الباب الحادى عشر

تفاضل الدوال المتسامية

Differentiation of transcendental function

١١ -١ عام : -

درسنا فيما سبق الدوال الجبرية ، أما الدوال غير الجبرية فتُعرف بالدوال المتسامية وأشهر أنواع هذه الدوال والتى سوف ندرسها فيما يلى من أبواب هذا الكتاب ، الدوال المثلثية والدوال المثلثية العكسية والدوال الزائدية والزائدية العكسية والدوال الأسية والدوال اللوغاريتمية .

وهذه الدوال ذات أهمية كبيرة وتستخدم بكثرة فى الفيزياء والهندسة والاحتمالات وفى مجالات علمية وتطبيقية متعددة .

١١ - ٢ : - تفاضل الدوال المثلثية

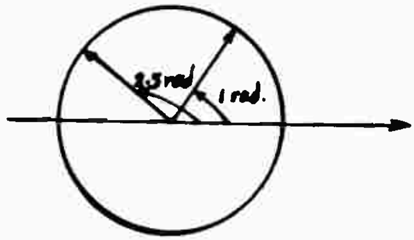
Diff . of The Trigonometric Functions

التقدير الدائرى للزوايا : - angular measure / circular measure

تقاس الزوايا بالدرجات كما علمنا فيما مضى من مراحل دراسية مختلفة ويستخدم هذا النظام فى مبادئ الهندسة والحساب إلا أنه يوجد نظام آخر لقياس الزوايا يُعرف بالتقدير الدائرى للزوايا ، وهو يفضل فى الدراسات النظرية وعلى الأخص فى حساب التفاضل والتكامل وعن طريقه يتم تبسيط العمليات كثيراً .

تعريف : - يُعرف قياس الزاوية التى رأسها عند مركز دائرة وتقابل قوساً على محيط الدائرة ، طوله يعادل طول نصف قطر الدائرة ، بأنه واحد دائرى one radian .

ويوضح الشكل زوايا مقاسة بالتقدير الدائرى مقدارها $1\ rad.$ ، $2\frac{1}{2}\ rad$



شكل (١١ - ١)

وحيث أن محيط الدائرة (c) يعادل 2π مرة نصف قطرها . $(c = 2\pi\ r)$

فإذا كان لدينا دائرة نصف قطرها = 1 وحدة طول فإن محيـــــط هــذه الدائرة = $2\ \pi\ \times 1$ أى أن محيط هـذه الدائـرة يقـابل زاويـة قدرهـا 2π بالتقدير الدائرى

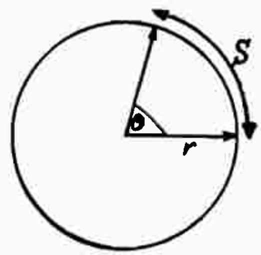
$$i.e.\ 2\pi\ \ radians\ = \ 360^\circ$$

$$,\qquad \pi\ \ radians\ = \ 180^\circ$$

$$,\ 1\ Radian\ = \frac{180}{\pi} = \frac{180}{3.14} = 57.296^\circ = 57^\circ, 177^{`} +$$

$$،\ 1^\circ \qquad = \frac{\pi}{180}\ radian\ = \frac{3.14}{180} \quad = 0.0174532 + radian$$

ومن تعريف التقدير الدائرى للزوايا فإنه يمكننا اسـتنتاج صيغتـين ريـاضيتين هـامتين عـن الدائرة ، انظر الرسم شكل (١١ - ٢) .



شكل (١١ - ٢)

نفترض أن الزاوية θ مقاسة بالتقدير الدائرى

وأن رأس الزاوية عند مركز الدائرة التى نصف قطرها = r وحدة طول .

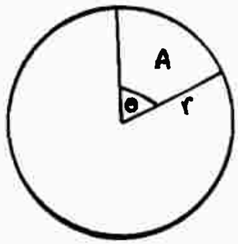
وأن القوس المقابل لهذه الزاوية طوله S وحدة طول .

وحيث أن الزاوية المركزية التى قياسها *radian* 1 تقابل قوساً طوله مساوياً لنصف قطر الدائرة، وعليه فإن الزاوية المركزية التى قياسها .*rad* θتقابل قوساً طوله $\theta.r$ ومنها نصل للصيغة الرياضية الأولى التالية : -

$$i.e \quad S = r.\theta \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

ومن المهم عند تطبيق الصيغة السابقة أن يكون كل من نصف القطر والمحيط ، معبراً عنهم بنفس الوحدات الطولية وأن تكون θ مُقاسة بالتقدير الدائرى

ويُطلق على الشكل الهندسى الناشئ من القوس المقابل للزاوية المقاسة بالتقدير الدائرى بالإضافة إلى ضلعى الزاوية (نصفى القطر) بالقطاع الدائرى sector ، انظر الرسم شكل (١١ - ٣) .



شكل (١١ - ٣)

ويمكن التعبير عن مساحة هذا القطاع بدلالة زاوية رأسه ونصف القطر فإذا كانت θ هى زاوية رأس القطاع بالتقدير الدائرى ، فإن مساحة القطاع A عبارة عن كسر مقداره $\left(\frac{\theta}{2\pi}\right)$ [زاوية رأس القطاع : زاوية الدائرة $360 = 2\pi$] من مساحة الدائرة πr^2

$$\therefore A = \frac{\theta}{2\pi} \times \pi r^2$$

$$\therefore A = \frac{1}{2} r^2 \theta \qquad \dots\dots\dots\dots (2)$$

وهى الصيغة الرياضية الثانية الخاصة بالدائرة .

