# الباب التاسع

## المعدلات الزمنية المرتبطة

## Related Rates

### ٩-١ : عام

عملياً ، فإن الظواهر المختلفة لا تتأثر بعامل متغير واحد فقط ولكنها فى كثير من الحالات تتأثر بعدة عوامل مختلفة .

وعند تمثيل هذه الظاهرة بعلاقة فى صورة دالة فإن المتغير التابع فى هذه الدالة (الظاهرة) يكون دالة فى أكثر من متغير .

وقد درسنا فى الباب السابق الدوال ذات المتغير الواحد وهى فى الواقع مجرد تبسيط للواقع .

وعموماً فإنه يقصد بالمسائل المدرجة تحت هذا العنوان ، بتلك التى تحتوى على الأقل على متغيرين مرتبطين بالزمن ، أى أن كلاً من المتغيرين مرتبط بالزمن .

فإذا ما قمنا بمفاضلة هذه الدالة بالنسبة للزمن فإن الناتج يكون عبارة عن معادلة بين مشتقات هذه المتغيرات بالنسبة للزمن .

ويُطلق حينئذ على معدلات تغير الأزمنة لهذه المتغيرات بأنها مرتبطة .

فمن المعادلة التى تربط بين الظاهرة والمتغيرات المختلفة بها يمكننا إيجاد علاقة بين المعدلات الزمنية المختلفة لكل متغير ، بحيث أنه إذا علمنا أحد هذه المعدلات ، يمكن معرفة المعدل الثانى أو الآخر .

والأمثلة المحلولة التالية توضح هذا الموضوع بمزيد من التفسير مع بيان أهمية ذلك فى مختلف أوجه الحياة العملية خاصة الهندسية والفيزيائية منها .

### ٩-٢ :- أمثلة محلولة :-

**(١) أوجد معدل تغير حجم كرة بالنسبة إلى نصف قطرها " عند تمددها " وذلك باستخدام طريقة Δ -** $\Delta - process$

الحـــــــل :-

حجم الكرة = $\frac{4}{3}\pi\ r^3$ حيث r = نصف قطر الكرة

وحيث أن معدل التغير يمكن تعريفه كالتالى :-

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad , \quad \Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$$

لذلك ففى حالتنا هذه يكون معدل التغير كالتالى :-

$$\lim_{\Delta r \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta r} \qquad , \quad \Delta v = f(r+\Delta r) - f(r)$$

$$, \because v = \frac{4}{3}\pi\ r^3 \qquad i.e \quad v = f(x) = v(r)$$

$$, f(r+\Delta r) = \frac{4}{3}\pi\ (r+\Delta r)^3$$

$$\therefore \Delta v = f(r+\Delta r) - f(r)$$

$$= \frac{4}{3}\pi (r+\Delta r)^3 - \frac{4}{3}\pi\, r^3$$

$$= \frac{4}{3}\pi \left[r^3 + 3r^2 \,.\, \Delta r + 3r \,.\, (\Delta r)^2 + (\Delta r)^3\right] - \frac{4}{3}\pi\ r^3$$

$$= \frac{4}{3}\pi\ \left[3r^2 \,.\, \Delta r + 3r(\Delta r)^2 + (\Delta r)^3\right]$$

$$\therefore \frac{\Delta v}{\Delta r} = \frac{4\pi}{3}\left[3r^2 + 3r\ \Delta r + (\Delta r)^2\right]$$

$$, \lim_{\Delta r \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta r} = 4\pi\ r^2$$

وهو معدل تغير حجم الكرة .

**(٢) يزيد حجم كرة بمعدل ثابت يبلغ $24\ cm^3 / \sec$ ، فاحسب نصف قطرها عندما يكون معدل تغير نصف القطر بالنسبة للزمن مساوياً لثلاثة أضعاف نصف القطر ، وذلك باستخدام طريقة Δ**

الحـــــــل :-

حجم الكرة :- $V = \frac{4}{3}\pi\ r^3$

ويمكننا إيجاد $\frac{dv}{dr}$ بدلالة r . وبتفاضل هذه المعادلة يمكن إيجاد $\frac{dv}{dt}$ بدلالة r ، $\frac{dr}{dt}$

وذلك لأن :-

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr} \cdot \frac{dr}{dt}$$

$$, \because \frac{dv}{dt} = 24$$

$\therefore$ نقوم بحساب r عندما $\frac{dr}{dt} = 3r$ ،

وباستخدام طريقة $\Delta$ :-

$$\frac{dv}{dr} = \frac{f(r+\Delta r) - f(r)}{\Delta r}$$

$$= \frac{\frac{4}{3}\pi\,(r+\Delta r)^3 - \frac{4}{3}\,\pi\ r^3}{\Delta r}$$

$$= \frac{\frac{4\pi}{3}\left[r^3 + 3r^2\ .\ \Delta r + 3r\,(\Delta r)^2 + (\Delta r)^3\right] - \frac{4}{3}\pi\ r^3}{\Delta r}$$

$$= \frac{4\pi\, r^2\ .\ \Delta r + 4\ \pi\ r\ .\ (\Delta r)^2 + \frac{4}{3}\pi\ (\Delta r)^3}{\Delta r}$$

$$= 4\pi\, r^2 + 4\pi\, r\ .\ \Delta r + \frac{4}{3}\pi\,(\Delta r)^2$$

$$، \frac{dv}{dt} = \lim_{\Delta r \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta r} = \lim_{\Delta r \to 0}\ 4\pi\, r^2 + 4\pi\, r\ .\ \Delta r + \frac{4}{3}\pi\,(\Delta r)^2 = 4\pi\, r^2$$

$$, \frac{dv}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} = 4\pi\, r^2\ .\ \frac{dr}{dt}$$

$$, \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} = 4\pi\, r^2\ .\ \frac{dr}{dt}$$

وبالتعويض عن قيمة : $\frac{dv}{dt} = 24$ ، عن قيمة : $\frac{dr}{dt} = 3r$

ثم نحل المعادلة فى r :-

$$24 = 4\pi\, r^2\ .\ (3r) = 12\pi\, r^3$$

$$\therefore r^3 = \frac{2}{\pi}$$

$$\therefore r\ = \sqrt[3]{\frac{2}{\pi}}$$

**(٣) يتم نفخ بالون ، وبزيادة نصف قطره ، يزداد حجمه فاوجد معدل زيادة الحجم عندما $r = 5\ mt$ ، بطريقة $\Delta$**

**الحـــــل :-**

نفترض أن حجم الكرة V

$$, V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

ومعدل تغير حجم البالون ( الكرة ) :-

$$Lim \frac{\Delta v}{\Delta r} \quad , \quad \Delta v = f(r+\Delta r) - f(r)$$

$$، \ f(r+\Delta r) = \frac{4}{3}\pi\ (r+\Delta r)^3$$

$$\therefore \Delta v = f(r+\Delta r) - f(r)$$

$$= \frac{4}{3}\pi (r+\Delta r)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$= \frac{4}{3}\pi \left[r^3 + 3r^2\ .\ \Delta r + 3r(\Delta r)^2 + (\Delta r)^3\right] - \frac{4\pi\ r^3}{3}$$

$$، \ \frac{\Delta v}{\Delta r} = 4\pi\ r^2 + 4\pi\ r\ .\ \Delta r + \frac{4}{3}\pi\ (\Delta r)^2$$

$$, \ \underset{\Delta r \to 0}{Lim} \frac{\Delta v}{\Delta r} = \underset{\Delta r \to 0}{Lim} \quad 4\pi\ r^2 + 4\pi\ r\ .\ \Delta r + \frac{4}{3}\pi\ .\ (\Delta r)^2 = 4\pi\ r^2$$

.

وهذا يمثل معدل زيادة الحجم أى $\left(\frac{dv}{dr} = 4\pi\ r^2\right)$

وعندما يزيد الحجم ويُصبح نصف القطر : $r = 5$

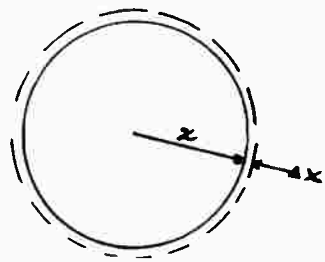
$$\therefore \frac{dv}{dr} = 4\pi\ r^2 = 100\pi \quad m^3$$

وذلك لكل متر تغير فى نصف القطر .

**(٤) صفيحة معدنية دائرية الشكل عُرضت للحرارة فتمددت بانتظام بحيث يزداد نصف قطرها بمعدل $0{,}025\ cm/\sec$ فكم يبلغ معدل زيادة المساحة عندما يكون نصف القطرُ مساوياً $5\ cm$ .**

الحـــــل :-

أنظر شكل (٩-١) .




