الباب العاشر

تطبيقات على المشتقة الأولى

تطبيقات هندسية ، وتطبيقات على السرعة والعجلة

١٠ - ١ : - موجز لأساسيات الهندسة التحليلية : -

(١) ميل المستقيم هو ظل الزاوية التى يصنعها مع الاتجاه الموجب لمحور السينات .

$$m=\tan\theta$$

(٢) ميل المستقيم بدلالة نقطتين عليه إحداثياتهما $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

(٣) يمكن إيجاد ميل المستقيم إذا كانت معادلته فى الصورة : -

$$ax+by+c=0$$

$$\therefore m=-\frac{b}{a}$$

(٤) معادلة المستقيم بدلالة ميله m ونقطة معلوم إحداثياتها (x_1, y_1) تقع عليه : -

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

(٥) معادلة المستقيم بدلالة نقطتين معلومتين واقعتين عليه $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$: -

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

(٦) تكون النقطة واقعة على المستقيم أو المنحنى إذا حققت معادلته .

(٧) للحصول على نقطة تقاطع مستقيمين نحلهما معا أما نقطة أو نقط تقاطع منحنيين فتكون بحل معادلتهما آنياً .

(٨) المقصود بميل منحنى عند نقطة ما هو ميل المماس لهذا المنحنى عند هذه النقطة .

(٩) زاوية تقاطع مستقيم ومنحنى عند نقطة ما هى الزاوية بين المستقيم والمماس للمنحنى عند نقطة التقاطع .

(١٠) زاوية التقاطع بين منحنيين هى الزاوية بين مماسى المنحنيين عند نقطة تقاطعهما .

(١١) المستقيم العمودى على منحنى ما عند نقطة معلومة عليه هو المستقيم الذى يكـون عموديا على مماس المنحنى عند هذه النقطة .

(١٢) إذا تعامد مستقيمان فإن حاصل ضرب ميلهما = 1- .

وقد عرفنا فيما سبق من أبواب أنه إذا كانت $y = f(x)$ فإن المشتقة الأولى لهـذه الدالـة $y` or f`(x)$ تعطينا ميل المماس لهذا المنحنى عند أى نقطة (x_1 , y_1) تقع عليه .

$$\therefore y` = f`(x) = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x_1 , y_1} = \tan\theta$$

وباستخدام المشتقة الأولى يمكننا وبالرجوع إلى النقاط السابقة ، أن نستخدمها وبسهولة فى إيجاد الميل عند أى نقطة كما يلى : -

(١٣) معادلة المماس للمنحنى $y = f(x)$ عند النقطة (x_1 , y_1) : -

$$y - y_1 = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x_1 , y_1} \times (x - x_1)$$

(١٤) معادلة العمودى على المنحنى $y = f(x)$ عند النقطة (x_1 , y_1) : -

$$y - y_1 = \frac{-1}{\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x_1 , y_1}} \times (x - x_1)$$

١٠ - ٢ : - أمثلة محلولة على التطبيقات الهندسية للمشتقة الأولى

(١) أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة :

$$\boldsymbol{f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x}$$

عند كل نقط تقاطعه مع محور السينات $X`OX$

الحـــــل : -

عند نقط التقاطع مع محور السينات تكون $y = f(x) = 0$

$$,\because f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x = 0$$

$$\therefore x(x-1)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = 0 , x = 1 , x = 3$$

هى نقط التقاطع مع محور السينات .

، ميل المماس عند أى نقطة $= f`(x) = \frac{dy}{dx}$ ،

$$, f`(x) = 3x^2 - 8x + 3$$

$$، [f`(x)]_{x=0} = 3\times 0 - 8\times 0 + 3 = 3$$

$$، [f`(x)]_{x=1} = 3\times 1 - 8\times 1 + 3 = -2$$

$$، [f`(x)]_{x=3} = 3\times 3^2 - 8\times 3 + 3 = 6$$

(٢) أوجد ميل منحنى الدالة : -

$$\mathbf{y = 4x^2 - 8x + 5}$$

عند نقط تقاطعه مع المستقيم $\mathbf{y = 1}$

الحـــــل : - لإيجاد نقط تقاطع المستقيم مع منحنى الدالة نحل معادلتهما سويا وذلـك بوضع $y = 1$ فى معادلة الدالة .

$$\therefore 1 = 4x^2 - 8x + 5$$

$$\therefore 4x^2 - 8x + 4 = 0$$

$$\therefore x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$\therefore (x-1)^2 = 0$$

$\therefore$ هنالك نقطة تقاطع وحيدة عندما $x = 1$ ويمكن معرفة إحداثيها الصادى (y) بالتعويض بقيمة $x = 1$ فى معادلة المنحنى الأصلى :

$$y = 4\times 1^2 - 8\times 1 + 5 = 4 - 8 + 5 = 1$$

$\therefore$ نقطة التقاطع هى $(1,1)$ وواضح من معادلة المستقيم القاطع $y = 1$ أنه يمس المنحنـى عند هذه النقطة $(1,1)$.