وفيما يلى سنعتبر أن القارئ عنده إلمام كافٍ بقواعد حساب المثلثات والعلاقات والقوانين الخاصة به والمشهورة منها بالأخص .

ويجب أن لا ننسى عند دراسة تفاضل الدوال المثلثية أن الزوايا فيها مقاسة بالتقدير الدائرى وعادة تكون فى صورة كسور ملائمة أو مضاعفات النسبة π

مثل : - $\frac{\pi}{3}, \pi, 2\pi, \frac{5\pi}{6}, \dots\dots etc.$

١١ - ٣ : - تفاضل $\sin x$

لنعتبر أن $y = \sin x$

ولنعتبر أن Δx هى زيادة طفيفة جداً فى قيمة x

، لنعتبر أن Δy هى زيادة طفيفة جداً مناظرة فى قيمة y

$$, \because y = \sin x \qquad \ldots\ldots\ldots\ (1)$$

$$\therefore y + \Delta y = \sin(x + \Delta x) \qquad \ldots\ldots\ldots\ (2)$$

وبطرح (1) من (2) :

$$\therefore \Delta y = \sin(x+\Delta x) - \sin x$$

وبالقسمة على Δx

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x}$$

والمطلوب هو إيجاد نهاية المقدار الأيمن عندما تؤول Δx إلى الصفر .

ولذلك ، سنقوم بتحويل البسط من مجموع جبرى إلى ضرب باستخدام الصيغة التالية:-

$$\sin A - \sin B = 2\cos\frac{A+B}{2} \times \sin\frac{A-B}{2}$$

حيث نضع $(x+\Delta x)$ بدلاً من A

، $\sin x$ بدلاً من B

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\cos\left[\frac{(x+\Delta x)+x}{2}\right] \times \sin\left[\frac{(x+\Delta x)-x}{2}\right]}{\Delta x}$$

$$= \frac{2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \times \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}$$

وبإعادة الترتيب :

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \times \frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}$$

وفى الطرف الأيمن نلاحظ أن العامل الثانى به $\frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}$ يأخذ الصورة : -

$\frac{\sin\theta}{\theta}$ السابق إيجاد نهايتها فى باب النهايات $\left[\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\right]$

$$\therefore \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1$$

$$\therefore \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \times \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \right]$$

$$= \cos x \times 1 \qquad , \qquad \left[\frac{\Delta x}{2} \to 0\right]$$

$$= \cos x$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x.$$

١١ - ٤ : - تفاضل $\cos x$: -

وسنتبع هنا نفس الطريقة المتبعة فى إيجاد $\sin x$

$$\because y = \cos x$$

$$\therefore y + \Delta y = \cos(x + \Delta x)$$

$$\therefore \Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x$$

ثم نستخدم الصيغة التالية : -

$$\cos A - \cos B = -2\sin \frac{A+B}{2} \times \sin \frac{A-B}{2}$$

$$\therefore \Delta y = -2\sin\left(\frac{x + \Delta x + x}{2}\right) \sin\left(\frac{x + \Delta x - x}{2}\right)$$

$$= -2\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)$$

وبالقسمة على ΔX وإعادة الترتيب :

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) - \frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x \to 0}\left[\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) . \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\right]$$

$$= -[\sin x \; . \; 1]$$

$$= -\sin x$$

$$\therefore \frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$$

١١ – ٥ : – تفاضل $\tan x$

يمكن إيجاد المعامل التفاضلى للدالة $y = \tan x$ بسهولة باستخدام المعامل التفاضلى لكل من $\cos x$, $\sin x$ السابق الحصول عليهما .

وحيث أن : $y = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

$\therefore$ بإجراء التفاضل للكسر السابق الذى بسطه $\sin x$ ومقامه $\cos x$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\cos x \frac{d}{dx} \sin x - \sin x \frac{d}{dx} \cos x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos x \; .\cos x - \sin x \times -\sin x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} \qquad , \quad [\cos^2 x + \sin^2 x = 1]$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \sec^2 x$$

$$\therefore \frac{d}{dx} \tan x = Sec^2 x$$

كما أنه يمكن إيجادها من المبادئ الأولية بطريقة Δ مثلما الحال فى $\sin x$ ، $\cos x$ وباستخدام الصيغ المثلثية الملائمة .

١١ - ٦ : - تفاضل : $\text{Sec } x$, $\text{Cosec } x$, $\cot x$

يمكن إيجاد المشتقة الأولى لهذه الدوال من المبادئ الأولية كما سبق ، إلا انه يمكن إيجادها بسهولة كمقلوب لكل من : $\tan x$, $\sin x$, $\cos x$ على الترتيب وذلك باستخدام قانون تفاضل القسمة

ا - تفاضل مقلوب $\sin x$ أى $\text{Cosec } x$: -

$$y = \text{cosec } x = \frac{1}{\sin x}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\sin x \times 0 - 1 \times \cos x}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{-\cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\cos x}{\sin x} \times \frac{1}{\sin x}$$

$$\therefore \frac{d}{dx} \text{cosec } x = -\cot x . \text{cosec } x$$

ب - تفاضل مقلوب $\cos x$ أى $\sec x$: -

$$y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\cos x \times 0 - 1 \times -\sin x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} \times \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$= \sec x . \tan x$$

$$\therefore \frac{d}{dx} \sec x = \sec x \tan x .$$

جـ - تفاضل مقلوب $\tan x$ أى $\cot x$: -

$$y = \cot x = \frac{1}{\tan x}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\tan x \times 0 - 1 \times \sec^2 x}{\tan^2 x}$$

$$= -\frac{\sec^2 x}{\tan^2 x} = \frac{-1}{\cos^2 x} \times \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{-1}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x$$

$$\therefore \frac{d}{dx} \cot x = -\operatorname{cosec}^2 x.$$

١١ - ٧ : - خلاصة : -

ويمكن تلخيص ما سبق فى الجدول التالى حتى يسهل حفظه حيث أنها من التفاضلات الهامة الرئيسية والتى كثيراً ما تقابلنا فى حل المسائل .

