء ويمثلهم $A \cap B$ في المنطقتين II ,V وعددهم 24 وحيث أن المنطقة V وضع بها العدد 16 من قبل ، إذن يتبقى 8 طلاب وبالتـــالى

نضع العدد 8 في المنطقة II وحيث أن 30 طالب يدرسون الرياضيات واللغة الإنجليزية ويمثلهم $A \cap C$ في المنطقتين V , IV وحيث أن المنطقة V وضع بها العدد 16 من قبل ، إذن نضع العدد 14 في المنطقة IV وبالمثل نضع العدد 6 في المنطقة VI لأن 22 طالب يدرسون فيزياء ولغة إنجليزية ، وحيث أن 7 طلاب يدرسون الرياضيات فقط فإنهم ينتمون إلى المنطقة I وبالمثل نضع 10 طلاب في المنطقة III التى تمثل الطلاب الذين يدرسون الفيزياء فقط وكذلك نضع 5 طلاب في المنطقة VII التى تمثل الطلاب الذين يدرسون اللغة الإنجليزية فقط ، ومجموع الأعداد الموجودة في شكل فن 66 وحيث أن عدد الطلاب في المجموعة يساوى 75 إذن يتبقى 9 طلاب في المنطقة VIII وبالتالى نحصل على شكل فن الموضح .



والآن بمجرد النظر إلى شكل فن الموضح يمكننا الإجابة عن الأسئلة المطلوبة وغيرها

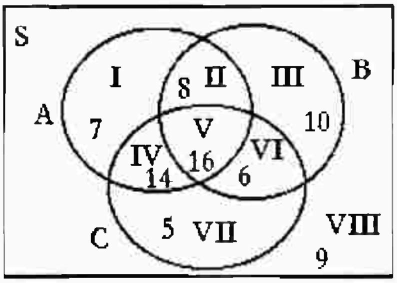
(١) – الحدث أن الطالب يدرس الرياضيات .



الحدث أن الطالب يدرس الرياضيات هو الحدث A ويمثله المناطق المظللة V , IV , II , I كما موضح بشكل فن ، وعدد عناصره هو

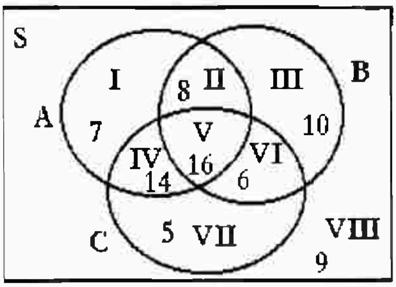
$7 + 8 + 14 + 16 = 45$

(٢) - الحدث أن الطالب يدرس الرياضيات فقط .



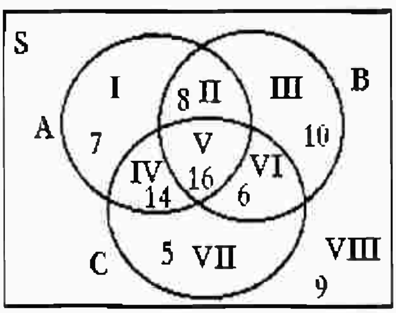
وقوع الحدث A فقط يعنى عدم وقوع B أو C أي عدم وقوع $B \cup C$ لذلك نظلل الجزء من A الموجود خارج $B \cup C$ وهو المنطقة I كما موضح بشكل فن ، إذن الحدث المطلوب هو $A \cap B' \cap C'$ وعدد عناصره يساوى 7 .

(٣) - الحدث أن الطالب يدرس الرياضيات والفيزياء ولا يدرس اللغة الإنجليزية .



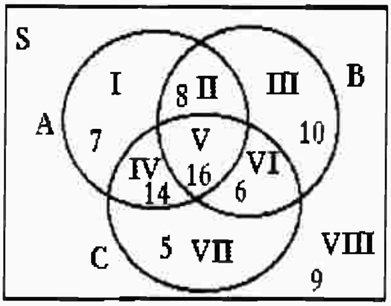
وقوع الحدث A و B وعدم وقوع C يعنى وقوع $A \cap B$ وعدم وقوع C لذلك نظلل الجزء من $A \cap B$ الموجود خارج C وهو المنطقة II كما موضح بشكل فن ، إذن الحدث المطلوب هو $A \cap B \cap C'$ وعدد عناصره يساوى 8 .

(٤) - الحدث أن الطالب لا يدرس أياً من المقررات الثلاثة .



الحدث هو عدم وقوع أياً من A , B , C لذلك نظلل الجزء الموجود خارج $A \cup B \cup C$ وهو المنطقة $VIII$ كما موضح بشكل فن ، إذن الحدث المطلوب هو $(A \cup B \cup C)'$ وعدد عناصره يساوى 9 .

(٥) – الحدث أن الطالب يدرس مقررين بالضبط .

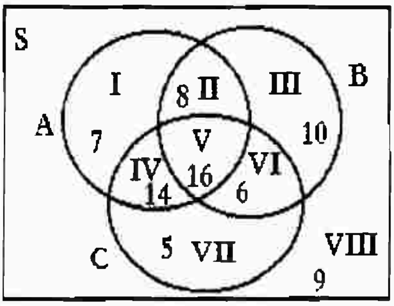


الحدث أن الطالب يدرس مقررين بالضبط يمثله المناطق المظللة **II , IV , VI** كما موضح بشكل فن ، إذن الحدث هو

$$(A \cap B \cap C') \cup (A \cap C \cap B') \cup (B \cap C \cap A')$$

وعدد عناصره هو $8 + 14 + 6 = 28$

(٦) – الحدث أن الطالب يدرس مقررين على الأقل .

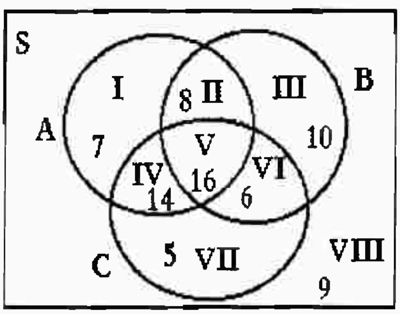


الحدث أن الطالب يدرس مقررين على الأقل يمثله المناطق المظللة **II , IV , V , VI** كما موضح بشكل فن ، إذن الحدث هو

$$(A \cap (B \cup C)) \cup (B \cap C \cap A')$$

وعدد عناصره هو $8 + 14 + 16 + 6 = 44$

(٧) – الحدث أن الطالب يدرس مقرر واحد على الأكثر .