**شكل (٩-١)**

نفرض أن $x$ هو نصف قطر الصفيحة

، نفرض أن $y$ هى مساحة الصفيحة :

$$\therefore\ y = \pi\ x^2$$

$$،\ \frac{dy}{dt} = 2\,\pi\ x\ \frac{dx}{dt}$$

وعندما $x = 5\ cm$ , $\frac{dx}{dt} = 0.025$

$$\therefore\ \frac{dy}{dt} = 2\,\pi \times 5 \times 0.025 = 0.25\pi\ \ cm^2/\sec$$

**(٥) بالون كروى يتم نفخه بالهواء بمعدل $20\ m^3/\min$ وفى اللحظة التى كان عندها نصف القطر $15\ m$ ، كم يبلغ معدل زيادة مساحة السطح .**

الحـــــل :-

ليكن نصف القطر = r

ومساحة السطح = $S = 4\pi\ r^2$

والحجم = $V = \frac{4}{3}\pi\ r^3$

$$\frac{ds}{dt} = 8\pi\ r\ \frac{dr}{dt}\ ،$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{4}{3}\pi\ .\ 3r^2\ \frac{dr}{dt} = 4\pi\ r^2\ \frac{dr}{dt}\ ,$$

ومنها :-

$$\therefore\ \frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi\ r^2}\ \frac{dv}{dt}$$

$$\therefore\ \frac{ds}{dt} = 8\pi\ r\ .\ \frac{1}{4\pi\ r^2}\ .\ \frac{dv}{dt} = \frac{2}{r}\ .\ \frac{dv}{dt}$$

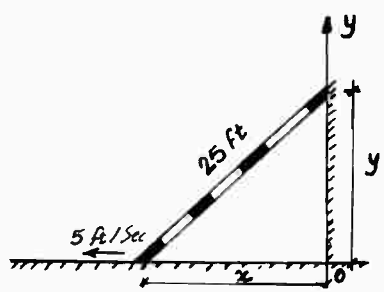
وبالتعويض عن $\frac{dv}{dt} = 20$ ، عن $r = 15$

$$\therefore\ \frac{ds}{dt} = \frac{2}{15}\ .\ 20 = \frac{40}{15} = \frac{8}{3}$$

**(٦) يرتكز سلم طوله $25\ ft$ من أعلى على حائط رأسى ومن أسفل على الأرض فإذا كانت أسفل نقطة بالسلم تنزلق بمعدل $5\ ft/\min$ فأوجد سرعة أعلى نقطة فى السلم على الحائط الرأسى باستخدام طريقة الدالة الضمنية فى عملية التفاضل .**

**الحـــــــل :-**

أنظر الرسم شكل (٩-٢)




**شكل (٩-٢)**

من هندسة الشكل :-

$$x^2 + y^2 = \overline{25}^2$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\left(x^2\right)+\frac{d}{dx}\left(y^2\right)=\frac{d}{dx}(25)^2$$

$$\therefore 2x\,\frac{dx}{dt} + 2y\,\frac{dy}{dt} = 0$$ ( تفاضل ضمنى بالنسبة إلى t )

$$\because V=\frac{dx}{dt} = 5$$

$$\therefore 2x \times 5 + 2y\,\frac{dy}{dt} = 0$$

$$\therefore 2y\,\frac{dy}{dt} = -10\,x$$

$$\therefore \frac{dy}{dt} = -\frac{10\,x}{6\,y} = \frac{-5\,x}{3\,y}$$

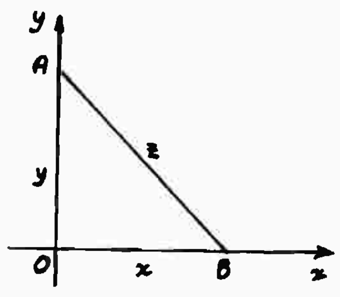
وتعنى إشارة (−) ، أن قمة السلم تنزلق للأسفل على الحائط الرأسى فى اتجاه $YOY'$

**(٧) قاربان B , A بدأ كل منهما فى الإبحار من نفس النقطة متحركاً بعيداً عن الآخر فى اتجاهين متعامدين فإذا كان القارب A يتحرك بمعدل $6\ Km\ /\ h$ بينما يتحرك القارب B بسرعة $8\ Km\ /\ h$ .**

**فكم يبلغ معدل ابتعادهما بعد ساعتين من بدء التحرك .**

**الحـــــل :-**

أنظر الرسم شكل (٩-٣)




**شكل (٩-٣)**

إذا اعتبرنا أن y هى المسافة التى تحركها القارب A

، إذا اعتبرنا أن x هى المسافة التى تحركها القارب B

فإن المسافة بينهما تُصبح مساوية Z :-

$$, Z^2 = x^2 + y^2$$

وبأخذ مشتقة هذه الصيغة $\left(Z^2\right)$ بالنسبة للزمن :-

$$\therefore 2Z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} \qquad \text{.......... (١)}$$

ولما كان القاربان يتحركان بسرعة ثابتة

∴ المسافة التى تحركها القارب A بعد ساعتين :- $x = 6 \times 2 = 12 \;\; km$

، المسافة التى تحركها القارب B بعد ساعتين :- $y = 8 \times 2 = 16 \;\; km$

∴ فالمسافة بينهما بعد ساعتين : Z تساوى :-

$$Z = \sqrt{(12)^2 + (16)^2}$$
$$= \sqrt{144 + 256} = \sqrt{400} = 20 \;\; km$$

وبالتعويض بهذه القيم :- $Z = 20 \;,\; \dfrac{dy}{dt} = 8 \;,\; y = 16 \;,\; \dfrac{dx}{dt} = 6 \;,\; x = 12$

فى المعادلة (١) :

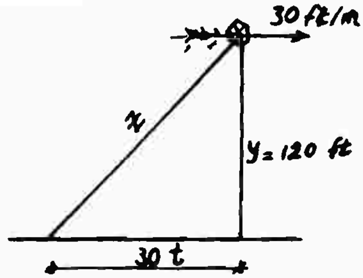
$$\therefore 20 \,.\, \frac{dz}{dt} = 12 \times 6 + 16 \times 8 = 72 + 128 = 200$$

∴ معدل الابتعاد يعادل : $\therefore \dfrac{dz}{dt} = \dfrac{200}{20} = 10 \;\; km/h$

**(٨) يقوم غلام باللعب بطائرة ورقية ، فإذا كانت الطائرة فى لحظة ما تطير فوق يده تماماً وعلى ارتفاع 120 $ft$ ، فإذا كانت الرياح تحرك الطائرة أفقياً بسرعة 30 $ft/\min$ ، فكم يبلغ معدل الشد فى الخيط عندما يكون الطول الحر للخيط مساوياً 150 قدماً .**

**الحـــــل :-**

أنظر الرسم شكل (٩-٤) .




**شكل (٩-٤)**

لدينا :- $y = 120 \ ft$

$$\frac{dx}{dt} = 30 \quad , \quad Z = 150$$

والمسافة الأفقية التى تحركتها الطائرة فى زمن " t " = $30\,t$

والمطلوب هو إيجاد : $\frac{dz}{dt}$

وباستخدام نظرية فيثاغورث :-

$$Z^2 = (30\,t)^2 + (120)^2 \qquad \text{..........} \ (١)$$

$$\therefore 900t^2 = Z^2 - (120)^2$$

$$\therefore t = \frac{1}{30} \times \sqrt{Z^2 - (120)^2} \qquad \text{..........} \ (٢)$$

وبتفاضل المعادلة (١) :-

$$\therefore 2Z\,\frac{dz}{dt} = (30)^2 \times 2t + 0 = 1800\,t$$

$$\therefore \frac{dz}{dt} = \frac{1800\,t}{2\,z} = \frac{900\,t}{z} \qquad \text{..........} \ (٣)$$

وبالتعويض عن قيمة t من (٢) فى المعادلة (٣)

$$\therefore \frac{dz}{dt} = \frac{900\,\sqrt{z^2 - (120)^2}}{30 \times z} = \frac{30}{z}\,\sqrt{z^2 - (120)^2}$$

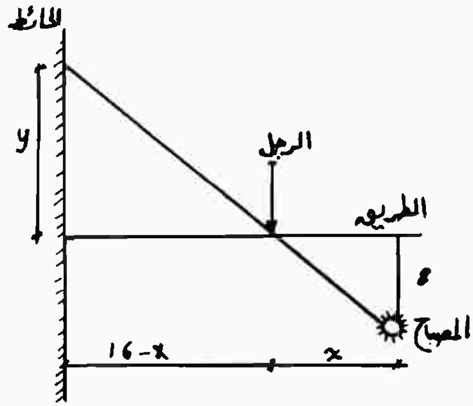
وعندما تكون : $Z = 150 \ ft$ فإن معدل الشد يساوى :-

$$\frac{dz}{dt} = \frac{30}{150}\sqrt{\overline{150}^2 - \overline{120}^2} = \frac{90}{5} = 18 \ ft/\min$$

**(٩) يسير رجل فى طريق متعامد على حائط ، وفى اتجاه الحائط فإذا كان الرجل يقترب من الحائط بمعدل $5\ m/\min$ . فإذا كان هنالك مصباح يبعد $8\ m$ عن الطريق ، $16\ m$ عن الحائط فما هو معدل تحرك ظل الرجل على الحائط فى اللحظة التى يكون فيها الرجل على بعد $8\ m$ من الحائط .**

**الحـــــل :-**

أنظر الرسم شكل (٩-٥) .




**شكل (٩-٥)**

بالرجوع إلى الشكل سنجد أنه :-

$$\frac{dx}{dt} = 5$$

والمطلوب هو $\frac{dy}{dt}$ فى اللحظة التى تكون فيها $x = 8\ m$

ومن هندسة الشكل :-

$$\frac{x}{8} = \frac{16-8}{y}$$

$$\therefore xy = 128 - 8x$$

وحيث أن كلاً من $x$ , $y$ دالة فى الزمن لذلك يلزم أن نفاضل بالنسبة للزمن .

$$\therefore \frac{d}{dt}(xy) = x\frac{dy}{dt} + y\frac{dx}{dt} = -8\frac{dx}{dt}$$

وعندما تكون $x = 8$ , $y = 8$

$$\therefore 8\frac{dy}{dt} + 8 \times 5 = -8 \times 5$$

$$\therefore 8\frac{dy}{dt} = -80$$

$$\therefore \frac{dy}{dt} = -10$$

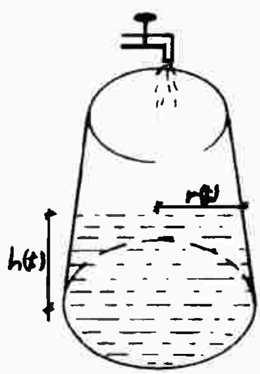
وعليه فإن فى اللحظة المذكورة فإن ظل الرجل يتحرك بمعدل $10\ m/\min$

والإشارة السالبة تعنى أن الظل يتحرك إلى اليمين ويتناقص مع الزمن .