الدالة $f(x)$	تفاضلها : $\frac{dy}{dx}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\sec^2 x$
$\operatorname{cosec} x$	$-\operatorname{cosec} x \cot x$
$\sec x$	$\sec x \tan x$
$\cot x$	$-\operatorname{cosec}^2 x$

١١ - ٨ : - تفاضل الدوال المثلثية فى الصور المختلفة : -

يستلزم تفاضل الدوال المثلثية تطبيق قاعدة تفاضل دالة الدالة

وكثيراً ما يقتضى الأمر تفاضل دوال مثلثية تحتوى على مضاعفات x مثل ax ، nx والمشتقة الأولى لكل منهما هى a ، n وتظهر كمعامل للمشتقة الأولى فمثلاً : -

$$y = \sin a x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = a \cos a x$$

$$, y = \cos a x$$

$$\therefore y' = -a \sin a x$$

$$، y = \tan a x$$

$$\therefore y' = a \sec^2 a x$$

ونفس الشئ بالنسبة لمقلوب هذه الدوال

وبذلك فإن : -

$$\frac{d}{dx}\sin(3x) = 3\cos(3x)$$

$$،\frac{d}{dx}\cos\left(\frac{x}{5}\right) = \frac{-1}{5}\sin\left(\frac{x}{5}\right)$$

$$،\frac{d}{dx}\tan\left(\frac{ax}{b}\right) = \frac{a}{b}\sec^2\left(\frac{ax}{b}\right)$$

أما الدوال الأكثر تعقيداً فتكون كالتالى : -

$$y = \sin(ax+b) \quad \therefore \frac{dy}{dx} = a\cos(ax+b)$$

$$،y = \sin(\pi+nx) \quad \therefore \frac{dy}{dx} = n\cos(\pi+nx)$$

$$،y = \tan(1-x) \quad \therefore \frac{dy}{dx} = -\sec^2(1-x)$$

$$،y = \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad \therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{2}{x^3}\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

١١ - ٩ : - أمثلة محلولة : -

(١) فاضل $y = \sin^2 x$

الحـــل : -

$$\because y = (\sin x)^2$$

$$\therefore y' = 2\sin x \times \frac{d}{dx}\sin x$$

$$= 2\sin x\cos x$$

$$= \sin 2x$$

(٢) فاضل $y = \sin\sqrt{x}$

الحـــل : -

$$\because y = \sin x^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore y' = \cos x^{\frac{1}{2}} \times \frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}$$

$$= \cos\sqrt{x} \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

(٣) فاضل $y = \sin 2x^3$

الحـــل : - نضع : $u = 2x^3$

$$\therefore \frac{du}{dx} = 6x^2$$

$$, y = \sin u.$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= \cos u. \times 6x^2$$

$$= 6x^2 \times \cos 2x^3$$

(٤) اوجد مشتقة : $y = \sin^2 (x^5)$

الحـــل : -

$$\because y = [\sin (x^5)]^2$$

$$\therefore y' = 2 \sin (x^5) \times \frac{d}{dx} \sin (x^5)$$

$$= 2 \sin (x^5) \times \cos (x^5) \times \frac{d}{dx} (x^5)$$

$$= 2 \sin (x^5) \times \cos (x^5) \times 5x^4$$

$$= 10 x^4 \sin (x^5) \cos (x^5)$$

$$= 5 x^4 \sin (2x^5) \quad , \quad [\sin 2a = 2 \sin a \cos a]$$

(٥) فاضل : - $y = \sqrt{\sin x}$

الحـــل : -

$$\because y = (\sin x)^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore y' = \frac{1}{2} (\sin x)^{\frac{-1}{2}} \times \frac{d}{dx} \sin x$$

$$= \frac{1}{2(\sin x)^{\frac{1}{2}}} \times \cos x$$

$$= \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$$

(٦) اوجد مشتقة : $\cos(3x-4)$

الحـــل : - نضع $u = 3x - 4$

$$\therefore y = \cos(3x-4) = \cos u.$$

$$,\frac{du}{dx} = 3$$

$$,\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$$\therefore y' = -\sin u \times 3$$

$$= -3\sin(3x-4)$$

(٧) اوجد مشتقة $\sec^3(2x)$

الحـــل : - حيث أن : $\sec^3(2x) = [\sec(2x)]^3$

وبوضع $u = \sec(2x)$

$$\therefore y = \sec^3(2x) = [\sec(2x)]^3 = u^3$$

$$,\frac{du}{dx} = \sec(2x) \times \tan(2x) \times 2x$$

$$,\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$$= 3u^2 \times 2x \sec(2x) \tan(2x)$$

$$= 3[\sec(2x)]^2 \times 2x \sec(2x) \tan(2x)$$

$$= 6x \sec^3(2x) \tan(2x)$$

(٨) إذا كانت $y = \frac{(1+\tan x)^2}{x^3}$ فاوجد $\frac{dy}{dx}$

الحـــل : - نستخدم أولاً صيغة تفاضل القسمة :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3 \frac{d}{dx}(1+\tan x)^2 - (1+\tan x)^2 \times \frac{d}{dx} x^3}{x^6}$$

$$= \frac{x^3(2)(1+\tan x)(\sec^2 x) - 3x^2(1+\tan x)^2}{x^6}$$

$$= \frac{2x^3 \sec^2 x(1+\tan x) - 3x^2(1+\tan x)^2}{x^6}$$

$$= \frac{(1+\tan x)[2x \sec^2 x - 3(1+\tan x)]}{x^4}$$

(٩) إذا كانت $y \cot x = \sin(x+y)$ فاوجد y'