الحدث أن الطالب يدرس مقرر واحد على الأكثر يمثله المناطق المظللة **I , III ,VII ,VIII** كما موضح بشكل فن وهو مكملة الحدث أن الطالب يدرس مقررين على الأقل . إذن الحدث المطلوب هو

$$((A \cap (B \cup C)) \cup (B \cap C \cap A'))'$$

وعدد عناصره هو $75 - 44 = 31$

مثــال ٣٩ :

في مجموعة من 120 طالب بكلية التربية وجد أن 100 طالب يدرسون على الأقل واحــدة من اللغات الإنجليزية ، الفرنسية ، الألمانية . ووجد أن 65 طالب يدرسون اللغة الإنجليزيــة ، 45 طالب يدرسون اللغة الفرنسية ، 42 طالب يدرسون اللغة الألمانية ، 20 طالب يدرســـون اللغة الإنجليزية والفرنسية ، 25 طالب يدرسون اللغة الإنجليزية والألمانيـــة ، 15 طـــالب يدرسون اللغة الفرنسية والألمانية . تم اختيار طالب بطريقة عشوائية من مجموعة الطلاب . عبر عن ثم كون شكل فن للحدث أن الطالب يدرس اللغات الثلاثة وأوجد عدد عناصره . كذلك أوجد عدد عناصر الأحداث المختلفة في شكل فن .

الحــل :

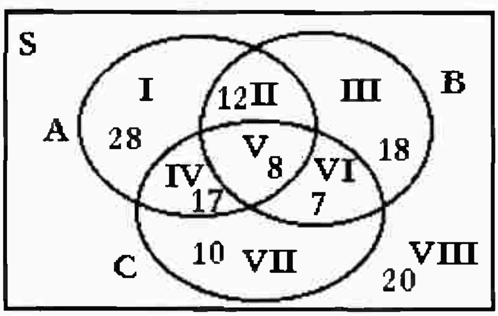
نفرض أن الحدث A اختيار طالب يدرس الإنجليزية ، الحدث B اختيـــار طـــالب يـــدرس الفرنسية ، الحدث C اختيار طالب يدرس الألمانية . وحيث أن 100 طالب يدرسون علـــى الأقل واحدة من اللغات الثلاث إذن $n(A \cup B \cup C)=100$ وبالتعويض في القانون

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

إذن

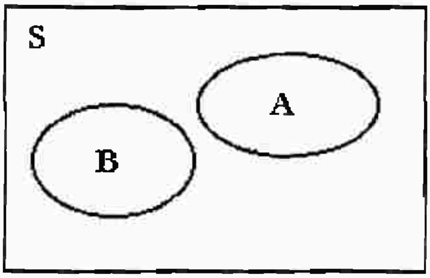
$$100 = 65 + 45 + 42 - 20 - 25 - 15 + n(A \cap B \cap C)$$

وبالتالي $n(A \cap B \cap C) = 8$ إذن الحدث أن الطالب يدرس الثلاث لغـــات هـــو $A \cap B \cap C$ وعدد عناصره 8 . والآن نستخدم هذه النتيجة لملء شكل فن كما وضحنـــا بالمثال السابق ، وبالتالى عدد الطلاب في كل من المناطق الثمانية بشكل فن يكون كما موضـــح بالشكل الآتى :



تعريف ١٢ : الأحداث المتنافية

يقال أن الحدثان A , B متنافيان أو مانعان لبعضهما البعض إذا كان وقوع إحداهما يمنع وقوع الآخر ، أي أن $A \cap B = \Phi$ وهذا يعنى أن الحدثان لا يمكن أن يقعا معاً .



شكل فن يوضح $A \cap B = \Phi$ حيث
الحدثان A , B متنافيان .

وبوجه عام : الأحداث $A_1 , A_2 , \ \ldots \ , A_n$ تسمى أحداث متنافية إذا كانت متنافية مثنى مثنى أي إذا كان

$$A_i \cap A_j = \Phi \qquad \forall \ i \neq j \in \{1,2, \ \ldots \ ,n\}$$

ويمكن أن يمتد هذا التعريف إلى عدد لا نهائي قابل للعد من الأحداث $A_1 , A_2 , \ \ldots$ فتسمى أحداث متنافية إذا كانت متنافية مثنى مثنى أي إذا كان

$$A_i \cap A_j = \Phi \qquad \forall \ i \neq j \in \{1,2, \ \ldots \ \}$$

وكأمثلة على الأحداث المتنافية :

– في تجربة إلقاء عملة معدنية مرة واحدة فإن فضاء العينة $S = \{H,T\}$ وإذا كان الحدث A هو ظهور وجه الصورة $A=\{H\}$ والحدث B هو ظهور وجه الكتابة $B=\{T\}$ فإن الحدثان A , B حدثان متنافيان .

– في تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة فإن فضاء العينة يكون $S = \{1,2,3,4,5,6\}$ وإذا كان الحدث A هو ظهور عدد أقل من 4 والحدث B هو ظهور عدد اكبر من 3 ، أي أن $A=\{1,2,3\}$, $B=\{4,5,6\}$ إذن الحدثان A , B حدثان متنافيان .

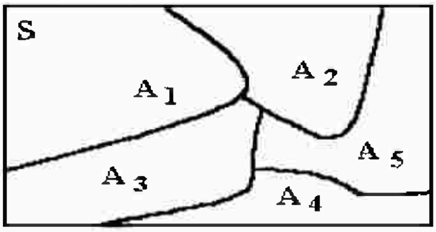
تعريف ١٣ : تجزئ فضاء العينة

مجموعة الأحداث $A_1, A_2, \ldots, A_n$ تسمى تجزيئاً لفضاء العينة S إذا كان

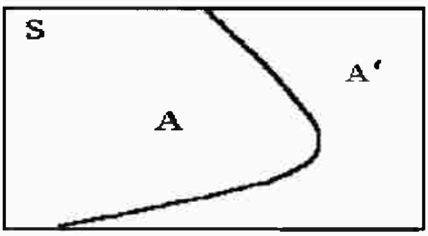
١ - الأحداث $A_1, A_2, \ldots, A_n$ متنافية ، أي أن

$$A_i \cap A_j = \Phi \qquad \forall\ i \neq j \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

٢ - الأحداث $A_1, A_2, \ldots, A_n$ تكون فضاء العينة S أي أن $S = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$



في الشكل الموضح نلاحظ أن الأحداث A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 تُكوّن تجزي لفضاء العينة S فهي أحداث متنافية مثنى مثنى واتحادها معا يعطى فضاء العينة S.