والميل : $\frac{dy}{dx}$: -

$$\frac{dy}{dx} = 8x - 8$$

$\therefore$ ميل المماس عند النقطة $x = 1$

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=1} = 8\times 1 - 8 = 0$$

أى أن المماس يوازى محور السينات وهو نفسه المستقيم $y=1$

(٣) إذا كان المماس للمنحنى :

$$y=x\left(a-x^3\right)$$

عند نقطة الأصل يصنع زاوية قياسها 45° مع الاتجاه الموجب لمحور OX فاحسب قيمة a العددية

الحـــــل : -

$$\because y=ax-x^4$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=a-4x^3= \text{ميل المماس}$$

ولما كان ميل المماس $(\tan\theta = \tan 45=1)$

$$\therefore a-4x^3 = 1$$

وحيث أن المماس يمر بنقطة الأصل حيث $x=0$

$$\therefore a - 4\times 0 = 1$$

$$\therefore a = 1$$

وبذلك فإن معادلة المنحنى هى .

$$y=x\left(1-x^3\right)$$

(٤) أوجد نقطة على المنحنى $f(x)$: $f(x)=x^3-27x+60$

يكون عندها المماس موازيا محور السينات .

الحـــــل : -

عندما يوازى المماس محور السينات فإن :

$$\frac{dy}{dx}= 0$$

$$,\frac{dy}{dx}=3x^2-27=0$$

$$\therefore 3x^2=27 \qquad \therefore x^2=9 \qquad \therefore x=\pm 3$$

وبالتعويض فى $f(x)$ بقيم x

$$\therefore f(3)=27-27\times 3+60=6$$

$$، f(-3)=-27+81+60 =114$$

$\therefore$ المماس لهذا المنحنى يكون موازيا محور السينات عند النقطتين .

$(3,6),(-3,114)$

(٥) أوجد معادلة المماس والعمودى للمنحنى $f(x)$: -

$$y = f(x) = x^2 - 3x + 1$$

عند نقطة تقاطعه مع المستقيم $y = x + 2$

الحـــــل : -

$$y = x + 2 = x^2 - 3x + 1$$

$$\therefore x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$\therefore (x-1)^2 \ = 0 \qquad \therefore x = 1$$

وبالتعويض عن $x = 1$ فى معادلة المنحنى

$$\therefore y = x^2 - 3x + 1$$

$$= 1 - 3\times 1 + 1 = -1$$

∴ نقطة تقاطع المستقيم مع المنحنى هى $(1,-1)$

$$، \frac{dy}{dx} = 2x - 3$$

، معادلة المماس عند $(1,-1)$:

$$y - y_1 = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x_1, y_1} \times (x - x_1)$$

$$\therefore y - (-1) = (2x-3)_{(1,-1)} \times [x - (1)]$$

$$\therefore y + 1 \quad = (2\times 1 - 3)\times(x-1)$$

$$\therefore y + 1 \quad = -1(x-1)$$

$$\therefore y + 1 \quad = -x + 1$$

$$\therefore y \quad = -x \qquad i.e \quad -x - y = 0 \qquad \text{..........} \ (١)$$

وميل هذا المستقيم = $\dfrac{-\ \text{معامل } x}{\text{معامل } y} = \dfrac{-(-1)}{-1} = -1$

∴ ميل العمودى عليه = $\dfrac{-1}{-1} = +1$

ومعادلة العمودى عليه :

$$y - y_1 = \frac{-1}{\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x_1,y_1}} \times (x - x_1)$$

$$y - 1 = 1 \times (x - 1)$$

$$\therefore y = x$$

(٦) أوجد الآتى بالنسبة للمنحنى $y^2 = 2x$ عن النقطة $x = 1$: -

أ) طول المماس للمنحنى

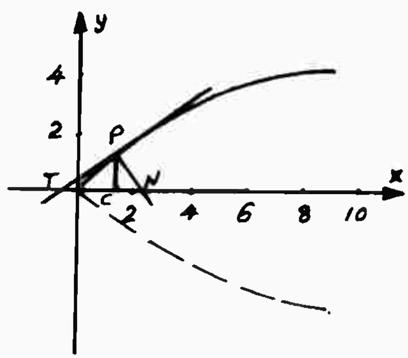
ب) طول العمودى

جـ) طول تحت المماس subtangent

ى) طول تحت العمودى subnormal

الحـــــل : -

انظر الرسم شكل (١٠ - ١) .



شكل (١٠ - ١)

(a) طول المماس TP كما يتضح من الرسم هو المسافة بين نقطة التماس (P) وبين نقطة تقاطع المماس مع محور ox (T)

ولدينا : طول المماس $= TP = \dfrac{PC}{\sin\theta}$

$$\therefore TP = PC.\operatorname{cosec}\theta$$

ولكن $cpc = y_1$

$\therefore TP = y_1 \ \text{cosec}\ \theta$

$, \because \text{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta$

$$\therefore \text{cosec}\theta = \sqrt{1+\cot^2\theta} = \sqrt{1+\frac{1}{\tan^2\theta}} = \frac{\sqrt{1+\tan^2\theta}}{\tan\theta}$$

$\because \tan\theta = \frac{dy}{dx} =$ الميل

$$\therefore \text{cosec}\ \theta = \frac{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\left(\frac{dy}{dx}\right)}$$

$$\therefore TP = y_1 \ \text{cosec}\ \theta = y_1 \frac{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\left(\frac{dy}{dx}\right)}$$

وهى الصيغة العامة لطول المماس .