الحـــل : – نفاضل كل عنصر من عناصر المعادلة بالنسبة إلى x

$$\therefore -y \operatorname{cosec}^2 x + y' \cot x = \cos(x+y)(1+y')$$

$$\therefore [\cot x - \cos(x+y)]y' = y \operatorname{cosec}^2 x + \cos(x+y)$$

$$\therefore y' = y \frac{\operatorname{cosec}^2 x + \cos(x+y)}{\cot x - \cos(x+y)}$$

(١٠) اوجد تفاضل الدالة :

$$y = 2\sin^3(2x^4)$$

الحـــل : –

$$\frac{dy}{dx} = 2(3)\sin^2(2x^4)\frac{d(\sin 2x^4)}{dx}$$

$$= 6\sin^2(2x^4)\cos(2x^4)\frac{d(2x^4)}{dx}$$

$$= 48\, x^3 \sin^2(2x^4)\cos(2x^4).$$

(١١) اوجد مشتقة الدالة :

$$x = 2\sqrt{4\sin y - 6\cos y.}$$

الحـــل : –

$$x = 2(4\sin y - 6\cos y)^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \frac{dx}{dy} = 2\left(\frac{1}{2}\right)(4\sin y - 6\cos y)^{\frac{-1}{2}}(4\cos y + 6\sin y)$$

$$= \frac{1}{(4\sin y - 6\cos y)^{\frac{1}{2}}}(4\cos y + 6\sin y)$$

$$= \frac{4\cos y + 6\sin y}{\sqrt{4\sin y - 6\cos y}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{\sqrt{4\sin y - 6\cos y}}{4\cos y + 6\sin y} = \frac{x}{4(2\cos y + 3\sin y)}$$

(١٢) اوجد مشتقة الدالة :

$$y = \sin(\cos x) + \sin x \cos x$$

الحـــــل : -

لإيجاد مشتقة الدالة ، نستخدم الصيغة : -

$$\frac{d}{dx}\sin u = \cos u \frac{du}{dx}$$

$$, \frac{d}{dx}\cos u = -\sin u \frac{du}{dx}$$

ثم نستخدم تفاضل حاصل الضرب للحد الأخير بالمعادلة .

$$\frac{dy}{dx} = \cos(\cos x)(-\sin x) + \left[(\sin x)(-\sin x) + (\cos x)(\cos x)\right]$$

$$= -\sin x \cos(\cos x) - \sin^2 x + \cos^2 x$$

$$= \cos^2 x - \sin^2 x - \sin x \cos(\cos x)$$

(متطابقة) $\because \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \cos 2x - \sin x \cos(\cos x)$$

(١٣) فاضل الدالة : -

$$y = \sin nx \sin^n x$$

الحـــــل : -

$$\frac{dy}{dx} = \sin nx \frac{d}{dx}[\sin x]^n + \sin^n \times \frac{d}{dx}(\sin nx)$$

$$= \sin nx . n(\sin x)^{n-1} . \frac{d}{dx}(\sin x) + \sin^n x \cos nx \frac{d}{dx}(nx)$$

$$= n \sin nx . \sin^{n-1} x \cos x + n \sin^n x \cos nx$$

$$= n \sin^{n-1} x(\sin nx \cos x + \cos nx \sin x)$$

$$= n \sin^{n-1} x \sin (n+1) x$$

وفيما يلى موجز فى صورة جدول لقيم بعض الدوال المثلثية لبعض الزوايا الخاصة مقاسة بالتقدير الدائرى وبالدرجات .

	$\theta \begin{cases} 0^\circ \\ 0 \end{cases}$	$30^\circ = \frac{\pi}{6}$	$45^\circ = \frac{\pi}{4}$	$60^\circ = \frac{\pi}{3}$	$90^\circ = \frac{\pi}{2}$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2} = 0.50$	$\frac{1}{2}\sqrt{2} = 0.71$	$\frac{1}{2}\sqrt{3} = 0.87$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3} = 0.87$	$\frac{1}{2}\sqrt{2} = 0.71$	$\frac{1}{2} = 0.50$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3} = 0.58$	1	$\sqrt{3} = 1.73$	∞

Exercise 11

فى كل من المسائل التالية أوجد قيمة الزاوية المركزية بالتقدير الدائرى وبالدرجات ، بمعلومية نصف قطر الدائرة وطول القوس المقابل للزاوية .