**(١٠) ينساب الماء إلى خزان ( وعاء ) بشكل مخروطى بمعدل $5\ Liter/\min$ فما هو معدل ارتفاع الماء فى الوعاء عند أى لحظة ؟**

**الحـــــل :-**

أنظر الرسم شكل (٩-٦) .




**شكل (٩-٦)**

عند أى لحظة ولتكن t دقيقة بعد أن يبدأ الماء فى الانسياب بالوعاء ،

نعتبر أن h (t) هى عمق الماء ، أن r (t) هى نصف قطر سطح الماء فى الوعاء وحيث أن حجم الماء يتغير تبعاً لتغير الوقت .

$\therefore V(t) = \frac{1}{3}\pi \left[r(t)\right]^2 . h(t)$ .......... (١)

ومن المعطيات فى المسألة فإن حجم الماء فى الخزان عند أى لحظة (t) يساوى :-

$V(t) = 5t$

$\therefore 5t = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

وللتعبير عن الحجم بدلالة متغير واحد فإنه باستخدام تشابه المثلثات بالشكل نجد أن :-

$\frac{r}{1.5} = \frac{h}{3} \quad i.e \quad h = 2r. \quad or :- \quad r = \frac{h}{2}$ .......... (٢)

وبالتعويض من (٢) فى (١) عن قيمة r :-

$$V(t) = 5t = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{h}{2}\right)^2 \times h = \frac{\pi h^3}{6}$$

$$\therefore 30t = \pi h^3 \qquad \therefore h = \sqrt[3]{\frac{30t}{\pi}}$$

$$\therefore h = \left(\frac{30}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \times (t)^{\frac{1}{3}}$$

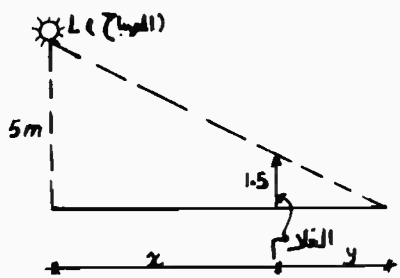
$$\therefore \frac{dh}{dt} = \left(\frac{30}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \times \frac{1}{3} t^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{30}{\pi t^2}} = \sqrt[3]{\frac{30}{27\pi t^2}} = \sqrt[3]{\frac{10}{9\pi t^2}}$$

وهو معدل ارتفاع الماء فى الوعاء المخروطى عند أى لحظة t .

**(١١) يبتعد غلام طوله $1.5\ m$ من مصباح مُعلق على ارتفاع $5\ m$ احسب معدل تغير طول ظل الغلام ، إذا كان يبتعد بمعدل $56\ m$ لكل دقيقة .**

**الحـــــل :-**

أنظر الرسم شكل (٩-٧) .




**شكل (٩-٧)**

نفترض $x$ هى المسافة بين الغلام وأسفل المصباح تماماً

ونفترض $y$ هى طول ظل الغلام على الأرض

ومـن الشكل :-

$$\frac{y}{y+x}=\frac{1.5}{5}$$

$$\therefore 5\,y = 1.5\,y + 1.5\,x$$

$$\therefore 3.5\,y = 1.5\,x$$

$$\therefore y=\frac{1.5}{3.5}\,x$$

وبإجراء التفاضل بالنسبة للزمن :

$$\therefore \frac{dy}{dt}=\frac{1.5}{3.5}\;\frac{dx}{dt}=\frac{3}{7}\;\frac{dx}{dt}$$

، $\because$ $\frac{dx}{dt}$ تساوى 56 = معدل ابتعاد الغلام

, $\frac{dy}{dt}$ معدل تغير طول الظل

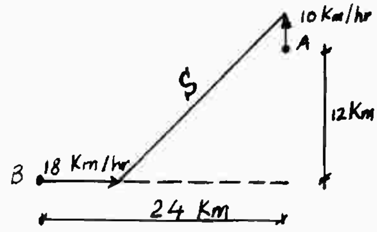
$$\therefore \frac{dy}{dt}=\frac{3}{7}\times 56 = 24\;\; m/\min$$

**(١٢) سفينتان A , B تُبحر السفينة A إلى الشمال بسرعة 10 $km/hr$ بينما السفينة B والتى تقع إلى جنوب A بمقدار 12 $km$ وإلى غربها بمقدار 24 $km$ ، تبحر إلى الشرق بسرعة 18 $km/hr$**

**فما هو معدل تغير المسافة بين السفينتين ، وكم تتحرك السفينة B قبل أن تبدأ المسافة بينهما فى التناقص .**

**الحـــــل :-**

انظر الرسم شكل (٩-٨) .




**شكل (٩-٨)**

نفترض أن S هى المسافة بين السفينتين بعد تحركهما لمدة t ساعة من موضع البداية .

وعندما $t = 0$ فإن المسافة النسبية بينهما تكون $S_0$ وتساوى :-

$$S_0 = \sqrt{\overline{24}^2 + \overline{12}^2} = \sqrt{720} = 26.83 \ km$$

وبعد فترة زمنية t فإن السفينة B تكون على بعد $(24 - 18\,t)$ من نقطة 0

بينما تكون السفينة A على بُعد $(12 + 10\,t)$ من 0

وبــذلك تكون المسافة الجديدة :-

$$S = \sqrt{(24 - 18\,t)^2 + (12 + 10t)^2}$$

$$= \sqrt{720 - 624\,t + 424\,t^2}$$

$$\text{،} \ \frac{ds}{dt} = \frac{1 \times (-624 + 848t)}{2\sqrt{720 - 624t + 424t^2}}$$

$$= \frac{-312 + 424\,t}{\sqrt{720 - 624t + 424t^2}}$$

وعند موضع البداية عندما تكون $t = 0$ فإن :-

$$\frac{ds}{dt} = \frac{-312 + 424 \times 0}{\sqrt{720 - 624 \times 0 + 424 \times 0}} = \frac{-312}{26.83} = -11.63$$

ولما كانت إشارة $\frac{ds}{dt}$ سالبة ، لذلك فإن المســافة بـين الســفينتين تتنـاقص ويقتربـان مـن بعضهما بمعدل $11.63 \ km/h$ عند موضع البداية .

وتتوقف المسافة بين السفينتين عن التناقص عندما $\frac{ds}{dt} = 0$ والتى تعنى :-

$$\frac{ds}{dt} = \frac{-312 + 424\,t}{\sqrt{720 - 624 + 424\,t^2}} = 0$$

$$i\,.\,e \quad -312 + 424\,t = 0$$

وبحل المعادلة لإيجاد قيمة t التى عندها تكون المسافة النسبية ثابتة ثم تبدأ فى الزيادة .

$$\therefore t = \frac{312}{424} = 0.736 \quad hour$$

وبتعبير آخر فإنه بعد $0.736\ h$ من تحركهما من نقطة البداية تبدأ المسافة بينهما فى الزيادة ، حيث تتحرك السفينة B مسافة قدرها :-

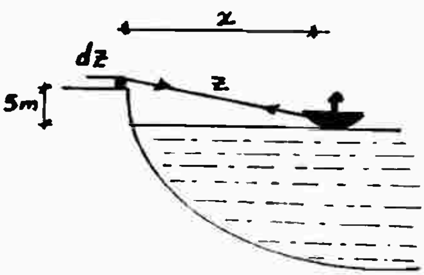
$$0.736 \times 18 = 13.25\ km$$

قبل أن تبدأ المسافة فى التزايد .

**(١٣) قارب يتم سحبه إلى رصيف الميناء الذى يرتفع 5 أمتار فوق سطح الماء فإذا كان سحب القارب بالحبل يتم بمعدل $2\ m/\sec$ . فما هى السرعة التى يقترب بها القارب من قاعدة رصيف الميناء عندما يكون طول الحبل $13\ m$ مع إهمال الارتخاء فى الحبل .**

**الحـــل :-**

أنظر الرسم شكل (٩-٩) .




**شكل (٩-٩)**

لدينا : $\frac{dz}{dt} = 2\ m/\sec$

$, Z = 13\ \ mt$

والمطلوب إيجاد $\frac{dx}{dt}$

وعند أى لحظة t يكون :-

$$5^2 + x^2 = z^2$$

وبالتفاضل بالنسبة للزمن

$$\therefore 0 + 2x\frac{dx}{dt} = 2z\frac{dz}{dt} \qquad \text{........ (١)}$$

وعندما تكون $z = 13\ \ mt$ فإن $x$ :

$$x = \sqrt{(13)^2 - (5)^2}$$
$$= \sqrt{169 - 25} = 12 \qquad \text{........ (٢)}$$

وبالتعويض عن قيمة $z = 13$ ، $x$ من المعادلة (٢) تساوى 12 فى المعادلة (١)

$$\therefore 2 \times 12\frac{dx}{dt} = 2 \times 13 \times 2$$

$$\therefore \frac{dx}{dt} = \frac{52}{24} = 2.17\ \ m/\sec$$

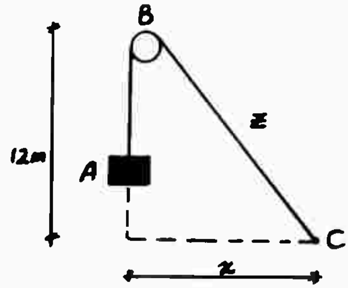
أى أن القارب يقترب من قاعدة الرصيف بمعدل $2.17\ \ m/\sec$

**(١٤) يقوم رجل برفع وعاء من الأسمنت إلى أحد البنايات على ارتفاع $12\ \ m$ من مستوى يده بواسطة حبل يمر على بكرة فوق سقف البناية .**

**فإذا كانت يده على ارتفاع ثابت من مستوى الأرض وكان يتحرك بعيداً عن الوعاء بمعدل $1.5\ \ m/\sec$ ، فما هى سرعة ارتفاع وعاء الأسمنت عندما يكون على بعد $8\ m$ من الوعاء .**

**الحـــــل :-**

أنظر الرسم شكل (٩-١٠) .




