الباب الثانى عشر

تفاضل الدوال المثلثية العكسية

Differentiation of The inverse trigonometric (circular) functions

١٢ – ١ : – عام :

إذا اعتبرنا الدالتين $y = \sin x$ ، الدالة $x = \sin y$

سنجد أن منحنى الدالة $y = \sin x$ يتموج حول محور السينات كما سبق وأن بينا .

وبنفس الطريقة سنجد أن منحنى الدالة $x = \sin y$ يتموج حول محور الصادات تماماً مثل المنحنى الأول عند إدارة المحاور حول نقطة الأصل بزاوية قدرها $\frac{\pi}{4}$ فى عكس اتجاه عقارب الساعة .

وفى الدالة $y = \sin x$ حيث الجيب دالة فى الزاوية وعند تغير قيمة x فإن قيمة الجيب تتغير بالتبعية وهذا يعنى أن x هى المتغير المستقل بينما y هى المتغير التابع .

وفى الدالة $x = \sin y$ فإن الزاوية هنا دالة فى الجيب وبذلك فإن الجيب هنا هو المتغير المستقل بينما الزاوية x هى المتغير التابع وعليه فإنه عند تغير جيب الزاوية فإن x تتغير بالتبعية .

ويمكن التعبير عن الدالة $x = \sin y$ بالدالة $y = \sin^{-1} x$ ، y هنا تعنى الزاوية التى جيبها $= x$.

أى أن $x = \sin y$ هى نفسها $y = \sin^{-1} x$.

،(-1)هنا لا تعنى أن الجيب مرفوعاً للأس (-1) مثل $\left[Z^{-1}\right.$ أو $\frac{1}{Z}$ ومثل Z^{-2}أو $\left.\frac{1}{Z^2}\right)$ ولكنها تعنى الدالة العكسية للجيب .

وبالمثل فإن كل الدوال المثلثية الأخرى لها دوال مثلثية عكسية مثل : –

$y = \cos^{-1} x , y = \tan^{-1} x , y = \sec^{-1} x , y = \cot^{-1} x , y = \mathrm{cosec}^{-1} x.$

١٢ - ٢ : - تفاضل الدالة $\sin^{-1} x , \cos^{-1} x ,$

لتكن :

$$y = \sin^{-1} x$$

$$\therefore x = \sin y$$

وبتفاضل x بالنسبة إلى y : -

$$\therefore \frac{dx}{dy} = \cos y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)} = \frac{1}{\cos y}$$

$$, \because \sin^2 y + \cos^2 y = 1$$

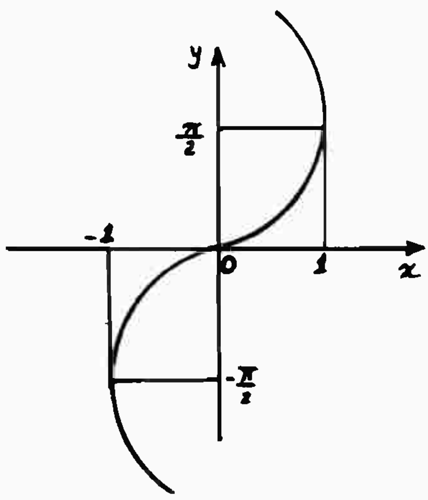
$$\therefore \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

وبالمثل فإنه إذا كانت : $y = \cos^{-1} x$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = - \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

وبمساعدة رسم الدالة $y = \sin^{-1} x$ ، نلاحظ الآتى على هذه الدوال وعلى معاملاتها التفاضلية . ، انظر الرسم شكل (١٢ - ١) .