ولأي حدث A من فضاء العينة S فإن الحدث A مع مكملته A' يكونان تجزي لفضاء العينة S حيث

$$A \cap A' = \Phi \qquad , \qquad S = A \cup A'$$

مثال ٤٠ :

في تجربة إلقاء عملة معدنية وحجر نرد على التوالي اكتب فضاء العينة S للتجربة وكوّن مجموعة من أربعة أحداث توضح بها مفهوم التجزيء لفضاء العينة .

الحل : بفرض أن H ترمز إلى صورة ، T ترمز إلى كتابة فإن فضاء العينة يكون

$$S = \{H1, H2, H3, H4, H5, H6, T1, T2, T3, T4, T5, T6\}$$

نفرض الحدث A_1 ظهور الصورة مع عدد زوجي والحدث A_2 ظهور الصورة مع عدد فردى والحدث A_3 ظهور الكتابة مع عدد زوجي والحدث A_4 ظهور الكتابة مع عدد فردى

$$A_1 = \{H2, H4, H6\} \qquad , \qquad A_2 = \{H1, H3, H5\}$$

$$A_3 = \{T2, T4, T6\} \qquad , \qquad A_4 = \{T1, T3, T5\}$$

إذن الأحداث A_1, A_2, A_3, A_4 متنافية وتُكوّن تجزي لفضاء العينة S .

مثـــال ٤١ :

أكتب من عندك ثلاثة أحداث متنافية وبحيث تكون تجزئ لفضاء العينة في كل من التجـــارب العشوائية الآتية :

١ – تجربة تسجيل نوع وترتيب الأطفال في العائلات التي لديها ثلاثة أطفال .

٢ – تجربة قياس العمر الافتراضي للمصابيح الكهربائية التي تنتجها أحد المصانع .

٣ – تجربة سحب ورقة من أوراق اللعب " أوراق كوتشينة عادية " .

٤ – تجربة اختيار نقطة بطريقة عشوائية داخل الفترة $[a , b]$ على خط الأعداد .

٥ – تجربة اختيار نقطة عشوائياً على أو داخل سطح الأســـطوانة $x^2 + y^2 = 16$ والمحدودة بالمستويات $z=1 , z=9$.

الحـــل :

١ – في تجربة تسجيل نوع الأطفال في العائلات التي لديها ثلاثة أطفال بفـــرض أن الرمـــز b يعنى ولداً والرمز g يعنى بنتاً فإنه مع مراعاة الترتيب في الولادة فإن فضاء العينة يكون

$$S = \{ bbb , bbg , bgb , bgg , gbb , gbg , ggb , ggg \}$$

نفرض أن الحدث A_1 يعنى أن الأطفال الثلاثة من نفس النوع والحدث A_2 يعنى وجود بنتـاً واحدة في العائلة والحدث A_3 يعنى وجود ولداً واحداً في العائلة ، إذن

$$A_1 = \{ bbb , ggg \} , \quad A_2 = \{ bbg , bgb , gbb \} \quad , A_3 = \{ bgg , gbg , ggb \}$$

نلاحظ أن الأحداث الثلاثة A_1 , A_2 , A_3 متنافية مثنى مثنى وحيث أن $S = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ إذن الأحداث الثلاثة تُكوّن تجزئ لفضاء العينة S .

٢ – في تجربة قياس العمر الافتراضي للمصابيح الكهربائية فإن فضاء العينة S يمكن تعريفـــه بالصورة $S = \{ x : x \geq 0 \}$ حيث x عدد حقيقي غير سالب يمثل الزمــــن مقـــاس بالساعات وكسورها من دقائق وثواني . نفرض الحدث A_1 أن يكون المصبـــاح الكـــهربائي صالح لمدة 200 ساعة على الأقل والحدث A_2 أن يكون صالح لمدة 100 ساعة على الأكـثر والحدث A_3 أن يكون صالح لمدة اكبر من 100 ساعة واقل من 200 ساعة ، إذن

$$A_1 = \{ x : x \geq 200 \} \quad , A_2 = \{ x : x \leq 100 \} \quad , A_3 = \{ x : 100 < x < 200 \}$$

إذن الأحداث الثلاثة A_1 , A_2 , A_3 متنافية مثنى مثنى وهى تجزئ لفضاء العينة S .

٣ – في تجربة سحب ورقة من أوراق اللعب " أوراق كوتشينة عادية " وعددهم 52 ورقة نفرض الحدث A_1 أن تكون الورقة المسحوبة صورة والحدث A_2 أن تكون الورقة المسحوبة تحمل عدد زوجي والحدث A_3 أن تكون الورقة المسحوبة تحمل عدد فردى ، إذن الأحـداث الثلاثة A_1 , A_2 , A_3 متنافية مثنى مثنى وهى تجزئ لفضاء العينة .

٤ – في تجربة اختيار نقطة بطريقة عشوائية داخل الفترة $[\,a , b\,]$ على خط الأعداد نفـرض النقطتان $c,d \in \,]a,b[$ بحيث أن $a<c<d<b$ ونفرض الأحداث

$$A_1 = \{\, x : \; a \le x < c \,\} = [\, a , c \,[$$
$$A_2 = \{\, x : \; c \le x < d \,\} = [\, c , d \,[$$
$$A_3 = \{\, x : \; d \le x \le b \,\} = [\, d , b \,]$$

إذن الأحداث الثلاثة A_1 , A_2 , A_3 متنافية مثنى مثنى وهى تجزئ لفضاء العينة $S=[a,b]$.

٥ – في تجربة اختيار نقطة عشوائياً على أو داخل سطح الأسطوانة $x^2 + y^2 = 4$ والمحدودة بالمستويات $z=1$, $z = 9$ فإن فضاء العينة يكون

$$S = \{\, (x,y,z) : \; x^2 + y^2 \le 4 \;\; , \;\; 1 \le z \le 9 \,\}$$

نفرض الأحداث الثلاثة A_1 , A_2 , A_3 كالآتي :

$$A_1 = \{\, (x,y,z) : \; x^2 + y^2 \le 4 \;\; , \;\; 1 \le z < 3 \,\}$$
$$A_2 = \{\, (x,y,z) : \; x^2 + y^2 \le 4 \;\; , \;\; 3 \le z < 6 \,\}$$
$$A_3 = \{\, (x,y,z) : \; x^2 + y^2 \le 4 \;\; , \;\; 6 \le z \le 9 \,\}$$

نلاحظ أن مجسـم الاسطوانة تم تجزيئه إلى ثلاث مجسمات كل منها يمثل حـدث والأحـداث الثلاثة A_1 , A_2 , A_3 متنافية مثنى مثنى واتحادها يعطى مجسم الاسطوانة بالكـامل ، إذن الأحداث الثلاثة A_1 , A_2 , A_3 تُمثل تجزئ لفضاء العينة S .