**شكل (٩-١٠)**

الوعاء عند A

مستوى يد الرجل عند C

سقف البناية عند B ومركب عندها بكرة وعلى ارتفاع $12\ m$

والحبل ABC يمر فوق البكرة B

والمطلوب حساب $\frac{dz}{dt}$ (وهى تعادل تماماً سرعة ارتفاع وعاء الأسمنت)

وذلك عندما $\frac{dx}{dt} = 1.5$ , $x = 8m$

ومن المثلث القائم الزاوية فى A ( BAC ) :-

$$x^2 + (12)^2 = z^2$$

$$\therefore z^2 = x^2 + 144$$

$$\therefore z = \sqrt{x^2 + 144} = \left(x^2 + 144\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{2}\left(x^2 + 144\right)^{-\frac{1}{2}} \times 2x \times \frac{dx}{dt}$$

وبوضع $\frac{dx}{dt} = 1.5$ , $x = 8$

$$\therefore \frac{dz}{dt} = \frac{1}{2}(64 + 144)^{-\frac{1}{2}} \times 2 \times 8 \times 1.5$$

$$= 12(208)^{-\frac{1}{2}} = \frac{12}{\sqrt{208}} = \frac{12}{14.422} = 0.832 \ m/\sec$$

وذلك عندما يكون الرجل على بعد 8 أمتار من وعاء الأسمنت .

**(١٥) بالون كروى يتم نفخه بحيث يزداد نصف قطره بمعدل $5 \ cm/\sec$ فاوجد معدل الزيادة فى مساحة سطح وحجم البالون عندما يصبح نصف قطر البالون $20 \ cm$ .**

**الحـــــل :-**

S = مساحة سطح الكرة = $4\pi \ r^2$

V = حجم الكرة = $\frac{4}{3}\pi \ r^3$

والمطلوب هو حساب $\frac{dv}{dt}$ , $\frac{ds}{dt}$ عندما تكون $r = 20$

وحيث أنه معلوم لدينا $\frac{dr}{dt} = 5 \ cm/\sec$ فإنه يمكن الحصول على المطلوب

بإجراء التفاضل بالنسبة للزمن ووضع $\frac{dr}{dt} = 5$ , $r = 20$

$$\because \ S = 4\pi \ r^2$$

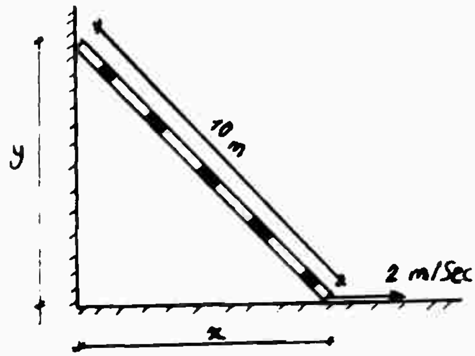
$$\therefore \frac{ds}{dt} = 8\pi \ r\frac{dr}{dt} = 8\ \pi \ .(20)\ (5) = 800\ \pi \quad cm^2/\sec$$

$$, \because V = \frac{4}{3}\pi \ r^3$$

$$\therefore \frac{dv}{dt} = 4\ \pi \ r^2 \ \frac{dr}{dt} = 4\ \pi \ (400)\ (5) = 8000\pi \ \ cm^3/\sec$$

**(١٦) يستند سلم على حائط رأسى ، طول السلم = $10 \ m$ ، فإذا تحركت نهاية السلم على الأرض بعيداً عن الحائط بمعدل $2 \ m/\sec$ ، فاحسب السرعة التى تنزلق بها قمة السلم على الحائط الرأسى عندما تكون قاعدة السلم على بعد $6 \ m$ من الحائط**

**الحـــــل :** - انظر الرسم شكل ( ٩ - ١١ ) .




شكل ( ٩ - ١١ )

بالرجوع للشكل :

$$x^2 + y^2 = 100$$

وبإجراء التفاضل بالنسبة للزمن $t$

$$\therefore 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dt} = \frac{-x}{y}\,\frac{dx}{dt}$$

وعندما تكون $x = 6\ m$ : -

$$\therefore y = \sqrt{100-36} = \sqrt{64} = 8 \quad m\,.$$

وحيث أن $\frac{dx}{dt} = 2\ m/\sec$ : -

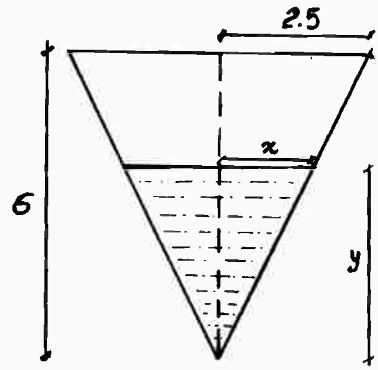
$$\therefore \frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}\frac{dx}{dt} \quad = \frac{-6}{8}\times 2 = -1.5 \quad m/\sec.$$

وتعنى الإشارة السالبة أن قمة السلم تهبط لأسفل .

**(١٧) : - يوضح شكل ( ٩ - ١٢ ) مقطع طولى ماراً بمحور خزان مخروطى الشكل ارتفاعه الكلى = $6\ m$ ونصف قطر القاعدة العلوية = $2.5\ m$ وينساب الماء للخزان بمعدل $150\ lit/m$ .**

**فاحسب معدل ارتفاع سطح الماء فى الخزان عندما يكون ارتفاع الماء به $1.5\ m$**

الحــــل : -




**شكل ( ٩ - ١٢ )**

نعتبر عمق الماء فى الخزان ( ارتفاع الماء ) $= y$

، نعتبر نصف قطر سطح الماء $= x$

، نعتبر حجم الماء فى الخزان بعد فترة زمنية $t = V$

ومن تشابه المثلثات بالشكل .

$$\therefore \frac{x}{y} = \frac{2.5}{6}$$

$$\therefore x = \frac{2.5}{6} y$$

$$\therefore V = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{2.5}{6} y\right)^2 - y = \frac{2.5\pi}{108} y^3 \; .m^3$$

وبإجراء التفاضل بالنسبة للزمن $t$ ووضع $\frac{dV}{dt} = 0.15\ m^3 / \min$

$$\therefore \frac{dV}{dt} = \frac{7.5\pi}{108} y^2 \frac{dy}{dt}$$

$$\therefore \frac{dy}{dt} = \frac{0.15 \times 108}{7.5\pi\ y^2}$$

وعندما تكون $y = 1.5\ m$

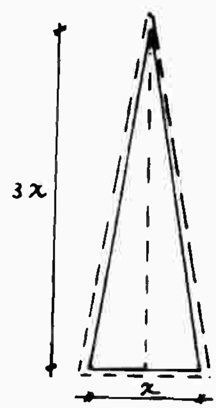
$$\therefore \frac{dy}{dt} = \frac{0.15 \times 108}{7.5 \times \pi \times (1.5)^2} = \frac{16.2}{23.56 \times 2.25} = 0.305\ m / \min$$

أى أن الماء يرتفع بمعدل $30.5\ cm$ لكل دقيقة تحت نفس الظروف بالمسألة .

**(١٨) صفيحة معدنية على شكل مثلث متساوى الساقين ، وارتفاع المثلث يساوى ثلاثة أضعاف طول القاعدة فإذا كانت الصفيحة تتمدد بتأثير حرارة التسخين مما يؤدى لزيادة طول القاعدة بمعدل يبلغ** $0.05\ cm/\sec$.

**فاوجد معدل التغير فى مساحة الصفيحة عندما يكون طول القاعدة** = $16\ cm$ **وكذلك معدل التغير فى طول كل من ساقى الصفيحة المثلثة .**

**الحــــل** : - انظر الرسم شكل ( ٩ - ١٣ ) .




**شكل ( ٩- ١٣ )**

نعتبر طول قاعدة الصفيحة = $x\ cm$

وأن ارتفاعها = $3x\ cm$

وأن مساحتها A :- $A = \frac{x}{2}.3x\ cm^2$

وأن طول ضلعها : - $y\ cm$

$\frac{dx}{dt} = 0.05\ cm/\sec.$,

والمطلوب أولا هو إيجاد $\frac{dA}{dt}$ عندما تكون $x = 16\ cm$

$\because \quad A=\frac{x}{2}.3x=\frac{3}{2}x^2$

$$\therefore \frac{dA}{dt}=3x\frac{dx}{dt}=3\times\frac{16}{2}\times 0.05=1.2\ cm^2/\sec.$$

ولإيجاد المطلوب ثانياً وهو : $\frac{dy}{dt}$ ، من هندسة الشكل

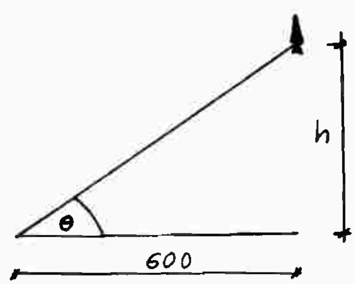
$$y^2 \quad =(3x)^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2=9.25\,x^2$$

$$\therefore y \quad = x\sqrt{9.25}$$

$$\therefore \frac{dy}{dt}=\sqrt{9.25}\ \frac{dx}{dt}\ =\sqrt{9.25}\times .0.05=0.152\quad cm/\sec.$$

**(١٩) ينطلق صاروخ رأسياً لأعلى من فوق منصة إطلاق تبعد $600\ ft$ عن نقطة مراقبة . فإذا كانت زاوية الارتفاع للصاروخ من نقطة الملاحظة تتغير بمعدل $0.5\ rad./\sec.$ ، فما هى سرعة الصاروخ الرأسية فى اللحظة التى تكون فيها زاوية الارتفاع = $45^\circ$**

**الحـــــل** :- انظر الرسم شكل (٩-١٤) .




**شكل (٩-١٤)**

نعتبر أن ارتفاع الصاروخ بعد فترة زمنية قدرها t هو h وأن زاوية الارتفـاع حينئـذ هى θ .