وبوضع الميل $m = \frac{dy}{dx}$

$$\therefore TP = y_1 \frac{\sqrt{1+m^2}}{m} \qquad \text{..........} \ (1)$$

وبذلك فإنه يلزمنا إيجاد m, y_1 ولإيجاد y_1 نعوض فى المعادلة $y^2 = 2x$ بقيمة $x = 1$

$\therefore y_1^2 = 2 \times 1 = 2$

$$\therefore y_1 = \sqrt{2} \qquad at \ x = 1 \qquad \text{..........} \ (2)$$

ولإيجاد m نفاضل الدالة الضمنية الأصلية :

$$y^2 = 2x$$

$$\therefore 2y\frac{dy}{dx} = 2 \qquad \therefore \frac{dy}{dx} = m = \frac{1}{y}$$

وبالتعويض عن $y = \sqrt{2}$ (عند $x = 1$)

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2}} = m \qquad \text{..........} \ (3)$$

وبالتعويض عن قيمة y_1 ، m من المعادلتين (3) , (2) فى المعادلة (1)

$$\therefore TP = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{1+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = 2.45$$

(b) من الشكل ، طول العمودى $= PN$ وهو المسافة بين نقطة التماس وحتى نقطة تقاطع العمودى مع محور $X`OX$

$$PN = \text{طول العمودى} = \frac{PC}{\cos\theta} = PC\sec\theta \text{ ،}$$

ولكن $PC = y_1$

$$\therefore PN = y_1 \sec\theta .$$

$$\because \sec\theta = \sqrt{1+\tan^2\theta}, \tan\theta = \frac{dy}{dx} = m$$

$$\text{،} \therefore \sec\theta = \sqrt{1+m^2}$$

$$\therefore PN = y_1 \sec\theta = y_1\sqrt{1+m^2}$$

وبالتعويض عن قيم $y_1 = \sqrt{2}$ ، $m = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\therefore PN = \sqrt{2}\sqrt{1+\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{3} = 1.732$$

(c) ومن الشكل فإن طول ما تحت المماس $= TC$ وهو عبارة عن مسقط المماس TP على المحور $X`OX$

$$TC = \text{طول تحت المماس} = \frac{PC}{\tan\theta} = PC\cot\theta \text{ ،}$$

وحيث أن : $PC = y_1$ ، $\frac{dy}{dx} = \tan\theta = m$ ،

$$\therefore TC = \frac{y_1}{m} = \frac{\sqrt{2}}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = 2$$

(d) ومن الشكل فإن طول ما تحت العمودى $= CN$

$$\therefore CN = \text{طول ما تحت العمودى}$$

$$= PC \tan\theta = y_1 \tan\theta = y_1 m$$
$$= \sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 1$$

(٧) اوجد الزاوية بين نقط تقاطع الدائرتين : -

.... (A) $\quad x^2 + y^2 - 4x = 1$

.... (B) $\quad , x^2 + y^2 - 2y = 9$

الحـــــل : - المقصود بزاوية التقاطع بين الدائرتين ، أنها الزاوية بين المماسات لكل من الدائرتين عند نقط التقاطع

$$\because \tan\theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

حيث : -

$m_1 =$ ميل المماس للدائرة A عند (x, y)

$, m_2 =$ ميل المماس للدائرة B عند (x, y)

ولإيجاد نقط تقاطع الدائرتين تحلهما معا آنيا فنحصل على نقاط التقاطع وهي $(3,2), (1,-2)$

ولإيجاد ميل المماسات عند هذه النقط فإننا يجب أن نحصل على $\frac{dy}{dx}$ لكل من المنحنيين

وبالنسبة للدائرة الأولى A : -

$$m_1 = \frac{dy}{dx} = \left(\frac{2-x}{y}\right)$$

، بالنسبة للدائرة الثانية B : -

$$\therefore m_2 = \frac{dy}{dx} = \frac{x}{1-y}$$

وبالتعويض عن إحداثيات النقطة الأولى $(3,2)$ أى :

$$x = 3, y = 2$$

$\therefore m_1 = \frac{2-3}{2} = -0.5$. وهو ميل المماس للمنحنى A عند $(3,2)$

$, m_2 = \frac{3}{1-2} = -3$. وهو ميل المماس للدائرة B عند $(3,2)$

$$, \because \tan\theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

$$\therefore \tan\theta = \frac{\frac{-1}{2} + 3}{1 + \frac{3}{2}} = 1 \qquad \therefore \theta = 45^\circ$$

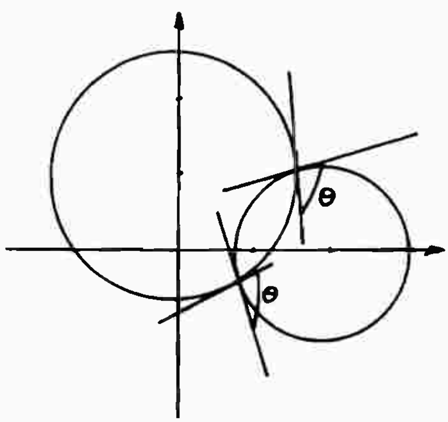
فإذا ما حسبنا زاوية التقاطع عند النقطة $(2,-1)$: -

$$m_1 = \frac{-1}{2} \quad , \quad m_2 = \frac{1}{3}$$

$$, \quad \tan\theta = \frac{\frac{-1}{2} - \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{6}} = -1 \qquad \therefore \theta = 135^\circ = 45^\circ$$

وهى نفس الزاوية السابقة .