شكل (١٢ - ١)

(١) الدالة متعددة القيم بمعنى أنه لأى قيمة لـ x ، يوجد عدد لا نهائى لقيم y بينما الدالة $y = \sin x$ وحيدة القيمة حيث أنه لكل قيمة لـ x توجد قيمة واحدة لـ y وتساوى $\sin x$

(٢) حيث أن $\sin y$ تقع بين -1 , $+1$ لذلك فالدالة $\sin^{-1} x$ تكون موجودة فقط بين قيمتى x هذه

(٣) حيث أنه يوجد عدد لا نهائى من الزوايا لها نفس الجيب لذلك فإنه لأى قيمة لـ x تقع فيما بين $+1$, -1 ، يوجد عدد لا نهائى من النقاط على المنحنى . فمثلاً : -

إذا كانت $x = +\frac{1}{2}$ فإن قيم y عند ... , P , Q , R تمثل ثلاث من الزوايا التى جيب كل منها = $+\frac{1}{2}$ وعند Q تكون الزاوية هى أصغر زاوية موجبة .

(٤) المعامل التفاضلى للمقدار $\sin^{-1} x$ وهو $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ، يكون موجباً أو سالباً ، فبالرجوع للشكل (١٢ - ١) نجد أن كل النقط مثل Q حيث يكون ميل المنحنى ممثلاً فى المماس ، صانعاً زاوية حادة ، فإن $(d.c.)$ ، المعامل التفاضلى يكون موجباً .

بينما فى نقطة مثل P وكذلك R فإن زاوية ميل المماس تكون منفرجة وبالتالى فإن المعامل التفاضلى $(d.c.)$ يكون سالباً .

(٥) حيث أن x تقع بين $+1$, -1 ، لذلك فإن المقدار $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ، لا يمكن أن ينعدم " أى أن قيمة ما تحت الجذر دائماً أكبر من الصفر "

وبالتالى فإنه لا توجد نقط نهاية عظمى أو صغرى على المنحنى (مناظرة لقيم x التى تقل عن $+1$ وتزيد عن -1 أى $-1 < x < 1$)

وعندما تكون $x = \pm 1$ تماماً فإن قيمة المقدار : $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ تساوى الصفر مثل النقط A , B

حيث يكون مماس المنحنى عمودياً على محور $X`OX$

١٢ - ٣ : - تفاضل الدالة : - $\tan^{-1} x \;,\; \cot^{-1} x$

إذا كانت $y = \tan^{-1} x$

$$\therefore x = \tan y$$

وبإجراء التفاضل بالنسبة إلى y

$$\therefore \frac{dx}{dy} = \sec^2 y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1+\tan^2 y}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

وبالمثل ، إذا كانت :

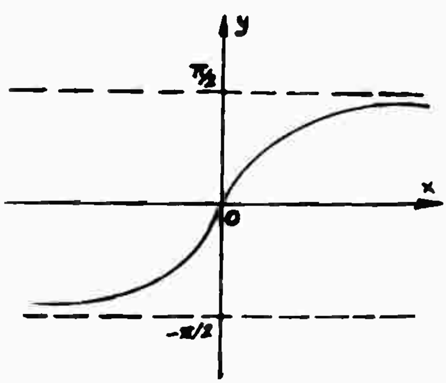
$$y = \cot^{-1} x$$

$$\therefore x = \cot y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{1+x^2}$$

وبمساعدة رسم الدالة $y = \tan^{-1} x$ ، نلاحظ الآتى على هذه الدوال : -

$\left[\tan^{-1} x , \cot^{-1} x\right]$ انظر الرسم شكل (١٢ - ٢) .



شكل (١٢ - ٢)

(١) $\frac{dy}{dx}$ دائماً موجبة ، وعليه فإن y دائماً تتزايد

(٢) $\frac{dy}{dx}$ لا تنعدم أبداً لأى قيمة لـ x وبذلك فلا توجد نقط تحول (عظمى أو صغرى)

(٣) تظهر نقط الانقلاب عندما : - $y = 0, \pi, 2\pi, -\pi, \ldots$ ويكون ميل المماس عندها موجباً .