الفصل
1

تمارين

١ – أكتب فضاء العينة موضحا عدد عناصره في كل من التجارب العشوائية الآتية :

١ – إلقاء عملة معدنية ثم حجر نرد على الترتيب .

٢ – إلقاء حجر نرد ثم عملة معدنية على الترتيب .

٣ – إلقاء عملة معدنية ثلاث مرات على التوالي .

٤ – إلقاء ثلاث عملات معدنية متماثلة في آن واحد .

٥ – إلقاء عملة معدنية أربعة مرات متتالية .

٦ – إلقاء حجري نرد متميزين .

٧ – إلقاء حجري نرد متماثلين .

٨ – وضع ثلاثة كتب مختلفة على أحد الرفوف .

٩ – ترتيب ثلاثة أشخاص للجلوس على ثلاثة مقاعد في صف .

١٠ – ترتيب الأرقام 1 , 2 , 3 , 4 للحصول على عدد من أربعة خانات .

٢ – يراد عمل دراسة على العائلات من حيث عدد الأطفال لديها ومع مراعاة الترتيب في الولادة أكتب فضاء العينة في كل من الحالات الآتية :

١ – للعائلات التي لديها طفل واحد فقط .

٢ – للعائلات التي لديها طفلان .

٣ – للعائلات التي لديها ثلاثة أطفال .

٤ – للعائلات التي لديها أربعة أطفال .

٥ – للعائلات التي لديها طفل واحد أو طفلان .

٦ – للعائلات التي لديها ثلاث اطفال على الأقل .

٣ – في تجربـــة إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات على التوالي ، أوجد كل من الأحداث الآتية :

١ – الحدث A_1 ظهور الصورة مرتين على الأقل .

٢ – الحدث A_2 ظهور الصورة مرة واحدة على الأقل .

٣ – الحدث A_3 ظهور الصورة مرة واحدة على الأكثر .

٤ – الحدث A_4 ظهور الصورة في الرمية الثانية .

٥ – الحدث A_5 عدم ظهور الصورة على الإطلاق .

٤ – في تجربة إلقاء حجر النرد مرتين على التوالي ، أوجد كل من الأحداث الآتية :

١ – الحدث A_1 ظهور العدد 5 في الرمية الثانية .

٢ – الحدث A_2 مجموع العددين الظاهرين اكبر من 7 .

٣ – الحدث A_3 مجموع العددين الظاهرين يقبل القسمة على 3 .

٤ – الحدث A_4 ظهور عدد في الرمية الأولى اكبر من الذى يظهر في الرمية الثانية .

٥ – الحدث A_5 عدم ظهور العدد 6 في الرميتين .

٥ – للعائلات التي لديها طفلان ومع مراعاة ترتيب الولادة ، أوجد كل من الأحداث الآتية :

١ – الحدث A_1 يعنى عدم وجود بنت للعائلة .

٢ – الحدث A_2 يعنى وجود ولد واحد على الأكثر في العائلة .

٣ – الحدث A_3 يعنى وجود بنت واحدة على الأكثر في العائلة .

٤ – الحدث A_4 يعنى وجود ولد وبنت في العائلة .

٥ – الحدث A_5 يعنى أن المولود الثاني ولد .

٦ – للعائلات التي لديها ثلاثة أطفال ومع مراعاة الترتيب في الـــولادة ، أوجـــد كـــل مـــن الأحداث الآتية :

١–وجود بنت واحدة على الأقل في العائلة .

٢–وجود بنت واحدة على الأكثر في العائلة .

٣– عدم وجود بنت في العائلة .

٤– المولود الثاني ولد .

٧ – عرف فضاء عينة مناسب لتجربة اختيار مجموعتين مختلفتين عشوائيا من مجموعة القوى $\rho(A)$ في حالة $A=\{1,2\}$ ثم في حالة $A=\{a,b,c\}$ وفي كلتا الحالتين أوجد كل من الأحداث الآتية :

١ – اختيار مجموعتين تقاطعهما المجموعة الخالية .

٢ – اختيار مجموعتين كل منهما مكملة للأخرى .

٣ – اختيار مجموعتين أحدهم تحوى عناصر اكثر من الأخرى .

٤ – اختيار مجموعتين اتحادهم يعطى المجموعة A .

٨ – عرف فضاء عينة مناسب لتجربة سحب ثلاث قطع نقود معاً من كيس يحتوى على عدد 4 قطع نقود من فئة 50 قرش ، 3 قطع نقود من فئة 25 قرش ، 2 قطعة من فئة 20 قرش ، 5 قطعة من فئة 10 قروش وقطعة واحدة من فئة 5 قروش ثم وضح كل من الأحداث الآتية :

١ – أن يكون جملة المبلغ المسحوب 70 قرش بالضبط .

٢ – أن يكون جملة المبلغ المسحوب أكبر من 70 قرش .

٣ – أن يكون جملة المبلغ المسحوب أكبر من 60 قرش وأقل من 150 قرش .

٤ – أن يكون جملة المبلغ المسحوب 50 قرش على الأكثر .

٥ – أن يكون جملة المبلغ المسحوب 100 قرش على الأقل .

٩– سحبت 4 كروت عشوائياً على التوالي وبدون إرجاع من مجموعة تتكون من 18 كارت ملون بها 5 كروت حمراء ، 5 كروت سوداء ، 3 كروت بيضاء ، 5 كروت خضراء ، عرف فضاء عينة مناسب للتجربة وأوصف كل من الأحداث الآتية :

١ – الكروت الثلاثة المسحوبة من اللون الأزرق .

٢ – الكروت الثلاثة المسحوبة من اللون الأبيض .

٣ – الكروت الثلاثة المسحوبة من نفس اللون .

٤– الكروت الثلاثة المسحوبة تحمل الألوان الثلاثة في علم جمهورية مصر العربية .

٥ – الكروت الثلاثة المسحوبة من ألوان مختلفة .