انظر الرسم شكل (١٠ - ٢) .



شكل (١٠ - ٢)

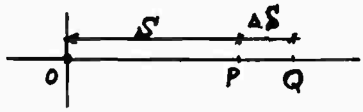
١٠ - ٣ : - السرعة والعجلة : -

هنالك العديد من التطبيقات التى تكون فيها الدوال المختلفة ، دوال فى الزمن بمعنى أن الزمن هو المتغير المستقل بها وسوف نقدم هذا النوع من الأمثلة عن السرعة والعجلة كأحد النماذج للدوال التى تعتمد على الزمن .

فإذا اعتبرنا أن لدينا جسيم يتحرك فى خط مستقيم (rectilinear motion) واعتبرنا أبسط أنواع هذه الحركة (فى خط مستقيم) ، أى عندما يتحرك الجسيم مسافات متساوية وفى نفس الاتجاه وفى فترات زمنية متساوية . ففى مثل هذه الحركة فإن عدد وحدات المسافة المقطوعة فى وحدة الزمن تُعرف بالسرعة .

ويُطلق على السرعة فى هذه الحالة بالسرعة الثابتة أو المنتظمة constant or uniform فإذا اعتبرنا الجسيم يتحرك من نقطة البداية 0 فى الاتجاه الموجب لمحور السينات وأن S هى المسافة المقطوعة للجسيم من نقطة البداية عند الزمن t ، فإن موضع الجسيم يكون دالة فى الزمن أى : $S = f(t)$

أنظر الرسم شكل (١٠ - ٣) .



شكل (١٠ - ٣)

والآن لنفترض أن الجسيم تحرك مسافة Δs من p إلى Q فى فترة زمنية قدرها Δt فإن وضع الجسيم عند الزمن (t) وعند الزمن $(t+\Delta t)$ يكون $f(t)$ ، $f(t+\Delta t)$

$$\therefore \Delta s = f(t+\Delta t) - f(t)$$

وبالقسمة على Δt

$$\therefore \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

ويُطلق على هذه النسبة بالسرعة المتوسطة للجسيم عند انتقاله من P إلى Q وعموماً فإن هذه النسبة ، ليست متساوية لمختلف قيم Δt مما لا يساعد على تفهم الحركة بوضوح. إلا أن نهاية هذه النسبة عندما تقترب Δt من الصفر ، تكون أكثر إيضاحاً وتحديداً للحركة .

تعـريف : إذا كان وضع جسيم متحرك يتحدد بالعلاقة $S = f(t)$ فإن السرعة V عنـد أى لحظة t تُعرف بالآتى :-

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

$$\therefore V = \frac{ds}{dt} = f'(t)$$

أى أن السرعة هى مشتقة المسافة بالنسبة للزمن وهى تُفيد كثيراً فى تفهم طبيعة الحركـة ، فعند أى لحظة t ، فـإن $f'(t)$ تبـين لنـا السـرعة اللحظيـة instantaneous velocity وتحدد إشارة المشتقة اتجاه الحركة .

غير أن القيمة المطلقة للمشتقة $f'(t)$ تمثل السرعة اللحظية .

وعليه فـإن S تـزداد عندمـا $f'(t) > 0$ وتتنـاقص عندمـا $f'(t) < 0$ ويمكننـا كتابـة الآتى:-

(١) عندما $f'(t) > 0$ ، فإن الحركة تكون فى الاتجاه الموجب .

(٢) عندما $f'(t) < 0$ ، فإن الحركة تكون فى الاتجاه السالب .

(٣) عندما $f'(t) = 0$ ، فإن الجسم يكون ساكناً (السرعة = صفر) .

١٠ - ٤ أمثلة على السرعة والعجلة .

(١) العلاقة التالية تبين وضع جسيم متحرك فى خط مستقيم :

$$S = t^2 + 1$$

فأوجد مكان وسرعة الجسيم عندما : $t = 0$, $t = 2$, $t = 5$

الحـــــل :- بأخذ مشتقة الدالة نحصل على السرعة (وهى دالة فى الزمن أيضاً) :-

$$\therefore V = \frac{ds}{dt} = 2t$$

ثم نعوض بقيمة t المختلفة فى كل من علاقتى المسافة والسـرعة للحصول على موضع وسرعة الجسيم ، كما هو موضح بالجدول التالى : (١٠-١)

t	0	2	5
s	1	5	26
V	0	4	10

جدول (١٠-١)

وكما يتضح من الجدول فإنه عند الزمن $t = 0$ ، الجسم ساكن $V = 0$ فإن $S = 1$ وهذا يعنى أنه عند بداية الحركة كان الجسم يبعد بمقدار وحدة مسافة عن نقطة البداية . ثم بدأ الجسم حركته فى الاتجاه الموجب للحركة بحيث أن السرعة تزداد وبحيث تكون دائماً مساوية لضعف الزمن المنقضى فى الحركة .

$$[(0\,,\,0)\ ,\ (2\,,\,4)\ ,\ (5\,,\,10)]$$

(٢) يسقط جسم من عُلُوّ طبقاً للعلاقة :-

$$S = -16\,t^2$$

حيث t مقاسة بالثوانى ، s بالأقدام ، فإذا وصل الجسم إلى الأرض فى 5 ثوانٍ فاحسب الارتفاع الذى سقط منه الجسم وكذلك السرعة التى يصطدم بها بالأرض .