١ - نصف القطر $12\ m$ وطول القوس $4\ m$

٢ - نصف القطر $16\ ft$ وطول القوس $4\ ft$

٣ - نصف القطر $2\ cm$ وطول القوس $8\ cm$

٤ - نصف القطر $5\ m$ وطول القوس $\pi\ .m.$

٥ - نصف القطر $20\ cm$ وطول القوس $0.2\ m$

فاضل كل من التالى : -

٦ - $\sin 5x$

٧ - $5 \sin x$

٨ - $\cos \dfrac{x}{3}$

٩ - $\tan \dfrac{x}{2}$

١٠ - $\sec (0.6\, x)$

١١ - $\operatorname{cosec} \left(\dfrac{x}{6}\right)$

١٢ - $\sin 3x + \cos 3x$

١٣ - $\sin 2x - \cos 2x$

١٤ - $\sec x + \tan x$

١٥ - $\sin 4x + \cos 5x$

١٦ - $\cos \dfrac{\theta}{3} + \sin \dfrac{\theta}{4}$

١٧ - $\sin \left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right)$

١٨ - $\cos (3\pi - x)$

١٩ - $\operatorname{cosec} \left(A - \dfrac{7}{2} x\right)$

٢٠ - $\sin^4 x$

٢١ - $\sin x^6$

٢٢ - $\cos^3 (4x)$

٢٣ - $\sec x^2$

٢٤ - $\tan \sqrt{1-x}$

٢٥ - $a \sin nx + b \cos nx$

٢٦ - $B\,(1 - \cos x)$

٢٧ - $3 \tan \dfrac{x}{3}$

٢٨ - $\cos \left(3x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

٢٩ - $\tan 3x - \tan^3 x$

٣٠ - $x^3 + 3 \sin \dfrac{x}{4}$

٣١ - $\cos \dfrac{a}{x}$

٣٢ - $2x\sin x$

٣٣ - $\dfrac{x}{2\sin x}$

٣٤ - $\sin^3(x^2)$

٣٥ - $2x\tan x$

٣٦ - $\dfrac{x}{3\tan x}$

٣٧ - $\dfrac{\tan x}{x}$

٣٨ - $\sin 3x + \sin(3x)^2$

٣٩ - $\cos^3(x^2)$

٤٠ - $x^2\tan x$

٤١ - $\cot(4x+1)$

٤٢ - $\dfrac{\sqrt{x}}{\sin x}$

٤٣ - $x^3\cos 2x$

٤٤ - $\dfrac{2}{2+\cos x}$

٤٥ - $\dfrac{1+\cos x}{1-\sin x}$

٤٦ - $\cot^2 3x$

٤٧ - $\sqrt[3]{\cos x}$

٤٨ - $\sin 2x\cos 2x$

٤٩ - $\sin^2 x - \cos^2 x$

٥٠ - $\sin^2 x + \cos^2 x$

٥١ - $\dfrac{x^2}{\cos 2x}$

٥٢ - $\dfrac{\sin^2 x}{1+\sin x}$

٥٣ - $\dfrac{\tan x - 1}{\sec x}$

٥٤ - $x\sqrt{\sin x}$

٥٥ - $3\sin(2\pi x)$

٥٦ - $\sec^2 x \operatorname{cosec} x$

٥٧ - $\dfrac{2}{2-\tan x}$

فاضل كل من الدوال التالية : -

٥٨ - $y = \sin 5x$

٥٩ - $y = \cos 4x$

٦٠ - $y = \sin x^2$

٦١ - $y = \cos^4 x$

٦٢ - $y = \sqrt{\sin 3x}$

٦٣ - $S = t^2\cos^2 t$

٦٤ - $S = \sin(t+2)\cos t$

٦٥ - $S = \dfrac{\sin 2t}{2t}$

٦٦ - $S = \dfrac{a+\cos t}{a-\cos t}$

٦٧ - $w = \dfrac{a-\tan z}{a+\tan z}$

٦٨ - $w = \sec 5z$

٦٩ - $w = \operatorname{cosec}(1-z)$

٧٠ - $y = z^3 \sec z$

٧١ - $w = \dfrac{\sec z}{1 + \sec z}$

٧٢ - $y = \dfrac{\sin^3 \left(1 - x^2\right)}{x}$

أوجد y' فى كل من المسائل التالية :-

٧٣ - $y \sin x + \cos (x + y) = 0$

٧٤ - $x^2 \tan y + y \tan x = 0$

٧٥ - $y^2 \sec x + \cos x^2 = 0$

٧٦ - فاضل عناصر المتطابقة التالية للحصول على متطابقة مثلثية جديدة : -

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$$

٧٧ - فاضل عناصر المتطابقة التالية للحصول على متطابقة مثلثية جديدة : -

$$2 \sin^2 x = 1 - \cos 2x$$

فاضل الدوال التالية : -

٧٨ - $y = x^2 \sin x$

٧٩ - $y = x^2 \tan x$

٨٠ - $y = \sqrt{x} \cot x$

٨١ - $y = \dfrac{\cos x}{1 + 2 \sin x}$

٨٢ - $y = \sqrt{2x - \sin 2x}$

٨٣ - $y = \sqrt[4]{1 + \cos^2 x}$

٨٤ - $y = \cot^3 \dfrac{x}{3}$

٨٥ - $y = \sqrt{\theta + \cos^2 \left(2\theta + \dfrac{\pi}{4}\right)}$

٨٦ - $y = \tan x + \dfrac{2}{3} \tan^3 x + \dfrac{1}{5} \tan^5 x$

٨٧ - $y = \cos^2 \left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\theta}{2}\right)$

١١ – ١٠ : – التفاضل المتتالى للدوال المثلثية : – successive derivatives

لتكن $y = \sin x$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \cos x$$

$$, \frac{d^2y}{dx^2} = -\sin x$$

$$, \frac{d^3y}{dx^3} = -\cos x$$

$$, \frac{d^4y}{dx^4} = \sin x$$

فإذا ما واصلنا هذه العملية فإن المشتقات السابق حسابها تستمر فى التكرار دون ما نهاية .