ومن الشكل :-

$$\therefore \frac{h}{600} = \tan\theta \quad or \quad h = 600\tan\theta$$

وبالتفاضل بالنسبة للزمن t :-

$$\therefore \frac{dh}{dt} = 600\sec^2\theta\,\frac{d\theta}{dt} \quad , \quad \left[\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x\right]$$

وذلك عند أى لحظة t حيث $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$

$$\because \frac{d\theta}{dt} = 0.5\ rad./\sec$$

$\therefore$ سرعة الصاروخ :-

$$\frac{dh}{dt} = 600\sec^2\theta \times \frac{1}{2} = 300\sec^2\theta$$

وفى اللحظة التى تكون فيها $\theta = \frac{\pi}{4}$ فإن سرعة الصاروخ $\frac{dh}{dt}$ :-

$$\frac{dh}{dt} = 300\left(\sqrt{2}\right)^2 = 600\ ft/\sec. \quad \left[\sec\frac{\pi}{4} = \sqrt{2} = \frac{1}{\cos\pi/4} = \sqrt{2}\right]$$

ويمكن حل هذه المسألة بمعرفة تفاضل الدوال المثلثية العكسية

حيث أن $\theta$ هى الزاوية التى ظلها $\frac{h}{600}$

$$\therefore \theta = arc\tan\frac{h}{600} = \tan^{-1}\frac{h}{600}$$

$$، \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dh}\cdot\frac{dh}{dt}$$

$$, \frac{d\theta}{dh} = \frac{1}{600}\left[\frac{1}{1+\frac{h^2}{(600)^2}}\right] \quad , \quad \left[\frac{d}{dx}arc\tan x = \frac{1}{1+x^2}\right]$$

$$\therefore \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{600 + \frac{h^2}{(600)}} \times \frac{dh}{dt}$$

$$\therefore \frac{dh}{dt} = \left[600 + \frac{h^2}{(600)}\right]\frac{d\theta}{dt}$$

وعندما $\theta = \frac{\pi}{4}$ ، $h = 600$

$$\therefore \left[\frac{dh}{dt}\right]_{\theta=\frac{\pi}{4}} = \left[600 + \frac{(600)^2}{(600)}\right] \times \frac{1}{2} = 600 \ ft/\sec.$$

**(٢٠) إذا كانت تكلفة بيع x "من سلعة ما" تعطى بالعلاقة :-**

$$c = 500 + x + \frac{1}{x}$$

**وعند بيع السلعة رقم 50 ، لوحظ أن معدل البيع هو 20 سلعة في الساعة . فما هو معدل تغير تكلفة البيع عند هذه اللحظة .**

**الحـــــل** :- معدل المبيعات هو التغير فى عدد السلع $(x)$ بالنسبة للزمن

أى :- $\frac{dx}{dt}$ ولدينا $\frac{dx}{dt} = 20$

والمطلوب هو إيجاد معدل تغير التكلفة مع الوقت أى $\frac{dc}{dt}$ فى اللحظة التـى يكـون فيهـا $x = 50$

$$, \because c = 500 + x + \frac{1}{x}$$

$$\therefore \frac{dc}{dt} = \frac{d}{dt}(500) + \frac{d}{dt}(x) + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= 0 + \frac{dx}{dt} + \left(\frac{-1}{x^2}\right)\frac{dx}{dt}$$

$$= \frac{dx}{dt} - \frac{1}{x^2}\ \frac{dx}{dt}$$

$$= \frac{dx}{dt}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$$

وبوضع $x = 50$ , $\frac{dx}{dt} = 20$

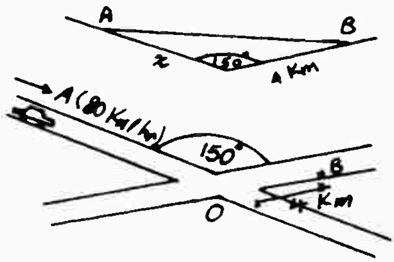
$$\therefore \frac{dc}{dt} = 20\left(1 - \frac{1}{(50)^2}\right) = 20(1 - 0.0004)$$

$$= 20 \times 0.9996 = 19.992$$ وحدة نقدية .

**(٢١) طريقان يتلاقيان فى رأس زاوية قياسها $150°$ ، تسير سيارة على أحد الطريقين بسرعة قدرها $80 \ km/h$ فى اتجاه نقطة التقاطع O ، أوجد معدل اقتراب**

**السيارة A من النقطة B على الطريق الآخر والتى تبعد عن O بمقدار $4\ km$ ، وذلك فى اللحظة التى تكون فيها السيارة على بعد يعادل $3\ km$ من O .**

**الحـــــل** :– انظر الرسم شكل (٩–١٥) .




**شكل (٩– ١٥)**

نفترض أن بعد السيارة A عن O = $x\ km$

، نفترض أن بعد السيارة A عن B = $y\ km$

، لدينا : $\dfrac{dx}{dt} = 80\ km/h$

ومن المثلث المنفرج الزاوية AOB فى O :

$$\overline{AB}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{BO}^2 - 2AO\,.\,BO\ \cos 150^\circ$$

$$\therefore y^2 = x^2 + 16 - 2 \times x \times 4 \times (-0.866)$$

$$= 16 + x^2 + 6.928\ x$$

$$= x^2 + 6.928\ x + 16$$

$$\therefore 2y\frac{dy}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 6.928\frac{dx}{dt}$$

$$= \frac{dx}{dt}(2x + 6.928) \qquad \ldots\ldots\ldots\ (١)$$

والمسافة y عندما تكون $x = 3$

$$y^2 = 9 + 16 - 2 \times 3 \times 4 \times (-0.866)$$

$$= 25 + 20.784 = 45.784$$

$\therefore y = 6.766 \ km$

وبالتعويض فى المعادلة (١)

$$\therefore 2 \times 6.766 \times \frac{dy}{dt} = 80\ (2 \times 3 + 6.928) = 12.928 \times 80$$

$$\therefore \frac{dy}{dt} = 76.43 \quad km/hr$$

وهو معدل اقتراب السيارة A من النقطة B عند اللحظة المذكورة .

**(٢٢) اسطوانة دائرية قائمة يبلغ ارتفاعها $\frac{12}{5}$ من نصف قطر قاعدتها . احسب معدل تغير الحجم عندما يكون القطر = [$20\ cm$] ، إذا عُلم أن الارتفاع يتغير بمعدل** $0.02 \ cm/\sec.$

**الحـــــل** :- نفرض أن نصف قطر قاعدة الاسطوانة = $r \ cm$

، نفرض أن ارتفاع الاسطوانة = $h \ cm$

، نفرض أن حجم الاسطوانة = $V \ cm^3$

، $\because$ ارتفاع الاسطوانة يعادل $\frac{12}{5}$ مرة نصف قطر القاعدة .

$$\therefore h = \frac{12}{5} r \qquad \frac{dh}{dt} = 0.02 \ cm/\sec$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{12}{5} \frac{dr}{dt}$$

$$\therefore 0.02 = \frac{12}{5} \frac{dr}{dt}$$

$$\therefore \frac{dr}{dt} = \frac{0.1}{12} = \frac{1}{120} \ cm/\sec.$$

$$، \because V = \pi r^2 h \qquad , \qquad h = \frac{12}{5} r$$

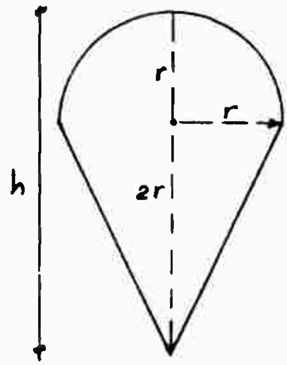
$$\therefore \quad V = \pi r^2 \times \frac{12}{5} r = \frac{12}{5} \pi r^3$$

$$\therefore \frac{dV}{dt} = \frac{12}{5} \pi \times 3r^2 \frac{dr}{dt} = 7.2 \ \pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

وبالتعويض عن $r = 20$ ، $\frac{dr}{dt} = \frac{1}{120}$

$$\therefore \frac{dV}{dt} = 7.2\pi \times 400 \times \frac{1}{120} = 75.4\ cm^3/\sec.$$

**(٢٣) بالون على شكل مخروط دائرى قائم تعلوه نصف كرة كما هو موضح بالشكل (٩-١٦) .**




**شكل (٩-١٦)**

**فإذا كان قطر القاعدة يعادل ارتفاع المخروط ، احسب معدل تغير الحجم بالنسبة للارتفاع عند نفخ البالون :-**

**الحـــل** :- واضح من الشكل أن $h = 3r$

والمطلوب هو إيجاد $\frac{dV}{dh}$

وعلى ذلك فإنه يلزم أن نوجد علاقة بين $h$ ، $V$

، حجم المخروط $= \frac{1}{3}\pi\ r^2 \times 2r$

، حجم نصف الكرة $= \frac{1}{2} . \frac{4}{3}\pi\ r^3$

$, r = \frac{h}{3}$

والحجم الكلى $= V$ :- $\frac{2}{3}\pi\ r^3 + \frac{2}{3}\pi\ r^3 = \frac{4}{3}\pi\ r^3$

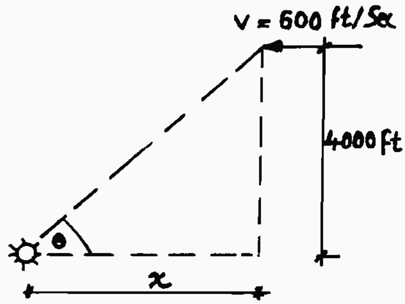
$$\therefore V = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{h}{3}\right)^3 = \frac{4\pi}{81}h^3$$

$$\therefore \frac{dV}{dh} = \frac{4\pi}{27}h^2$$

وبذلك فإن V تتغير بمقدار $\frac{4\pi h^2}{27}$ مرة من h

**(٢٤) طائرة على ارتفاع $4000\ ft$ فى اتجاه الغرب بسرعة تعادل $500\ ft/\sec$ فإذا كانت الطائرة يتم تعقبها بضوء كشاف قوى على الأرض وبفرض ثبات الضوء على الطائرة أثناء تحركها ، أوجد معدل التغير فى زاوية ضوء الكشاف عندما تكون الطائرة على بعد أفقى من مصدر الضوء وفى اتجاه الشرق منه بمقدار $2000\ ft.$ .**

**الحــــــــل** :- انظر الرسم شكل (٩-١٧) .




**شكل (٩-١٧)**

نعتبر المسافة الأفقية بين الكشاف والطائرة عند لحظة زمنية قدرها t sec من البداية = $x$ ، نعتبر θ بالتقدير الدائرى هى زاوية ارتفاع الطائرة بالنسبة للكشاف عند اللحظة t .