الحـــــل :- يلاحظ هنا أن نقطة البداية هى نقطة سقوط الجسم وأن الإشارة السالبة فى معادلة الهبوط تعنى أن المسافة مقاسة فى اتجاه الصعود (أى الاتجاه الموجب هو الصعود لأعلى) .

وبوضع $t = 5$ فى المعادلة $S = f\,(t)$

$$\therefore S = -16\,(5)^2 = -400\ ft$$

كما وأن السرعة عند أى لحظة أثناء الهبوط :

$$V = \frac{ds}{dt} = -32\,t$$

فعندما $t = 5$ تكون السرعة V

$$V = -32 \times 5 = -160\ \ m/\sec$$

أى أن الجسم يسقط من ارتفاع $400\ ft$ ويصل للأرض بسرعة تبلغ $160\ ft/\sec$.

(٣) صف حركة نقطة تتحرك فى خط مستقيم طبقاً للعلاقة :-

$$S = 3\,t^2 - 18\,t$$

الحـــــل :- يمكن إيجاد اتجاه الحركة عند أى زمن عن طريق دالة السرعة .

$$V = \frac{ds}{dt} = 6\,t - 18 = 6\,(t - 3)$$

ويــلاحظ الآتى :-

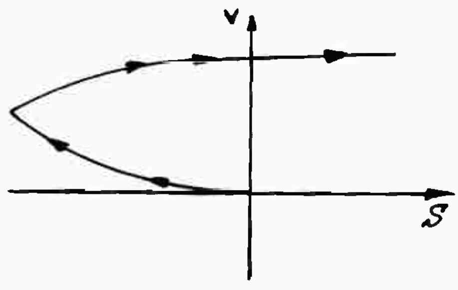
١) $V < 0$ عندما $0 < t < 3$

٢) $V = 0$ عندما $t = 3$

٣) $V > 0$ عندما $t > 3$

وبذلك فإن النقطة تتحرك لليسار أثناء الثلاث ثوانى الأولى (باعتبار الحركة لليمين هــى الموجبة) ، ثم تسكن عندما $t = 3$ ثم تصبح السرعة موجبة أى أنها تتحرك بعد الثلاث ثوانى فى الاتجاه الموجب أى لليمين وبذلك فهى تعكس حركتها ويكـون وضـع النقطـة عند $t = 0$ وعند $t = 3$ على الترتيب 0 , -27 والأسهم على الشـكل توضـح الحركـة لليسار ثم لليمين فى خط مستقيم .

أنظر الرسم شكل (١٠-٤) .



شكل (١٠-٤)

وقد تعرضنا فى وصف حركة النقطة ، إلى حسـاب الفـترات الموجبـة والسـالبة للسـرعة والوضع الابتدائى للنقطة ووضع النقطة عند السرعة = صفر .

إلا أنه يمكننا الحصول على وصف أدق لطبيعة حركة النقطة السـابقة باعتبـار وحسـاب معدل تغير السرعة بالنسبة للزمن وهو ما يدعونا إلى التحدث عن العجلة .

تعــريف :– تُعرف العجلة بأنها مشــتقة الســرعة بالنسـبة لـلزمن وبذلـك فـإن تعريـف العجلة acceleration هو :–

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

كما أنه إذا كانت $V = f\ (S)$:–

$$\therefore a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \times \frac{ds}{dt} = v\ \frac{dv}{ds}$$

ولتوضيح ذلك نعتبر جسماً يتحرك فى خط مستقيم طبقاً للعلاقة :–

$$S = 3\,t\ + 4$$

$$\therefore \frac{ds}{dt} = V = 3 \qquad , \qquad \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\,(3) = a = 0$$

ويلاحظ أن السرعة لا تتغير فمقدارها $= 3$ ولذلك فإن العجلة وهى معدل تغير السرعة (الثابته) = صفر

وعند $t = 0$ فى وضع البداية فإن $S = 4$ تعنى أن الجسم يبعد بمقدار 4 وحدات مسافة من نقطة القياس ، كما أنه يتحرك فى الاتجـاه الموجـب حيـث أن $V = 3 > 0$ بسـرعة ثابتة قدرها $V = 3$ (3 وحدات مسافة لكل وحدة زمن)

وفيما يلى يمكننا إيضاح ، فـى أى وقـت مـن الحركـة تكـون العجلـة ثابتـة ولا تسـاوى الصفر وهو ما يعرف بالعجلة المنتظمة uniformaly accelerated .