ونعلم من حساب المثلثات أن :–

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

وبذلك فإنه يمكن كتابة المشتقات المتتالية السابقة كالتالى : –

$$\because y = \sin x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$، \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left\{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right\}$$

$$= \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \sin\left(x + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \sin\left(x + \frac{2\pi}{2}\right)$$

$$= \sin(x + \pi)$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}[\sin(x + \pi)]$$

$$= \cos x (x+\pi) = \sin\left(x+\pi+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \sin\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)$$

وسوف تستمر العملية هكذا وذلك بزيادة قدرها $\frac{\pi}{2}$ فى كل مرة وتظهر لنا دورياً دالـة الجيب مما يدعونا إلى الاستنتاج التالى : -

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

وبنفس الطريقة يمكن الحصول على التفاضل المتتالى للدالة $\cos\ x$ أما الدوال التالية فهى أكثر تعقيداً مثل : -

$\tan x$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$, $\cot x$

فبعد عدة تفاضلات سُتصبح العملية بحيث يصعب وضعها فى صيغة عامة

١١ - ١١ : - القيم العظمى والصغرى للدوال المثلثية :

Maximum and minimum values of trigonometric functions

(1) $y = \sin x$, $y = \cos x$

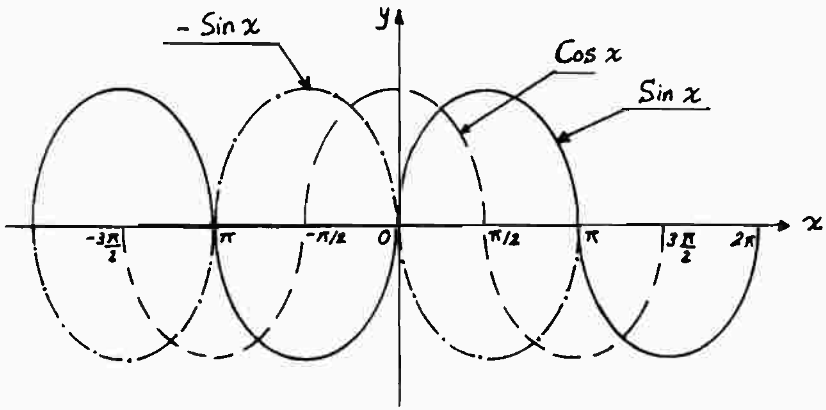
عندما تكون

(1) .... $y = \sin x$

(2) .... $\therefore \frac{dy}{dx} = \cos x$

(3) .... $, \frac{d^2 y}{dx^2} = -\sin x$

والشكل (١١-٤) يوضح هذه الدوال الثلاث فالمنحنى ذو الخـط السـميك هـو منحنـى $\sin\ x$ ، بينما الخط المتقطع يمثل $\frac{dy}{dx}$ فى حين يمثل الخط الرفيع $\frac{d^2 y}{dx^2}$



شكل (١١ - ٤)

الدالة الدورية : - Aperiodic Function

حيث أن : $\sin x = \sin(x+2\pi)$ لذلك فإن جزء المنحنى فيما بين $x=0$ ، $x=2\pi$ سوف يتكرر لدورات أو لفترات مقدارها 2π كلما زادت x ونفس الشئ يتكرر فى الاتجاه السالب لمحور السينات $(x-axis)$.

وعليه فإن جزء المنحنى فيما بين $0 , 2\pi$ سوف يتكرر عدداً لا نهائياً من المرات فيما بين $(\infty + , \infty-)$ وكلها متصلة على شكل منحنى موجى .

، الدالة $y = \sin x$ مثال لما يُطلق عليه بالدوال الدورية ، ويُطلق على العدد 2π بدورة الدالة .

وفيما يلى سنتعرض لشرح منحنى sin x بحيث يزداد وضوح ما سبق دراسته عن تزايد وتناقص الدوال:

(أ) أنواع تقوس المنحنى $\sin x$: -

نلاحظ من الرسم أن المنحنى فيما بين $0 , 2\pi$ يشتمل على أربعة أنواع من التقوس السابق شرحها فى الباب السابع بينما المنحنى الممثل للدالة $\frac{dy}{dx}$ فهو يوضح العلاقة بين صور التقوس هذه وإشارة المعامل التفاضلى .

(ب) نقط التحول على المنحنى $\sin x$: -

يتضح من الرسم أنه توجد نقطتا تحول فيما بين $x=0 , x=2\pi$ عند A , B وقيمها $+1 , -1$ على الترتيب

فعند A حيث $x = \frac{\pi}{2}$ ، $\frac{dy}{dx}=0$ ، $\frac{d^2y}{dx^2}=(-ve)$

فإنه توجد نهاية عظمى

وعند B ، $x = \frac{3\pi}{2}$ ، $\frac{dy}{dx} = 0$ ، $\frac{d^2y}{dx^2} = (+ve)$

فإنه توجد نهاية صغرى .

وهذا الشئ يتكرر مع زيادة x كل فترة قدرها 2π من $-\infty$ إلى $+\infty$

وبالتالى فهنالك عدد لا نهائى من نقط النهايات العظمى والصغرى على التوالى .