ولدينا $\frac{dx}{dt} = -500$ وتعنى الإشارة السالبة أن $x$ تتناقص مع الزمن والمطلوب هو إيجاد $\frac{d\theta}{dt}$ عندما $x = 2000$

$$\tan\theta = \frac{4000}{x} \quad \text{، ..........(١)}$$

وبإجراء التفاضل بالنسبة إلى t فى طرفى المعادلة (١)

$\therefore \sec^2\theta \dfrac{d\theta}{dt} = -\dfrac{4000}{x^2}\dfrac{dx}{dt}$ .......... (٢)

[ ملحوظة :- $\dfrac{d}{d\theta} \tan\theta = \sec^2\theta$ ]

وبوضع $\dfrac{dx}{dt} = -500$ وبالقسمة على $\sec^2\theta$

$$\therefore \frac{d\theta}{dt} = \frac{2000000}{x^2 \sec^2\theta}$$

وعندما $x = 2000$ ، [ فإن $\tan\theta = \dfrac{4000}{2000} = 2$ ]

وبالتعويض بهذه القيم فى المعادلة (٢)

$$\therefore \frac{d\theta}{dt} = \frac{2000000}{4000000 \sec^2\theta}$$

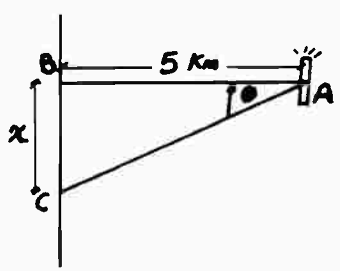
$$\because \sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta = 1 + (2)^2 = 5$$

$$\therefore \frac{d\theta}{dt} = \frac{2000000}{4000000 \times 5} = \frac{1}{10}$$

وعليه فإن فى اللحظة المذكورة فإن زاوية الشعاع تزيد بمعدل $\dfrac{1}{10}$ *rad.*/sec. .

**(٢٥) شعاع كشاف يدور على بعد $5\ km$ من شاطئ فإذا كان الكشاف يدور بسرعة زاوية ثابتة ، فما مقدار السرعة التى يدور بها شعاع الضوء ، إذا كانت حزمة الضوء على الشاطئ تتحرك على امتداده بمعدل $15\ km/\text{min.}$ ، عندما تكون الزاوية التى يصنعها الشعاع $60°$ مع الشاطئ .**

**الحـــــل** :- انظر الرسم شكل (٩-١٨) .




**شكل (٩-١٨)**

من الشكل نجد أن :-

$$\tan\theta = \frac{x}{5}$$

$$\therefore x = 5\tan\theta \qquad \text{..........} (١)$$

وبإجراء التفاضل بالنسبة للزمن لطرفى المعادلة (١)

$$\therefore \frac{dx}{dt} = 5\sec^2\theta\,\frac{d\theta}{dt}$$

$$,\because \frac{dx}{dt} = 15\ km/\min.$$

وعندما تكون زاوية $ACB = 60^\circ$ فإن $\theta = 30^\circ$

وبالتعويض بهذه القيم

$$\therefore \frac{dx}{dt} = 15 = 5\sec^2\frac{d\theta}{dt}$$

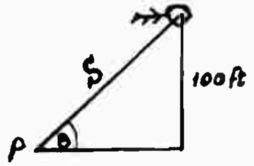
$$\therefore \frac{d\theta}{dt} = \frac{3}{\sec^2\theta} = 3\cos^2\theta = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{9}{4}\ radians/\min. \qquad , \qquad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\therefore$ معدل دوران ضوء الكشاف = $\frac{9}{4}\ rad./\min.$

**(٢٦) يلعب غلام بطائرة ورقية ، ترتفع بمقدار $100\ ft$ عن الأرض فإذا كان الخيط يُسحب من يده بمعدل $10\ ft/\sec.$ نتيجة دفع الريح للطائرة أفقياً على نفس الارتفاع . فما هو معدل تغير زاوية الارتفاع للطائرة عندما تكون الزاوية $30^\circ$ .**

**الحــــل** :- انظر الرسم شكل (٩-١٩) .




**شكل (٩-١٩)**

نعتبر $\theta$ هى زاوية ارتفاع الطائرة .

$$, \frac{ds}{dt} = 10 \ ft/\sec.$$

$$, \sin\theta = \frac{100}{s}$$

والمطلوب إيجاد $\frac{d\theta}{dt}$ عندما تكون $\theta = 30^\circ$ أى تساوى :- $\frac{\pi}{6} \ rad$

$$\therefore \sin\theta = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \ \frac{100}{S} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \ S = 200 \ ft$$

$$, \sin\theta = \frac{100}{S} \qquad \dots\dots\dots\dots (1)$$

وباجراء التفاضل بالنسبة للزمن للمعادلة الأخيرة (١)

$$\therefore \cos\theta \frac{d\theta}{dt} = -\frac{100}{S^2}\frac{ds}{dt}$$

وبالتعويض عن قيمة $S = 200$ , $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , $\frac{ds}{dt} = 10$

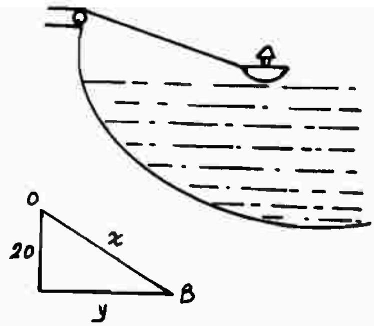
$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{d\theta}{dt} = -\frac{100}{200 \times 200} \times 10$$

$$\therefore \frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{20\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{60} \ rad./\sec$$

**(٢٧) قارب مشدود بحبل مربوط على الرصيف بالميناء ، فإذا تم سحب القارب بسرعة تعادل** $10 \ ft/\sec.$ **وكان مستوى الرصيف يرتفع عن سطح الماء بمقدار** $20 \ ft$ .

**احسب السرعة التى يقترب بها القارب من الرصيف إذا كان طول الحبل وقتئذ** $= 36 \ ft$ .

**الحـــــل** :- أنظر الرسم شكل (٩-٢٠) .




**شكل (٩-٢٠)**

OB هو طول الحبل $x$ والقارب عند B

$$\frac{dx}{dt} = 10 \ ft/\sec \text{ ،}$$

والمطلوب إيجاد $\frac{dy}{dt}$ عندما $x = 36$

ومن الشكل

$$\overline{20}^2 + y^2 = x^2$$

$$\therefore y = \sqrt{x^2 - 400}$$

$$, \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{+1 \times 2x}{2 \times \sqrt{x^2 - 400}} \times \frac{dx}{dt} = \frac{x \frac{dx}{dt}}{\sqrt{x^2 - 400}}$$

وبوضع $\frac{dx}{dt} = -10$ [ علامة - تعنى اقتراب B من O والعكس عند بعدها ] وكذلك بوضع $x = 36$

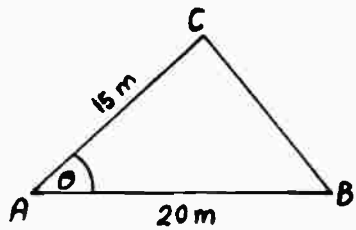
$$\therefore \frac{dy}{dt} = \frac{36 \times -10}{\sqrt{36^2 - 400}} = -\frac{360}{\sqrt{896}} = -\frac{8 \times 45}{8\sqrt{14}} = -\frac{45}{\sqrt{14}}$$

أى أنه عندما يكون طول الحبل $36 \ ft$ وتحت نفس الظروف فإن القارب يقترب بمعدل $\frac{45}{\sqrt{14}} \ ft/\sec$ من الرصيف ( علامة - تعنى الاقتراب من الرصيف )

**(٢٨) ضلعى مثلث يحصران بينهما زاوية قدرها θ وطولاهما $15 , 20 \ m$ ينفرجان للخارج بحيث تزداد الزاوية فيما بينهما ، احسب معدل الزيادة فى طول الضلع**

**الثالث ، فى اللحظة التى تكون فيها الزاوية بين الضلعين $\theta = 60°$ عِلماً بأن الزاوية $\theta$ تزداد بمعدل يبلغ** $2° / sec.$ .