فمثــلاً إذا كانت

$$S = 3\,t^2 + 4\,t - 1$$

$$\therefore V = 6\,t + 4 \qquad , \qquad a = 6\ (> 0)$$

وتعنى العجلة 6 بأن السرعة تزداد بمقدار 6 وحدات سرعة لكل وحدة زمن فإذا كـانت وحـدة السـرعة $m/\sec$ فـإن السـرعة تـزداد بمقـدار $6\ m/\sec$ كـل ثانيـة أو العجلـة تساوى $6\ m/\sec/\sec$

وباختصار تكتب العجلة a تساوى :–

$$a = 6\ m/\sec^2$$

وللعجلة المنتظمة أهمية كبيرة عند دراسة جسم يتحرك رأسياً (بالقرب)من سطح الكرة الأرضية . حيث تكون العجلة والناشئة من الجاذبية الأرضية (gravity) ، وبإهمال مقاومة الهواء ، عند التحرك رأسياً فإن :-

$$S = V_0\, t + \frac{1}{2}\, g\, t^2$$

حيث V_0 هى السرعة الإبتدائية ، g عجلة الجاذبية الأرضية

فإذا اعتبرنا الوحدات بالمتر والثانية وأن الاتجاه الموجب للحركة هو للأعلى فإن قيمة g تقريباً تعادل :-

$$g = -9.8\ m/\sec^2\ \left(-32\ ft/\sec^2\right)$$

(٤) قذف جسم إلى أعلى بسرعة ابتدائية $98\ m/\sec$ ، احسب زمن الصعود وأقصى ارتفاع يصل له الجسم

الحـــل :- حيث أن :-

$$S = V_0\, t + \frac{1}{2}\, g t^2$$

وباعتبار $V_0 = 98$

$$\therefore S = 98t - \frac{1}{2}\times 9.8t^2 = 98t - 4.9t^2$$

$$\therefore V = \frac{ds}{dt} = 98 - 9.8\ t$$

وتكون السرعة مساوية للصفر $V = 0$ عندما :-

$$98 - 9.8\ t = 0 \qquad \therefore t = \frac{98}{9.8} \cong 10 \sec$$

وهو زمن الوصول لأقصى ارتفاع ولحساب أقصى ارتفاع ، نعوض بقيمة الزمن $t = 10$ فى معادلة المسافة :-

$$\begin{aligned} S &= 98\ t - 4.9\ t^2 \\ &= 98\times 10 - 4.9\times 100 \\ &= 980 - 490 = 490\ mt\ . \end{aligned}$$

وعليه فإن زمن الصعود $t = 10 \sec$ وأقصى ارتفاع $S = 490\ mt$

(٥) تتحرك نقطة فى خط مستقيم بحيث أن المسافة بالأقدام مقاسة من نقطة البداية عند أى لحظة يمكن تمثيلها بالعلاقة :

$$S = t^3 - 6t^2 + 9t$$

صف الحركة أثناء الأربع ثوانى الأولى من الحركة .

الحـــــل :-

$$\because \quad S = t^3 - 6t^2 + 9t \qquad \text{.......... (1)}$$

$$\therefore \ V = \frac{ds}{dt} = 3t^2 - 12t + 9 = 3(t-1)(t-3) \qquad \text{.......... (2)}$$

$$,\ a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = 6t - 12 = 6\,(t-2) \qquad \text{.......... (3)}$$

ويلاحظ من العلاقة (٢) أنه عندما تكون $1 > t > 0$ أى فى خلال الثانية الأولى فإن :-

$$V = 3\ (t-1)\ (t-3)$$

أى موجبة

$$\therefore V = 3\,(-ve)\,(-ve) = +ve$$

بينما عندما $3 > t > 1$ أى فى خلال الثانيتين الثانية والثالثة فإن :

أى سالبة

$$V = 3\,(+ve)\,(-ve) = -ve$$

أما عندما تكون $t \geq 3$ أى خلال الثانية الرابعة (فأكثر) فإن :-

أى موجبة

$$V = 3\,(+ve)\,(+ve) = +ve$$

أى أن النقطة تتحرك أولاً لليمين ثم لليسار ثم لليمين ثانية ومن علاقة العجلة :-

$$a = 6\,(t-2)$$

فإنه عندما تكون $0 < t < 2$ فإن :

أى سالبة

$$a = 6\,(-ve) = -ve$$

أى أن السرعة تتناقص (عجلة تقصيرية) .

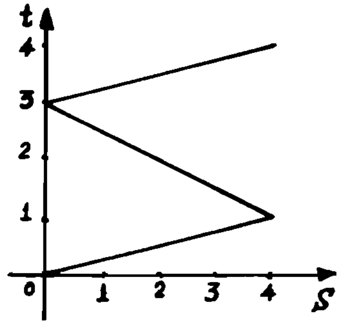
بينما عندما تكون $2 < t \leq 4$ فإن :

أى موجبة

$$a = 6\,(+ve) = +ve$$

أى أن السرعة تتزايد (عجلة تزايدية)

والشكل (١٠-٥) يوضح ذلك .



شكل (١٠ – ٥)

Exercise 10

(١) حدد زاوية تقاطع المنحنيين :-

$$x^2 + y^2 = 5 \qquad , \qquad y^2 = 4x$$

(٢) احسب الزاوية التى يقطع بها المستقيم : $2y = 1$ ؛ المنحنى ؛ $y = \cos x$

(٣) أوجد معادلتى المماس للمنحنى $y^2 = 8x$ المارين بالنقطة $(0 , 2-)$ واثبت أنهما مُتعامدان .