(جـ) نقط الانقلاب على المنحنى $\sin x$: -

وفى خلال هذه الدورة (2π) توجد هنالك نقطتا انقلاب وهما (C , D)

فعند "C" يتغير المنحنى من مقعر للأسفل إلى مقعر للأعلى وتكون $\frac{dy}{dx}$ أقل ما يمكن (-1) بينما تكون $\frac{d^2y}{dx^2}=0$ وتتغير من سالب إلى موجب .

وبالتالى فإن "C" تكون ذات أقل ميل ومقداره يعادل قيمة $\frac{dy}{dx}$ عند هذه النقطة (-1)

أى أن المنحنى يعبر محور OX بزاوية $135° = \frac{3\pi}{4}$.

وعند نقطة "D" يحدث العكس حيث يتغير شكل المنحنى من مُقعر للأعلى إلى مقعر للأسفل وتكون $\frac{dy}{dx}$ أكبر ما يمكن ، $\frac{d^2y}{dx^2}=0$ وتغير إشارتها من موجب إلى سالب

وبذلك فإن "D" تكون نقطة ذات أكبر ميل وهو يساوى $1 +$ ويقطع المنحنى المحور OX على زاوية $45° = \frac{\pi}{4}$ كما أنه توجد نقطة انقلاب عند $x=0$ (نقطة الأصل) .

والشكل يُفسر كل ما هو مدون بجدول (٧ - ١) بالباب السابع .

أما بالنسبة لمنحنى $\cos\ x$ فهو نفسه منحنى $\sin\ x$ إلا أنه متحركا (منزاحًا) لليسار على محور OX بمقدار $\frac{\pi}{2}$.

ويمثله فى الشكل السابق (١١ - ٤) منحنى $\frac{dy}{dx}$ المتقطع وهو يقطع محور OX عند $\frac{\pi}{2}$ ، $\frac{3\pi}{2}$،...

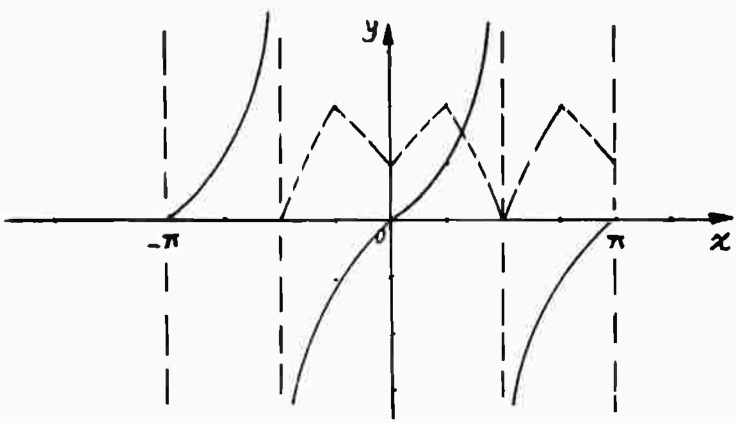
(2) $y = \tan\ x \quad , \quad y = \cot\ x$

$\because y = \tan\ x$ ، $\because y = \cot\ x$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \sec^2\ x \qquad \therefore \frac{dy}{dx} = -\text{cosec}^2\ x$

$, \frac{d^2y}{dx^2} = 2\ \sec^2 x\ \ \tan\ x \quad , \frac{d^2y}{dx^2} = 2\ \text{cosec}^2\ x\ \ \cot\ x$

ويوضح الشكل (١١ - ٥) منحنى $\tan\ x$ وكذلك منحنى مشتقتها الأولى $\sec^2\ x$ (المتقطع بالشكل) .



شكل (١١ - ٥)

وفيما يلى بعض خواص منحنى $y = \tan\ x$: -

(ا) المنحنى غير متصل وعندما $x \to \frac{\pi}{2}$ فإن $\tan x \to +\infty$ وعند الاقتراب من $\frac{\pi}{2}$ فإن كل زيادة طفيفة فى x ينشأ عنها زيادة كبيرة فى قيمة y (تصل فى النهاية إلى ما لا نهاية) . وعند عبور $\frac{\pi}{2}$ فإن أى زيادة طفيفة فى x تؤدى إلى أن تكون الزاوية فى الربع الثانى وبذلك يكون الميل سالب ، بينما تبقى قيمته كبيرة جداً (لا نهائية) .

وتؤدى هذه الزيادة الطفيفة فى x إلى تغير قيمة y من $-\infty$ إلى $+\infty$.

وهذا هو السبب الرئيسى فى عدم استمرارية المنحنى واتصاله وتتكرر العملية عند $x = \frac{3\pi}{2}$ ، عند $x = \frac{5\pi}{2}$ ،... الخ .

(ب) منحنى $\tan x$ هو منحنى دورى ودورته مقدارها π .

(جـ) الدالة دائماً متزايدة بزيادة x وهذا يُعرف من أن $\frac{dy}{dx}$ وهى تساوى $\sec^2 x$ دائماً موجبة .

(د) توجد نقطة انقلاب عندما $x = \pi$ ويتغير شكل المنحنى من مقعر للأسفل إلى مقعر للأعلى ويكون المعامل التفاضلى أى $\sec^2 x$ أقل ما يمكن وبقيمة $= +1$.

وهذا يعنى أن المنحنى يقطع محور OX على زاوية قدرها $\frac{\pi}{4}$ كما وتظهر نقط انقلاب أخرى عند $x = 0$ وعند أى مضاعفات صحيحة لـ π أى عند 0 ، π ، 2π ، 3π ،....