١٠- صندوق يحتوى على 20 كرة مرقمة من 1 إلى 20 والكرات السبعة الأولى في الترقيم بيضاء والكرات الثمانية التالية في الترقيم حمراء والكرات المتبقية في الترقيم سوداء :

١ - عين فضاء عينة مناسب لتجربة سحب كرة واحدة من الصندوق وأوصف الأحداث A , B , C حيث A سحب كرة بيضاء ، B سحب كرة حمراء ، C سحب كرة سوداء .

٢ - عين فضاء عينة مناسب لتجربة سحب كرتين واحدة بعد الأخرى من الصندوق مع إرجاع الكرة المسحوبة أولا قبل سحب الكرة الثانية وأوصف الأحداث D , E , F حيث D هو الحدث أن الكرة المسحوبة أولا حمراء ، E هو الحدث أن الكرة المسحوبة ثانيا سوداء ، F هو الحدث أن الكرتان بيضاء .

٣ - عين فضاء عينة مناسب لتجربة سحب كرتين واحدة بعد الأخرى من الصندوق بدون إرجاع وأوصف الأحداث D , E , F المشار اليها في المطلوب ٢ .

١١- مخزن للأجهزة الكهربائية به 60 جهاز تليفزيون TV ، 40 جهاز راديو ، أراد أمين المخزن التحقق من صلاحية الأجهزة ومعرفة ما إذا كانت تعمل أو لا تعمل . أكتب فضاء عينة مناسب لهذه التجربة ووضح كل من الأحداث الآتية :

١ - جميع الأجهزة تعمل .

٢ - لا يوجد أى جهاز راديو صالح للعمل .

٣ - أول خمسة أجهزة تليفزيون فحصهم كانت لا تعمل بينما باقى الاجهزة تعمل .

١٢- بائع جرائد يبدأ يومياً عمله ومعه 75 جريدة ، عرف فضاء عينة مناسب لتجربة معرفة عدد الجرائد التي يبيعها في يومين متتاليين وأوصف كل من الأحداث الآتية :

١ - يبيع 10 جرائد على الأقل في اليوم الأول .

٢ - يبيع 9 جرائد على الأقل في اليوم الثاني .

٣ - يبيع 8 جرائد على الأقل في كل من اليومين .

٤- عدد الجرائد التى تم بيعها في اليوم الثاني أكثر من التى تم بيعها في اليوم الأول .

٥- مجموع ما تم بيعه في اليومين أقل من 80 جريدة .

١٣- نفرض تجربة قياس العمر الافتراضي للمصابيح الكهربائية . أكتب فضاء عينة مناسب لهذه التجربة ووضح كل من الأحداث الآتية :

١ – الحدث أن اللمبة الكهربائية تكون صالحة لمدة 600 ساعة على الأقل .

٢ – الحدث أن اللمبة الكهربائية تكون صالحة لمدة 1200 ساعة على الأكثر .

٣ – الحدث أن اللمبة الكهربائية تكون صالحة لمدة 850 ساعة بالضبط .

٤ – الحدث أن اللمبة الكهربائية تكون صالحة لمدة تتراوح بين 800 ، 1100 ساعة .

٥ – الحدث أن اللمبة الكهربائية تكون غير صالحة على الإطلاق .

١٤- مكالمة تليفونية من شخص ما يتم الانتظار لاستقبالها بين الساعة 7:00 والساعة 7:30 صباحا من كل يوم . أكتب فضاء عينة مناسب لتجربة تسجيل وقت المكالمة ووضح كل من الأحداث الآتية :

١ – وصول المكالمة خلال ربع ساعة بعد السابعة .

٢ – وصول المكالمة في مدة لا تزيد عن خمس دقائق بعد السابعة والربع .

٣ – فترة الانتظار اقل من 10 دقائق .

٤ – فترة الانتظار أكبر من 10 دقائق .

٥ – فترة الانتظار أكبر من 5 دقائق واقل من ربع ساعة .

١٥- حافلة للركاب تتسع لعدد 28 راكب ، تتوقف الحافلة في محطة ما بين الساعة السابعة 7:00 والساعة الثامنة 8:00 صباحا من كل يوم . نفرض التجربة العشوائية التي تتكون من رصد عدد الركاب الموجود في الحافلة وقياس وقت وصول الحافلة إلى هذه المحطة . أكتب فضاء عينة مناسب لهذه التجربة ووضح كل من الأحداث الآتية :

١ – الحافلة تصل إلى المحطة وبها عدد 24 راكب ما بين الساعة 7:15 والساعة 7:45 .

٢- الحافلة تصل إلى المحطة الساعة السابعة والثلث 7:20 .

٣- الحافلة تصل إلى المحطة الساعة السابعة والثلث 7:20 وبها عدد 26 راكب.

٤ – الحافلة تصل إلى المحطة وبها عدد 23 راكب .

٥ – الحافلة تصل إلى المحطة ما بين الساعة 7:25 والساعة 7:45 .

١٦- سيارة أجرة تتبع أحد شركات السياحة تحمل الركاب من مطار القاهرة الدولي إلى ثلاثة فنادق مختلفة تتعامل معها شركة السياحة ، فإذا علمت أن السيارة غادرت المطار وبها عدد 2 من السائحين . أكتب فضاء عينة مناسب لوصف نزولهم في الفنادق الثلاثة ثم اكتب عناصر الحدث أن السائحين ينزلان في نفس الفندق .أجب عما سبق إذا غادرت السيارة المطار وبها ثلاثة من السياح.

١٧- أوصف فضاء عينة مناسب في كل من التجارب العشوائية الآتية :

١ - إلقاء عملة معدنية باستمرار وحساب عدد المرات اللازمة حتى يظهر وجه الكتابة لأول مرة .

٢ - إلقاء حجر نرد باستمرار وحساب عدد المرات اللازمة حتى يظهر رقم 6 لأول مرة.

٣ - إلقاء حجري نرد باستمرار وحساب عدد المرات اللازمة حتى يظهر رقمين متساويين على الوجهين .

٤ - اختيار نقطة بطريقة عشوائية داخل الفترة $[a , b]$ على خط الأعداد .

٥ - اختيار نقطة بطريقة عشوائية داخل دائرة في المستوى مركزها النقطة (a,b) ونصف قطرها r .

٦ - اختيار نقطة عشوائيا داخل المستطيل المحدود بالمستقيمات $x=\pm 5\ ,\ y=\pm 4$.

٧ - اختيار نقطة عشوائيا على أو داخل سطح كرة في الفراغ مركزها (a,b,c) ونصف قطرها r .