(٤) حدد النقطة التى يكون فيها مماس المنحنى $y = x^2 + 4x$ موازياً للمحور $X`OX$

(٥) أوجد معادلة المماس والعمودى للمنحنى $y = 3x^2$ عند النقطة $x = 3$

(٦) أوجد معادلة المماس للمنحنى $x^2 - y^2 = 16$ والذى يمر بالنقطة $(2,-2)$

(٧) أوجد معادلة المماس والعمودى للمنحنى $y = x^2 + 4x + 2$ عند النقطة التى يكون عندها المماس عمودياً على المستقيم :- $2x - 4y + 5 = 0$

(٨) حدد زاوية تقاطع المنحنيين :-

$$y = \frac{x^2}{2} \qquad , \qquad y = 4 - \frac{x^2}{2}$$

(٩) حدد الزاوية التى يقطع بها المنحنى $y = \sin x$ ، والمحور $X`OX$

(١٠) اكتب معادلتى مماس المنحنى $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 3 = 0$ فى نقطتى تقاطعه مع المحور $Y`OY$

(١١) أوجد مساحة المثلث الذى أضلاعه محور OX والمماس العمودى فى النقطة $(1 , -4)$ للمنحنى :- $4x^2 + y^2 = 20$

(١٢) أوجد النقطة الواقعة على المنحنى $y = 4x^3 - 21x^2 + 30x$ والتى يكون عندها المماس للمنحنى موازياً لمحور $X`OX$ ثم أوجد معادلة العمودى للمنحنى عند كل نقطة من هذه النقط .

(١٣) أوجد معادلة المماس للقطع الناقص : $4x^2 + 9y^2 = 40$ عند النقطة $(1 , 2)$

(١٤) فى معادلة القطع المكافئ $y = x^2 + bx + c$ ، حدد الثابتين b,c علماً بأن المستقيم $y = x$ يمس القطع المكافئ عند النقطة $x = 2$

(١٥) أوجد معادلة المماس للمنحنى $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ عند النقطة (x_1 , y_1) .

(١٦) عين $y``$ عند النقطة $(0 , b)$ فى المعادلة بطريقة مشتقة الدالة الضمنية :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(١٧) اكتب معادلتى مماس الدائرة :- $x^2 + y^2 + 4x - 4y + 3 = 0$

فى نقطتى تقاطعها مع محور $X`OX$ ثم ارسم الدائرة والمماسات .

(١٨) أوجد ميل المماس للمنحنى $y = x^3 + x^2 - 6x$ عند كل نقطة من نقط تقاطعه مع محور $X`OX$

(١٩) أوجد معادلة المماس للمنحنى $2x^2 + y^2 + 2xy = 5$ عند النقطة $(1 , 1)$

(٢٠) أوجد معادلة المماس للمنحنى : $e^x + \cos y - 2 = 0$

عند النقطة $\left(0 , \frac{\pi}{3}\right)$

(٢١) أوجد معادلات المماس والعمودى للمنحنى : $y = x^2 - x + 3$

عند النقطة $(2 , 5)$.

(٢٢) عين ميل القطع المكافئ : $y = x^2$ عند النقطتين $x = \pm 2$.

(٢٣) اكتب معادلتى المماسين للقطع الزائد $yx = 4$ عند النقطتين $x_1 = 1$ ، $x_2 = -4$, وحدد الزاوية بينهما ومن ثم ارسم المنحنى ومماسيه .

(٢٤) اكتب معادلة المماس للقطع الناقص $x^2 + 4y^2 = 16$ فى النقطة التى تنصف جزء المماس المقطوع بمحورى الإحداثيات وتقع فى الربع الإحداثى الأول .

(٢٥) ما هى النقط التى يكون عندها المماس لمنحنى $y = \cos\theta$ ، أفقياً .

(٢٦) اكتب معادلتى المماس والعمودى للقطع المكافئ $y = 4 - x^2$ عند نقطة تقاطع القطع المكافئ مع المحور OX (عندما $x > 0$) ثم ارسم القطع والمماس والعمودى .

(٢٧) باستخدام طريقة Δ أوجد النقط التى على المنحنى :- $y = \frac{x}{3} + \frac{3}{x}$

والتى يكون عندها المماس أفقياً .

(٢٨) بين أن المنحنى $y = x^2 + 3x - 4$ ، ليس له مماساً أفقياً باستخدام طريقة Δ

أوجد زاوية التقاطع لأقرب درجة ، لأزواج المنحنيات التالية :-

(٢٩) $\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 = 5 \\ , 2x - y + 3 = 0 \end{cases}$

(٣٠) $\begin{cases} y = x^2 - 6 \\ y = x \end{cases}$

(٣١) $\begin{cases} y = x^3 - x \\ , y = x^2 - 1 \end{cases}$

(٣٢) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ 3x - 4y = 0 \end{cases}$

فى الثلاث مسائل التالية اكتب معادلات مماسات المنحنيات ثم ارسم المنحنيات ومماساتها :-

(٣٣) $y = 4x - x^2$ فى نقط التقاطع مع المحور OX

(٣٤) $y = \sqrt{4 - x}$ فى نقط التقاطع مع المحور OY

(٣٥) $y^2 = (4 + x)^3$ فى نقط التقاطع مع كل من المحورين OY , OX

فى الأربعة مسائل التالية ، اكتب معادلات المماس للمنحنيات التالية ثم ارسمها وارسم مماساتها :-