**الحـــــــــل** :- أنظر الرسم شكل (٩-٢١) .




**شكل (٩-٢١)**

من الشكل ، الضلعان هما $AC = 15\ m$ ، $AB = 20\ m$ والزاوية بينهما $= \theta$

$$\frac{d\theta}{dt} = 2° = \frac{1}{90} . \pi$$ ،

والمطلوب هو إيجاد معدل تغير طول الضلع BC أى $\frac{d}{dt}(BC)$ عندما تكون $\theta = 60°$

$$\overline{BC}^2 = \overline{15}^2 + \overline{20}^2 - 2 \times (15) \times (20) \cos \theta ,$$

$$\therefore \overline{BC} = 225 + 400 - 600 \cos \theta$$

$$\therefore BC = (625 - 600 \cos \theta)^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \frac{d}{dt}(BC) = \frac{1 \times (-600 \times -\sin \theta)\frac{d\theta}{dt}}{2\,(625 - 600 \cos \theta)^{\frac{1}{2}}}$$

وبوضع $\theta = 60$ ، $\frac{d\theta}{dt} = \frac{\pi}{90}$

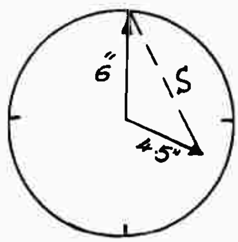
$$\therefore \frac{d}{dt}\overline{BC} = \frac{(600 \sin \theta)\left(\frac{\pi}{90}\right)}{2\left(625 - 600 \times \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{600 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\pi}{90}}{2 \times (325)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{150\sqrt{3} \times \pi}{90\sqrt{325}} = \frac{5}{3}\sqrt{3}\,\pi \times \frac{1}{5\sqrt{13}}$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{3}\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{3}\,\pi}{3\sqrt{13}} \quad m/\text{sec.}$$

**(٢٩) عقربى ساعة حائط طولاهما بالبوصات [4.5",6"] فما مقدار السرعة التى يقترب بها نهاية عقرب الدقائق من نهاية عقرب الساعات عند تمام الساعة الرابعة .**

**الحـــــل** :- انظر الرسم شكل (٩-٢٢) .




**شكل (٩-٢٢)**

نفترض أن $S$ هى المسافة بين عقربى الساعة ، $\theta$ هى الزاوية بينهما وباستخدام قانون جيب التمام

$$\therefore S^2 = (6)^2 + (4.5)^2 - 2(6)(4.5) \times \cos\theta$$
$$= 36 + 20.25 - 54\cos\theta$$

$$\therefore 2S\frac{dS}{dt} = 0 - 54 \times \left(-\sin\theta\ \frac{d\theta}{dt}\right)$$

$$\therefore \frac{dS}{dt} = \frac{27\sin\theta}{S}\ \frac{d\theta}{dt}$$

وعند الساعة الرابعة تكون الزاوية بين مؤشرى الساعة :

$$4\left(\frac{360}{12}\right) = 120^0 = \frac{2\pi}{3}$$

$$\therefore S^2 = 36 + 20.25 - 54\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= 56.25 - 54 \times -0.5$$
$$= 56.25 + 27 = 83.25$$

وفى خلال ساعة كاملة يدور عقرب الدقائق دورة كاملة قدرها $2\pi$ بينما يتحرك عقرب الساعات فى ساعة واحدة ما مقداره $\frac{2\pi}{12}$ أى $\frac{\pi}{6} rad.$ وبالتالى فإنه يمكننا استنتاج أن $\theta$ تتناقص بمعدل يساوى $\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right)$ أى $\frac{11\pi}{6}\ rad.$ كل ساعة .

$$,\frac{d\theta}{dt} = -\frac{11}{6}\left[\frac{rad}{hr}\right] \times \frac{1}{60}\left[\frac{hr.}{\min}\right] = \frac{-11\pi}{360} rad./\min$$

$$\therefore \frac{ds}{dt} = \frac{27\sin\theta}{S}\left[\frac{d\theta}{dt}\right]$$

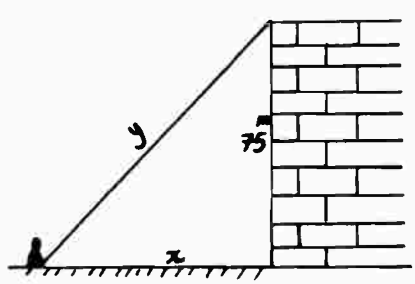
$$= \frac{27 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{83.25}} \times \left[\frac{-11\pi}{360}\right]$$

$$= \frac{27 \times 0.866}{9.124} \times -\frac{34.557}{360}$$

$$\cong 0.246\ inch/\min$$

**(٣٠) يقترب رجل من بناية ارتفاعها $75m$ ، بسرعة تبلغ $3km/hr.$ فكم تبلغ سرعة اقتراب الرجل من قمة البناية عندما يكون على بعد $100m$ منها .**

**الحـــــــل** :- انظر الرسم شكل (٩-٢٣) .




**شكل (٩-٢٣)**

نعتبر $x$ هى المسافة الأفقية التى تُبعد بين الرجل والبناية عند الزمن $t$ بينما المسـافة بـين الرجل وقمة البناية $y$ ؛

$$y^2 = x^2 + (75)^2$$

بالتفاضل بالنسبة للزمن :

$$\therefore 2y\frac{dy}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dt} = \frac{x}{y}\frac{dx}{dt} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

وفى اللحظة التى تكون فيها $x = 100$

$$\therefore y = \sqrt{x^2 + z^2} = \sqrt{100^2 + 75^2} = \sqrt{16625} = 125\,mt$$

وحيث أن $\frac{dx}{dt}$ تساوى $-3\,km/hr$ أى :

$$-\frac{3\times 1000}{60}\,mt/\min = -50\,mt/\min$$

وبالتعويض فى المعادلة (1)

$$\therefore \frac{dy}{dt} = \frac{x}{y}\frac{dx}{dt} = -\frac{100}{125}\times 50 = -\frac{5000}{125} = -40\,mt/\min$$

والإشارة السالبة تعنى أن $y$ تتناقص .

## Exercise 9

# على الأبواب السابع والثامن والتاسع

(١) ارسم المنحنى $y = x^2 - 2x$ ثم اوجد $\frac{dy}{dx}$ وحدد قيمتها عندما تكون قيم $x$ :- $(-1,0,2,3)$، وتأكد من صحة هذا من الرسم وما هى قيمة $x$ التى يكون عندها نقطة تحول وهل هى عظمى أم صغرى وما هى إشارة $\frac{d^2y}{dx^2}$ .

(٢) أوجد القيم العظمى والصغرى للدالة : $y = (x+1)(x-2)^2$ وقيم $x$ المناظرة .

(٣) ارسم منحنى الدالة $y = 3x - x^2$ ثم اوجد $\frac{dy}{dx}$ وحدد قيمتها عند قيم $x$ التالية: $(0,1,2,3)$ وما هى قيمة $x$ التى تنعدم عندها $\frac{dy}{dx}$ وما هى إشارة $\frac{d^2y}{dx^2}$ لنفس قيمة $x$ ، وهل الدالة عظمى أم صغرى عند هذه القيمة .

(٤) اوجد القيم العظمى والصغرى لـ : $4x + \frac{1}{x}$ .

(٥) اوجد القيم العظمى والصغرى للدوال التالية وحدد قيم $x$ المناظرة : -

$a)$ $x^3 - 12x$

$b)$ $2 - 9x + 6x^2 - x^3$

$c)$ $x^3 - 6x^2 + 12$

$d)$ $2x^3 - 9x^2 + 12x$

$e)$ $4x^3 + 9x^2 - 12x + 13$

(٦) اوجد نقط التحول للدوال التالية ، ثم حدد هل الدالة عظمى أم صغرى فى كل حالة : -

$a)$ $4x^2 - 2x$

$b)$ $2x^2 + x - 1$

$c)$ $x - 1.5x^2$

$d)$ $x^2 + 4x + 2$

(٧) اوجد نقط النهاية العظمى والصغرى ونقط الانقلاب لكل من المنحنيات التالية :-

$a)\ y = x^3 + 6x^2 - 15x + 20$

$b)\ y = 2x^3 - 15x^2 - 36x + 18$

$c)\ y = 3x^4 + 4x^3 - 24x^2 - 48x + 17$

$d)\ y = x^3 - 3x^2 + 3x - 2$

$e)\ y = 2x - x^2$

$f)\ y = 5 - x - x^2$

(٨) كيف يمكنك تقسيم العدد 10 إلى عددين بحيث يكون حاصل ضربهما أكبر ما يمكن؟

(٩) أوجد الإحداثى السينى لنقط النهاية العظمى والصغرى والانقلاب للمنحنى :

$$y = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 10$$

(١٠) أوجد قيمة $x$ عند نقطة الانقلاب للمنحنى :

$$y = 3x^3 - 4x + 5$$

(١١) أوجد القيم العظمى والصغرى لمنحنى الدالة : -

$$y = x^3 - x$$

وأوجد كذلك ميل المنحنى عند نقطة الانقلاب

(١٢) أوجد العددان اللذان مجموعهما 12 وبحيث : -

$A$ ) حاصل ضربهما أكبر ما يمكن .

$B$ ) مجموع مربعيهما أقل ما يمكن .

$C$ ) حاصل ضرب أحدهما فى مربع الآخر أكبر ما يمكن .

$D$ ) حاصل ضرب أحدهما فى مكعب الآخر أكبر ما يمكن .

(١٣) ما هو أكبر مستطيل يمكن رسمه داخل دائرة ، نصف قطرها $12\ cm$

(١٤) وضعت اسطوانة دائرية قائمة فى كرة نصف قطرها $a$ فاحسب ارتفاعها إذا أُريد أن تكون مساحة سطحها الجانبى أقل ما يمكن .

(١٥) قطعة أرض عبارة عن مستطيل ونصف دائرة ينطبق قطرها على أحد الأضلاع فإذا كانت المساحة الكلية ثابتة ومعلومة ، فاوجد نسبة قطر نصف الدائرة إلى بقية أبعاد

المستطيل بحيث يكون طول السياج اللازم لإحاطتها أقل ما يمكن ، "بطريقة الدالة الضمنية" .

(١٦) قطعة أرض على شكل مستطيل ينقصه نصفى دائرتين منطبق قطر كل منهما على أحد الأجناب المتقابلة فى المستطيل ،
فاوجد نسبة قطر نصف الدائرة إلى بقية أبعاد المستطيل بحيث تكون المساحة ثابتة والمحيط أقل ما يمكن .
( استخدم تفاضل الدالة الضمنية )

(١٧) مثلث متساوى الساقين مرسوم حول دائرة نصف قطرها $a$ فاحسب ارتفاع المثلث بحيث تكون المساحة أصغر ما يمكن .

(١٨) شبه منحرف قاعدته الصغرى وكل من ضلعيه الجانبيين $=10cm$ ، عين قاعدته الكبرى بحيث تكون مساحة شبه المنحرف أكبر ما يمكن .