٨ - اختيار نقطة عشوائيا على أو داخل سطح مكعب في الفراغ محدود بالمستويات $x=\pm 2 , y=\pm 2 , z=\pm 2$.

٩ - اختيار نقطة عشوائيا داخل سطح الاسطوانة $x^2 + z^2 = 9$ ومحدودة بالمستويات $y=1\ ,\ y = 4$.

١٨- كون الشجرة البيانية لاستنتاج فضاء العينة الذي يوضح جميع الترتيبات الممكنة من الأولاد والبنات في عائلة لديها أربعة أطفال . وأوجد عناصر كل من الأحداث الآتية :

١-وجود بنت واحدة على الأقل في العائلة .

٢-وجود بنت واحدة على الأكثر في العائلة .

٣- وجود ولدان في العائلة .

٤- المولود الرابع ولد .

١٩- يراد عمل دراسة على العائلات التي لديها طفلان أو ثلاثة أطفال ومع مراعاة الأسبقية في الولادة ، أرسم الشجرة البيانية لاستنتاج فضاء العينة الذي يوضح جميع الترتيبات الممكنة وأوجد عناصر كل من الأحداث الآتية :

١- العائلات التي طفلها الأكبر ولد .

٢- العائلات التي طفلها الأصغر بنت .

٣ - العائلات التي لديها بنتان وولد.

٤ - العائلات التي لها الأولاد أكثر من البنات.

٥ - العائلات التي لها البنات أكثر من الأولاد .

٦ - العائلات التي لديها بنت .

٧ - العائلات التي لديها ولد .

٨ - العائلات التي ليس لديها أولاد .

٩ - العائلات التي لديها بنتان .

١٠- العائلات التي لديها ولدان .

٢٠- ألقيت عملة معدنية لملاحظة ظهور وجه الصورة أو وجه الكتابة ، فإذا ظهر وجه العملة الصورة يتم إلقاء حجر نرد بينما إذا ظهر وجه الكتابة يتم إلقاء العملة المعدنية مرة ثانية .
أرسم الشجرة البيانية للتجربة وأوجد عناصر كل من الأحداث الآتية :

١ - ظهور عدد زوجي .

٢ - ظهور صورة واحدة على الأقل .

٣ - عدم ظهور صورة .

٤ - ظهور صورة واحدة على الأكثر .

٢١- في مباراة للتنس بين لاعبين A , B يفوز بالمباراة اللاعب الذي يفوز بثلاثة أشواط على طول المباراة . كون الشجرة البيانية التي تمثل جميع النواتج الممكنة للمباراة .

٢٢ - يلعب فريقان مباراة ما ويعتبر الفريق فائزا إذا فاز في شوطين على التوالي أو أربعة أشواط في كل المباراة ، كون الشجرة البيانية لجميع الطرق التي يمكن أن تتم بها المباراة.

٢٣ - في مباراة لكرة السلة من ثلاثة أشواط بين فريقين ، يفوز بالمباراة الفريق الذي يكسب شوطين من أشواط المباراة . كون الشجرة البيانية التي تمثل جميع نواتج المباراة .

٢٤ - في مباراة للشطرنج chess بين لاعبين يفوز بالمباراة اللاعب الذي يفوز بشوطين متتاليين أو يفوز بثلاثة أشواط على طول المباراة . كون الشجرة البيانية التي تمثل جميع النواتج الممكنة للمباراة .

٢٥- كيس يحتوى على أربعة قطع نقود اثنتان عاديتان واثنتان ذات صورتين ، اخترت قطعة من الكيس بطريقة عشوائية ثم ألقيت ، إذا ظهر وجه الصورة فإن القطعة نفسها تلقى مرة أخرى بينما إذا ظهر وجه الكتابة فأننا نختار قطعة نقود من الثلاث قطع المتبقية بالكيس ثم تلقى . ارسم شجرة بيانية للتجربة وأكتب عناصر كل من الأحداث الآتية :

١ - ظهور صورة مرة واحدة على الأكثر .

٢ - ظهور الصورة مرتين .

٢٦- كيس يحتوى على ثلاث قطع نقود اثنتان عاديتان وواحدة ذات صورتين ، اخترت قطعة من الكيس بطريقة عشوائية ثم ألقيت ، إذا ظهر وجه الصورة نقوم بإلقاء حجر نرد مرة واحدة بينما إذا ظهر وجه الكتابة فأننا نختار قطعة نقود من القطعتين المتبقيتين بالكيس ثم تلقى فإذا ظهر وجه الصورة نقوم بإلقاء حجر نرد مرة واحدة . ارسم شجرة بيانية للتجربة واكتب فضاء العينة ثم أكتب عناصر كل من الأحداث الآتية :

١ - ظهور عدد زوجي .

٢ - ظهور صورة على الأقل .

٢٧- في أحد الفنادق الكبرى كان حجز الأجنحة يتم وفقا للاختيار من الثلاث مجموعات الموضحة بالجدول الآتي :

المجموعة الأولى (الأجنحة)	المجموعة الثانية (عدد الغرف)	المجموعة الثالثة (الطابق)
جناح ممتاز	غرفتين	الطابق الأول
جناح جيد	ثلاث غرف	الطابق الثاني
جناح متوسط		الطابق الثالث

ارسم شجرة بيانية توضح جميع الاختيارات الممكنة واكتب فضاء العينة ثم أكتب عناصر كل من الأحداث الآتية :

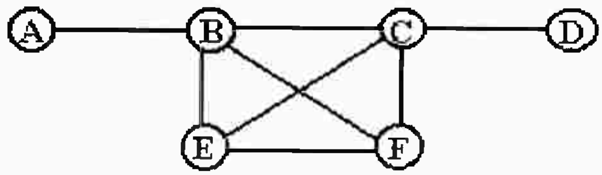
١ - حجز جناح ممتاز في الطابق الثالث .

٢ - حجز جناح من ثلاث غرف بالطابق الأول .

٣ - حجز جناح متوسط .

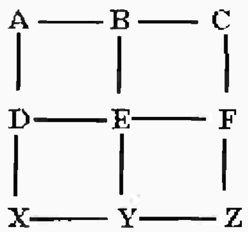
٤ - حجز جناح من غرفتين .