(٣٦) المنحنى $y = \sin x$ عند النقطة $x = \pi$

(٣٧) المنحنى $y = \dfrac{x^3}{3}$ عند النقطة $x = -1$

(٣٨) المنحنى $y = \dfrac{8}{4 + x^2}$ عند النقطة $x = 2$

(٣٩) المنحنى $y^2 = x^3$ عند النقطتين $x_2 = 1$, $x_1 = 0$

أوجد معادلات المماس والعمودى لكل من المنحنيات التالية عند النقط الموضحة أمام كل منها :-

(٤٠) $x^2-3xy+y^2=19$ عند $(-3,1)$

(٤١) $y=4x-x^2$ عند $(4,0)$

(٤٢) $(x-1)^2+y^2=13$ عند $\left.\begin{matrix}(-2,-2)\\(-3,1)\end{matrix}\right\}$

(٤٣) $y=x^3+2x^2+x$ عند $(1,4)$

فى كل من المسائل التالية ، نقطة تتحرك فى خط مستقيم وكانت المسافة S مقاسة بالقدم من نقطة البداية ، الزمن عند أية نقطة = t ثانية وكانت المعادلات التالية تربط بين كل من S,t فأوجد : -

المسافة والسرعة والعجلة عندما $t=0$، $V=0$ [عندما $t\neq 0$]

(٤٤) $S=t+3$

(٤٥) $S=t^2+6t-7$

(٤٦) $S=t^2+2t-3$

(٤٧) $S=t^3-3t^2+3t-5$

(٤٨) $S=80t-16t^2$

(٤٩) قذف جسم بزاوية مقدارها θ على الأفقى وبسرعة ابتدائية u فإذا كان المدى (المسافة الأفقية التى يقطعها الجسم) = x والارتفاع = y مرتبطين بالعلاقة : -

$$y=x\tan\theta-\frac{gx^2}{2u^2\cos^2\theta}$$

فما هو أقصى ارتفاع يصل له المقذوف وما المدى المقطوع حينئذ

(g = عجلة الجاذبية الأرضية = ثابت) .

(٥٠) تحرك جسم من السكون ثم عاد للسكون مرة أخرى وكانت العلاقة بين سرعته V بالمتر /ث والزمن t بالثانية كالتالى : -

$$V=2t-5t^2$$

فاحسب الزمن الذى استغرقه بين لحظتى السكون ، ثم أوجد فترات تزايد وتناقص كل من السرعة والعجلة .

(٥١) تتحرك نقطة مادية فى خط مستقيم فإذا كان بعدها S بالمتر عن نقطة ثابتة " O " عند الزمن t يتحدد من العلاقة : -

$$S = \frac{t^3}{3} - 2t^2 + 3t$$

فبين أن النقطة ، تتوقف عن الحركة ، لحظيا مرتين ، ثم أوجد المسافة بين فترتى السكون .

(٥٢) قذفت كرة لأعلى بسرعة ابتدائية قدرها $64\ ft/\sec$ ، فاحسب زمن صعودها وهبوطها وأقصى ارتفاع تصل إليه ؟

(٥٣) إذا كانت المسافة S التى يقطعها جسم مقذوف رأسيا لأعلى فى الزمن t تُعطى بالعلاقة التقريبية التالية : -

$$S = 120t - 4.9t^2$$

فأوجد أقصى ارتفاع يصل له الجسم والزمن اللازم لذلك .

(٥٤) إذا كانت $S = 3 + 3t^2 - t^3$ تُمثل العلاقة بين المسافة S والزمن t لجسم متحرك فى خط مستقيم ، فأوجد السرعة عندما تنعدم العجلة

(٥٥) تحركت نقطة مادية فى خط مستقيم وكانت العلاقة بين S بالمتر ، t بالثانية :-

$$S = (3t - 2)^2$$

فاوجد سرعتها المتوسطة خلال الثانية السادسة ، ثم اوجد سرعتها وعجلتها عندما $t = 4$

(٥٦) سقطت نقطة مادية من ارتفاع ما فوصلت الأرض بعد ثلاث ثوانى فاوجد الارتفاع الذى سقطت منه وسرعة اصطدامها بالأرض

تحركت نقطة مادية فى خط مستقيم وكانت المسافة S بالمتر والزمن t بالثانية مرتبطان بالمعادلات المبينة فيما يلى ، احسب السرعة والعجلة بعد ٣ ثوان : -

(٥٧) $S = 2t^2 + 2\sqrt{t}$

(٥٨) $S = 2t^3 + 6t^2 - 3t + 1$

(٥٩) $S = 3t + \dfrac{4}{t - 2}$

(٦٠) $S = 3t^3 - 5t^2 + 2t$

(٦١) $S = t^4 - 4t^3 + 4t^2$

(٦٢) إذا كانت $S = 6 + 12t - t^3$ هى العلاقة بين S بالمتر ، t بالثانية لنقطة تتحرك فى خط مستقيم فأوجد متى يغير الجسم حركته وكم تبلغ العجلة عندئذ ؟

(٦٣) تتحرك نقطة مادية فى خط مستقيم بحيث أن المسافة S بالمتر بعد t ثانية تُعطى بالعلاقة : -

$$S = 3t^4 - 16t^3 + 6t^2 - 48t$$

فبين أن سرعة النقطة ، لا تساوى صفراً إلا مرة واحدة فقط خلال حركتها ، ثم احسب السرعة عندما تكون العجلة = $5 m/\sec^2$.