(١٩) رسم مستطيل مساحته أكبر ما يمكن داخل نصف دائرة ، نصف قطرها $R$ ، احسب أبعاد المستطيل .

(٢٠) يراد تصنيع علبة اسطوانية مُغلقة بحيث يكون حجمها $16\pi$ بوصه مكعبة ، فأوجد نصف قطرها وارتفاعها . بحيث تكون المساحة الكلية لسطحها أقل ما يمكن .

(٢١) تبعد سفينة بمقدار $40\ km$ شمال سفينة أخرى فى تمام الساعة 12 ، فإذا كانت تتحرك إلى الجنوب بسرعة $15km/h$ ، بينما تتحرك الأخرى بسرعة $10km/h$ إلى الشرق فما هو معدل تغير المسافة بينهما عند الساعة الواحدة .

(٢٢) يتناقص طول ضلع مكعب بمعدل $0.6cm/\min$ ؛ احسب معدل تناقص مساحة سطح المكعب عندما يكون طوله $12cm$ .

(٢٣) تتحرك طائرة ورقية أفقيا على ارتفاع $150m$ فإذا كانت سرعة الطائرة $10m/\sec.$ ، فاحسب معدل ترك الخيط من يد الطفل الذى يلعب بها عندما تكون الطائرة على بعد $250m$ منه .

(٢٤) رسم فى نصف دائره شبه منحرف قاعدته هـى قطر نصف الدائرة عين زاوية قاعدة شبه المنحرف بحيث تكون مساحته أكبر ما يمكن .

(٢٥) صفيحة معدنية مستطيلة الشكل ، أبعادها $24 \times 30 cm$ ، قطعت من أركانها الأربعة بأربعة مربعات متساوية ثم ثنيت حوافها لأعلى لتشكل صندوقاً بدون غطاء ، احسب طول ضلع المربع بحيث يصبح حجم الصندوق أكبر ما يمكن .

(٢٦) يُراد تصنيع خزان مغلق اسطوانى سعته $40 m^3$ بحيث يتكلف أقل كمية ممكنه من المواد فما هى نسبة ارتفاعه إلى قطر القاعدة .

(٢٧) ما هو العدد الذى إذا أضيف إلى مقلوبه يعطى أقل مجموع ؟

(٢٨) مستطيل محيطه ثابت فاوجد أبعاده بحيث تكون مساحته أكبر ما يمكن .

(٢٩) صهريج اسطوانى الشكل مفتوح من الأعلى ، له حجم معلوم فاوجد العلاقة بين نصف قطره وارتفاعه بحيث يكون مجموع مساحته الجانبية بالإضافة لمساحة القاع أقل ما يمكن .

(٣٠) بكم مرة يكون حجم الكرة أكبر من حجم أكبر اسطوانة مرسومة فى هذه الكرة.

(٣١) طائرتان تطيران فى مستوى واحد كل منهما فى خط مستقيم بينهما زاوية قدرها $120°$ فإذا كانت سرعتاهما واحدة $V km/h$ وفى لحظة ما ، تصل إحداهما إلى نقطة تقاطع خطى الحركة وتكون الطائرة الأُخرى حينئذ على بعد $x km$ منها فبعد كم من الزمن يكون البعد بين الطائرتين أقل ما يمكن واحسب هذا البعد .

(٣٢) خزان له قاعدة مربعه وعلى شكل متوازى مستطيلات يُراد أن يكون حجمه $= 8 m^3$ فاحسب طول ضلع قاعدته وارتفاعه بحيث يتكلف أقل كمية ممكنة من الخامات .

(٣٣) مربع يزداد طول أضلاعه بمعدل $0.5 \, cm/\sec.$ فاحسب معدل زيادة المساحة عندما يبلغ طول كل ضلع من أضلاعه $10 \, cm.$ .

(٣٤) ينساب الماء إلى وعاء على شكل نصف كرة ، نصف قطرها $6m$ بمعدل $4m^3/\min$ فاحسب معدل ارتفاع سطح الماء عندما يكون عمق الماء مساوياً $4m$ .

(٣٥) يسير قطار على طريق مرتفع بمقدار $20\,ft$ عن الأرض متجهاً للشرق بسرعة $22\,ft/\sec.$ وتمر سيارة أسفل طريق القطار مباشرة في اتجاه الجنوب بسرعة $33\,ft/\sec.$ ، فما هي سرعة تباعدهما بعد $1\sec.$

(٣٦) طريقان يلتقيان عند نقطة $A$ ويصنعان بينهما زاوية مقدارها $60°$ وتحركت سيارة على أحد الطريقين بسرعة قدرها $40\,km/h$ مبتعدة عن النقطة $A$ .

وبعد عشرة دقائق ، تحركت سيارة أخرى من $A$ وسارت بمعدل $60\,km/h$ على الطريق الآخر .

احسب سرعة تباعد السيارتين بعد 20 دقيقة من تحرك السيارة السريعة (الثانية) .

(٣٧) مصباح إنارة أحد الشوراع على ارتفاع $20\,ft$ من الأرض ، يسير رجل طوله $6\,ft$ متحركاً بعيداً عنه بمعدل $4\,ft/\sec.$ ، فما هي السرعة التي تتحرك بها قمة ظل الرجل على الأرض وما معدل استطالة الظل عندما يكون على بعد 30 قدماً من المصباح .

(٣٨) مخروط دائري قائم رأسه منكس للأسفل ، يُصب فيه الماء بمعدل $10\,ft^3/\min$ فإذا كان نصف قطر قاعدة المخروط يساوى ارتفاع المخروط ، احسب معدل ارتفاع الماء في المخروط عندما يكون ارتفاع الماء مساوياً 6 أقدام .

(٣٩) ممران عرضهما $2.4m$،$1.6m$ يتقاطعان في زاوية قائمة ، عين أكبر طول للسلم الذي يمكن نقله (أفقياً) من ممر لآخر .

(٤٠) عين أبعاد حمام سباحة مفتوح وذو قاع مربع ، حجمه $32m^3$ بحيث يستهلك أقل كمية ممكنه من البلاط لتبليط قاعه وجدرانه .

(٤١) خزان مياه مستطيل الشكل ومفتوح وله قاعدة مربعه فإذا كان الخزان يتسع $108\,ft^3$ من المياه ، فاوجد أبعاد القاعدة بحيث يتكلف أقل كمية ممكنة من الخامات اللازمة لتبطين القاعدة .

(٤٢) مثلث قائم الزاوية طول وتره $8cm$ وزاويته $60°$ ، رسم مستطيل بحيث تكون قاعدته على الوتر ، فما هى أبعاد المستطيل بحيث تكون مساحته أكبر ما يمكن .

(٤٣) النقطتان $A(0,3)$، $B(4,5)$ ، عين على المحور $X`OX$ نقطة $C$ بحيث تكون المسافة $x = AC + CB$ أقل ما يمكن .

(٤٤) مزارع لديه 600 قطعة عمود لغرزها حول الأرض لعمل سياج أو سور فإذا كانت الأرض المراد إحاطتها بسور مستطيلة الشكل ويراد تقسيمها إلى جزئين متساويين بعمل سياج بداخلها يوزاى ضلعين متوازيين من أضلاعها

فاوجد أبعاد قطعة الأرض بحيث تحتوى على أكبر مساحة داخلية .

(٤٥) أوجد نقطة على القطع المكافئ $y^2 = 8x$ بحيث تكون أقرب ما يمكن للنقطة $(5,0)$ .

(٤٦) يبحر رجل فى زورق على بعد $5mile.$ من أقرب نقطة على الشاطئ المقابل له $(A)$ ويريد أن يصل إلى نقطة على الشاطئ تبعد بمقدار $6mile$ عن $(A)$ فى أقل زمن ممكن فإذا كان معدل تجديفه بالزورق $= 2mile/h$ فى حين أنه يستطيع أن يسير على رمال الشاطئ بسرعة قدرها $3mile/h$ فعند أى نقطة على الشاطئ عليه أن يبحر لها ويكمل باقى المسافة سيراً على الأقدام .

(٤٧) يُراد طباعة كتاب بحيث تكون أحبار الطباعة فى مساحة لا تتجاوز 36 بوصة مربعة على أن يترك هامش أعلى وأسفل الصفحة قدره $1\frac{1}{2}$ بوصة ومن الجانبين هامش قدره 1 بوصة فاوجد أبعاد الصفحة لأقل مساحة ممكنة .

(٤٨) قطاع دائرى زاويته $\alpha$ مقطوع من دائرة ، لف هذا القطاع ليتحول إلى مخروط فعند أى قيمة للزاوية $\alpha$ يُصبح حجم المخروط أكبر ما يمكن .

(٤٩) نفق مقطعه مستطيل ينتهى بنصف دائرة فإذا كان محيط المقطع 18 متراً فعند أى نصف قطر للدائرة تكون مساحة المقطع أكبر ما يمكن .

(٥٠) يقع مصدرا ضوء على بعد $30m$ عن بعضهما ، فحدد نقطة على المستقيم الواصل بينهما تكون أقل النقط إضاءة ، علماً بأن نسبة قوتى إضاءة المصدرين هى $27:8$

(٥١) رسم مخروط نصف قطر قاعدته $40cm$ وارتفاعه $60cm$ ، رسمت بداخله اسطوانة حجمها أكبر ما يمكن ، عين هذا الحجم .

(٥٢) مصنع $A$ ، يمر بجواره خط سكة حديد فى خط مستقيم إلى مدينة $B$ فبأية زاوية $\alpha$ على هذا المستقيم يجب مد طريق مُعبد من المصنع لكى يكون نقل البضائع من $A$ إلى $B$ أرخص ما يمكن ، إذا كان نقل الطن لكيلو متر واحد على الطريق المُعبد ، أغلى بمقدار $m$ مرة من نقله بالسكة الحديد .