وحيث أن $\cot x = \frac{1}{\tan x}$ لذلك فإن منحنى $\cot x$ يكون معكوس أو مقلوب منحنى $\tan x$ ، فهو دائماً متناقص لأن $(-\operatorname{cosec}^2 x)$ دائماً سالبة كما أنه منحنى دورى كذلك وتكون نقط انقلابه عند $x = \frac{\pi}{2}$ ، $x = \frac{3\pi}{2}$ ،....

وعلى القارئ أن يحاول رسم هذا المنحنى كتدريب له

(3) $y = \operatorname{cosec} x \quad , \quad y = \sec x$

يمكن معرفة نقط تحول هذه المنحنيات من مقلوباتها التى سبق دراستها فعندما تكون $\sin x$ فى أقصى قيمة لها تكون $\operatorname{cosec} x$ فى أقل قيمها ، كما وأن هذه المنحنيات دورية وتظهر نقط النهاية العظمى والصغرى على التتابع .

فإذا كانت :

$$y = \operatorname{cosec} x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\operatorname{cosec} x \cot x$$

وعندما $x = \frac{\pi}{2}$ فإن $-\operatorname{cosec} x = -1$ ، $\cot x = 0$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 0$$

كما وأن $\frac{d^2y}{dx^2}$ تكون موجبة

وعليه فإنه توجد نهاية صغرى عندما $x = \frac{\pi}{2}$ ، وكلاً من المنحنيين غير متصلين ودوريين .

١١ - ٢ : - أمثلة محلولة : -

اوجد نقط التحول على المنحنى : -

$$y = \sin x + \cos x$$

الحـــل : -

$$\because y = \sin x + \cos x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \cos x - \sin x$$

وعند نقط التحول تكون $\frac{dy}{dx} = 0$

$$\therefore \cos x - \sin x = 0$$

$$\therefore \sin x = \cos x$$

$$\therefore \frac{\sin x}{\cos x} = 1 = \tan x = \tan \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{4}$$

وهى أصغر زاوية فى سلسلة من الزوايا التى يكون الميل عندها $= +1$ وهذه الزوايا تجمعها صيغة رياضية عامة كالتالى : -

$$n\pi + \frac{\pi}{4}$$

وبوضع .... , $n = 0 , 1 , 2$

∴ الزوايا التى تظهر عندها نقط تحول فى الدالة المعطاة هى : $\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \ldots$

$$\because \frac{d^2y}{dx^2} = -(\sin x + \cos x) ،$$

وهى سالبة عندما تكون : $x = \frac{\pi}{4} , \frac{9\pi}{4} , \ldots.$

وتكون موجبة عندما تكون : $x = \frac{5\pi}{4} , \frac{13\pi}{4}$

وواضح أن المنحنى دورى وتظهر قيمته العظمى والصغرى على التوالى كالتالى : -

أقصى قيم عند $x = \frac{\pi}{4} , \frac{9\pi}{4} , \ldots.$

أقل قيم عند $x = \frac{5\pi}{4} , \frac{13\pi}{4} , \ldots.$

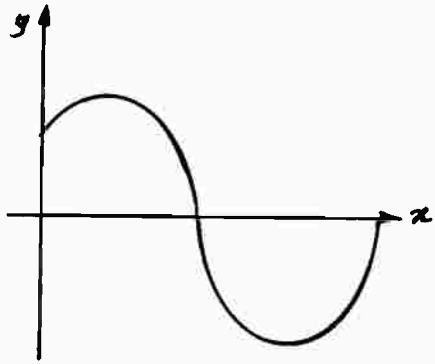
وعندما تكون $x = \frac{\pi}{4}$ فإن أقصى قيمة للدالة :

$$\max \ value = \sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

وبنفس الطريقة فإن أقل قيمة للدالة .

$$\min. \ value = \sin \frac{5\pi}{4} + \cos \frac{5\pi}{4}$$
$$= \frac{-1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

ويوضح الشكل (١١ - ٦) ، المنحنى حيث P أقصى قيمة للدالـــة ، Q أقل قيمة وواضح أن A هى نقطة انقلاب .



شكل (١١ - ٦)

ويكون رسم المنحنى ، برسم منحنى $\sin x$ ، منحنى $\cos x$ ثـم يتـم جمـع المنحنيـين في منحنى واحد وذلك بجمع قيم y عند كل نقطة .

ومثل هذا المنحنى يعتبر مثال لما يُطلق عليه بالمنحنى الهـارمونى Harmonic Curve أو منحنى موجى Wave diagram .

وهى ذات أهمية كبيرة خاصة فى مجال الهندسة الكهربائية .

Exercise 12

عند أى قيم لـ x ، فى خلال المدى $0<x<\pi$ توجد قيم عظمى أو صغرى للدوال التالية ثم حدد نوعيتها .

(١) $\sin 2x - x$

(٢) $\sin^2 x \cos^2 x$

(٣) $\sin x + \cos 2x$

(٤) $\sin x + \sin x \cos x$

(٥) $\dfrac{\sin x}{1 + \tan x}$

(٦) $2 \sin x + \cos x$

(٧) حدد أصغر قيمة لـ x والتى تجعل الدالة : -

$$2 \sin x + 3 \cos x$$

فى أقصى قيمة لها .

(٨) حدد أصغر قيمة لـ x والتى تجعل الدالة : -

$$\tan^2 x - 2 \tan x$$

ذات قيمة عظمى أو صغرى .