٢٨- النقاط A , B , C , D , E , F في الرسم الآتي تدل على 6 مدن والخطوط تدل

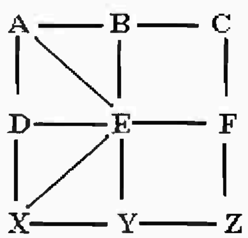


على جسور تربط بينها . بدأ رجل من المدينة A رحلة بسيارته للتجول من مدينة إلى أخرى واعتزم التوقف واخذ استراحة إذا لم يمكنه مواصلة التجول بدون أن يعبر نفس الجسر مرتين . أوجد عدد الطرق التي يمكنه التجول بها بين المدن قبل أن يتوقف للاستراحة . وإذا كان يوجد طريق مباشر بين المدينتين A , F فأوجد عدد الطرق التي يمكنه التجول بها بين المدن في هذه الحالة قبل أن يتوقف للاستراحة .

٢٩- في الرسم الآتي تسعة نقاط A , B , C , D , E , F , X , Y , Z بدأ رجل في التحرك من النقطة X ويسمح له في كل مرة بالحركة خطوة رأسية أو خطوة أفقية



ويتوقف عن الحركة إذا لم يتمكن من مواصلة السير بدون المرور على نقطة يكون قد مر بها من قبل . أوجد عدد الطرق التي يمكنه أن يتجول بها إذا كانت الخطوة الأولى من X إلى D . وإذا كان يوجد طريق بين X , E وطريق بين A , E كما موضح



بالرسم فأوجد عدد الطرق التي يمكنه أن يتجول بها في هذه الحالة إذا كانت الخطوة الأولى من X إلى E .

٣٠- يوجد ثلاثة أشخاص بمحطة مترو وعند وصول قطار مترو من ثلاث عربات صعد الأشخاص الثلاثة إلى القطار . ارسم شجرة بيانية توضح جميع الإمكانات المتاحة لصعود الأشخاص الثلاثة إلى عربات القطار ، ووضح كل من الأحداث الآتية :

١ - الحدث صعود الأشخاص الثلاثة في عربتين على الأكثر .

٢ - الحدث صعود الأشخاص الثلاثة في عربتين فقط .

٣١- في اختبار بنظام الاختيار من متعدد بحيث أن لكل سؤال ثلاثة اختيارات منها إجابة واحدة فقط صواب فإذا كان الاختبار يتكون من ثلاثة أسئلة ، أرسم الشجرة البيانية التي توضح جميع الإمكانات المتاحة للإجابة على الاختبار ومن ذلك استنتج كل من الأحداث الآتية :

١ - الإجابة تكون صواب عن سؤالين .

٢ - الإجابة تكون صواب عن سؤالين على الأكثر .

٣ - الإجابة تكون خطأ عن سؤالين على الأكثر .

٤ - عدد الإجابات الصواب تكون اكثر من عدد الإجابات الخطأ .

٥ - الإجابة تكون صواب عن الأسئلة جميعها .

٣٢- في أحد محطات القطارات المزدحمة يتم اختيار سيارات الأجرة التي تحمل الركاب وفقا لترتيب وصولها إلى المحطة ، نفرض الحدث A وجود 6 سيارات على الأقل تنتظر دورها لتأخذ الركاب ، الحدث B وجود 4 سيارات على الأكثر والحدث C يوجد 3 سيارات بالضبط . عبر عن كل من الأحداث الآتية :

$$A' \quad , \quad B' \quad , \quad A-B \quad , \quad B\cap C$$
$$A\cap B \quad , \quad A\cap C \quad , \quad B\cap C' \quad , \quad A\cap C'$$

٣٣- في تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة فقط فإذا كان الحدث A هو ظهور عدد فردى ، الحدث B هو ظهور عدد أكبر من 3 والحدث C هو ظهور عدد يقبل القسمة على 3 عبر عن كل من الأحداث الآتية :

$$A' \quad , \quad B' \quad , \quad A-B \quad , \quad B\cap C$$
$$A\cap B \quad , \quad A\cap C \quad , \quad B\cap C' \quad , \quad A\cap C'$$

٣٤- لأي حدثان A , B من فضاء العينة S لتجربة عشوائية وباستخدام طريقـــة انتمـــاء العنصر البت صحة كل مما يأتي :

1- $A - B = A \cap B'$

2- $(A \cap B)' = A' \cup B'$

3- $A \cap (B \cup A) = A$

٣٥- نفرض الأحداث A , B , C من فضاء العينة S لتجربة عشوائية وباستخدام طريقة انتماء العنصر اثبت صحة كل مما يأتي :

1- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

2- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

3- $A \cup (B \cap C)' = (A \cup B') \cup C'$

4- $(A \cup (B' \cap C))' = (A' \cap B) \cup (A \cup C)'$

٣٦- نفرض الأحداث A , B , C من فضاء العينة S لتجربة عشوائية . وضح معنى كل من العلاقات الآتية :

1- $A \cup B \cup C = B$

2- $A \cap B \cap C = C$

٣٧- نفرض الأحداث A , B , C من فضاء العينة S لتجربة عشوائية . عبر عن كل من الأحداث الآتية بصورة مبسطة

1- $(A \cup B') \cap (A \cup B) \cap C$

2- $(A \cup B') \cap (A \cup C') \cap (A \cup C)$

3- $A' \cap (A \cup C) \cap (A' \cap B)$

4- $(A - A \cap B) \cup (A \cup B)'$

5- $(A \cup B - A \cap B) - ((A' \cup B)' \cup (A' \cap B))$

٣٨- نفرض الأحداث A , B , C من فضاء العينة S لتجربة عشوائية . وضح أي مـــن العبارات الآتية صواب وأيها خطأ .

1- $(A - A \cap B) \cup B = A \cup B$

2- $(A \cup B)' \cap C = A' \cap (B \cup C')'$

3- $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C) \subset A \cup B \cup C$

٣٩- نفرض الحدثان $A\ ,\ B$ من فضاء العينة S لتجربة عشوائية . عبر عـــن ثم ارســم شكل فن لكل من الأحداث الآتية :

١ - أن يقع A أو لا يقع B . ٢ - أن يقع A أو B وليس كلاهما .

٤٠- نفرض الأحداث $A\ ,B\ ,C$ من فضاء العينة S لتجربة عشوائية . عبر عن ثم ارسم شكل فن لكل من الأحداث الآتية :

١ - الحدث وقوع B فقط .

٢ - الحدث وقوع A و C معا وعدم وقوع B .

٣ - الحدث عدم وقوع A و B أو وقوع C .

٤ - الحدث عدم وقوع A أو B ووقوع C .

٤١- نفرض الأحداث $A\ ,\ B$ من فضاء العينة S لتجربة عشوائية . وضح شكل فن لكل من الأحداث الآتية :

1- $A' \cap B$

2- $(A \cup B')'$

3- $(A \cap B') \cup (B \cap A')$

4- $(A' \cup B') \cap (B' - A)$

٤٢- نفرض الأحداث $A\ ,B\ ,C$ من فضاء العينة S لتجربة عشوائية . وضح شكل فن لكل من الأحداث الآتية :

1- $(A \cup B) \cap (C - A)$

2- $(A \cap B) \cup (C \cap A')$

3- $(A \cap B' \cup C) \cup (B \cap C \cap A')$

4- $(A' \cap B') \cap (B' \cap C' \cap A)$

٤٣- في مجموعة من 250 طالب بالكلية وجد أن 230 طالب يدرسون على الأقل واحدة من اللغات الإنجليزية، الفرنسية ، الألمانية ووجد أن 135 طـــالب يدرســون اللغــة الإنجليزية ، 86 طالب يدرسون اللغة الفرنسية ، 54 طالب يدرسون اللغة الألمانية ، 30 طالب يدرسون اللغة الإنجليزية والفرنسية ، 35 طالب يدرسون اللغة الإنجليزيــة والألمانية ، 15 طالب يدرسون اللغة الفرنسية والألمانية . تم اختيار طـــالب بطريقــة عشوائية من مجموعة الطلاب . عبر عن ثم ارسم شكل فن للحدث أن الطالب يـــدرس الثلاث لغات وأوجد عدد عناصره . كذلك أوجد عدد عناصر الأحداث المختلفــة في شكل فن .

٤٤- في مجموعة تتكون من 100 طالب وجد أن 20 طالب يدرسون اللغة العربية والرياضيات والعلوم ، 29 طالب يدرسون الرياضيات والعلوم ، 35 طالب يدرسون الرياضيات واللغة العربية ، 26 طالب يدرسون العلوم واللغة العربية ، 8 طلاب يدرسون الرياضيات فقط ، 12 طالب يدرسون العلوم فقط ، 22 طالب يدرسون اللغة العربية فقط . تم اختيار طالب بطريقة عشوائية من مجموعة الطلاب . عبر عن ثم ارسم شكل فن وأوجد عدد عناصر كل من الأحداث الآتية :

١ – الحدث أن الطالب يدرس الرياضيات .

٢ – الحدث أن الطالب يدرس الرياضيات فقط .

٣ – الحدث أن الطالب يدرس الرياضيات والعلوم ولا يدرس اللغة العربية .

٤ – الحدث أن الطالب يدرس الرياضيات ولا يدرس العلوم .

٥ – الحدث أن الطالب يدرس مقررين بالضبط .

٦ – الحدث أن الطالب يدرس مقررين على الأقل .

٧ – الحدث أن الطالب يدرس مقررين على الأكثر .

٨ – الحدث أن الطالب يدرس مقرر واحد على الأقل .

٩ – الحدث أن الطالب يدرس مقرر واحد على الأكثر .

١٠ – الحدث أن الطالب لا يدرس أيا من المقررات الثلاث .

٤٥- في عينة من 225 طالب بأحد الكليات تم سؤال كل منهم عن الألعاب التي يلعبونها فإذا كان 62 طالب يلعبون كرة القدم ، 53 يلعبون كرة السلة ، 65 يلعبون العاب القوى ، 19 يلعبون كرة القدم وكرة السلة ، 14 يلعبون كرة القدم والعاب القوى ، 21 يلعبون كرة السلة والعاب القوى ، 8 لا يلعبون أياً من الألعاب الثلاث . تم اختيار طالب بطريقة عشوائية من مجموعة الطلاب . عبر عن ثم ارسم شكل فن وأوجد عدد عناصر كل من الأحداث الآتية :

١ – الطالب يلعب كرة القدم فقط .

٢ – الطالب يلعب لعبة واحدة فقط .

٣ – الطالب لا يلعب كرة السلة .

٤ – الطالب يلعب لعبتين فقط .

٥ – الطالب يلعب لعبتين على الأقل.

٦ – الطالب يلعب لعبتين على الأكثر.

٤٦- في تجربة إلقـــاء حجر نرد مرة واحدة ، إذا كان الحدث A هو ظهور عدد أقل من 5 والحدث B هو ظهور عدد اكبر من 3 ، هل الحدثان A , B حدثان متنافيان ؟

٤٧- في تجربة إلقاء عملة معدنية وحجر نرد على التوالي اكتب فضاء عينة مناسب للتجربـــة وحدد مجموعة من أربعة أحداث توضح بها مفهوم التجزيء لفضاء العينة .

٤٨- في تجربـــة اختيـــار عـــدداً عشـــوائياً مـــــن مجموعـــــة الأعـــــداد الطبيعيـــــة {1,2,3, ... , 500} فإذا كان الحدث A هو اختيار عدد زوجي والحدث B هـو اختيار عدد فردى والحدث C هو اختيار عدد يقبل القسمة على 3 والحدث D هـو اختيار عدد يقبل القسمة على 5 والحدث E هو اختيار عدد يقبل القسمة على 6 . اكتب عناصر كل من الأحداث A , B , C , D , E ووضح أيـــاً منـــها يكـــون أحداث متنافية وأياً منها يُكوّن تجزئ لفضاء العينة .

٤٩- للعائلات التي لديها أربعة أطفال و مع مراعاة الترتيب في الولادة ، اكتب مـــن عنـــدك بعض الأحداث المتنافية وأكتب ثلاثة أمثلة مختلفة لأحداث تُمثل تجزئ لفضاء العينة .

٥٠- أكتب حدثان متنافيان ويكونان تجزئ لفضاء العينة لكل من التجارب العشوائية الآتية :

١ - إلقاء عملة معدنية باستمرار وحساب عدد المرات اللازمة حتى يظهر وجه الصـــورة لأول مرة .

٢ - إلقاء حجر نرد باستمرار وحساب عدد المرات اللازمة حتى يظهر رقم6 لأول مرة.

٣ - اختيار نقطة بطريقة عشوائية داخل دائرة .

٤ - اختيار نقطة عشوائيا داخل المستطيل المحدود بالمستقيمات $x=\pm5$, $y=\pm 4$.

٥ - اختيار نقطة عشوائيا داخــــل ســـطح الاســـطوانة $x^2 + z^2 = 9$ ومحـــدودة بالمستويات $y=1$, $y = 5$.