كما وأن منحنى $y = \cot^{-1} x$ هو عكس هذا المنحنى (١٢ - ٢) حيث تكون $\frac{dy}{dx}$ دائماً سالبة وبالتالى فالدالة دائماً تتناقص ولا توجد نقط تحول (عظمى أو صغرى) ولكن توجد مجموعة من نقط الانقلاب عندما يكون الميل سالباً

ويمكن للقارئ أن يتدرب على رسم هذا المنحنى $\left(y = cot^{-1} x\right)$

١٢ - ٤ : - تفاضل الدالة : - $y = \sec^{-1} x , y = \operatorname{cosec}^{-1} x$

إذا كانت :

$$y = \sec^{-1} x$$

$$\therefore x = \sec y$$

$$\therefore \frac{dx}{dy} = \sec y \tan y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec y \tan y}$$

ولكن :

$$, \tan y = \sqrt{\sec^2 y - 1} = \sqrt{x^2 - 1}$$

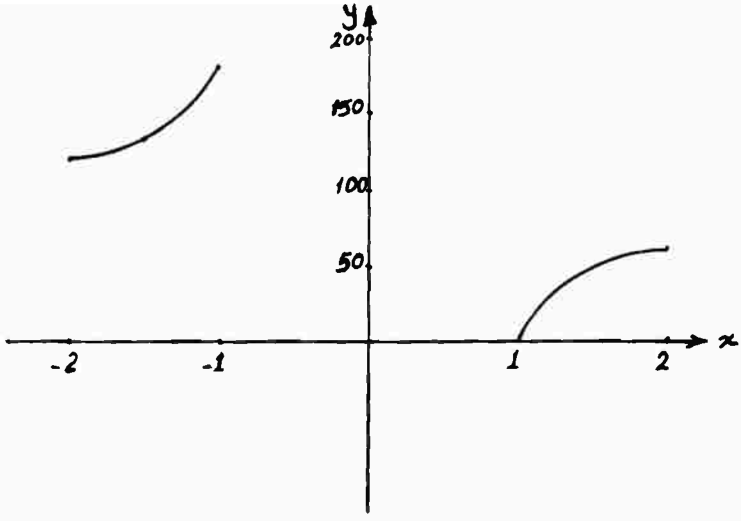
$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

وبالمثل إذا كانت :

$$y = \operatorname{cosec}^{-1} x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

ويمثل الشكل (١٢ - ٣) ، أجزاء من هذا المنحنى $\left[y = \sec^{-1} x\right]$ ويلاحظ أنه متعدد القيم وغير متصل ولا يوجد أى جزء من المنحنى فيما بين قيم x : $(x = -1 , x = +1)$ أى أن $-1 > x > +1$.



شكل (١٢ - ٣)

كما أن $\frac{dy}{dx}$ أى $\left(\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\right)$ ؛ لا تنعدم لأى قيمة محددة لـ x وبذلك فلا توجد هنالك نقط تحول إلا أنه عندما تكون $x = \pm 1$ فإن $\frac{dy}{dx}$ تصبح مساوية لما لا نهاية (أى المقام يصبح صفراً)

كما فى حالة منحنى $y = \sin^{-1} x$ وكذلك منحنى $y = \cos^{-1} x$

خلاصة : -

فيما يلى بيان لتفاضل الدوال العكسية المثلثية ، يمكن الرجوع إليها عند الحاجة إلا أنه يفضل (حفظها) كتفاضلات رئيسية .

الدالة	dy / dx
$\sin^{-1} x$ $\cos^{-1} x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\tan^{-1} x$ $\cot^{-1} x$	$\frac{1}{1+x^2}$ $\frac{-1}{1+x^2}$
$\sec^{-1} x$ $\text{cosec}^{-1} x$	$\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ $\frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$

جدول رقم (١٢ - ١)

ونذكر فيما يلي موجز لبيان مجال domain الدوال المثلثية العكسية "الستة" : -

$y = \sin^{-1} x$	$-1 \le x \le 1$	$\frac{-\pi}{2} \le \sin^{-1} x \le \frac{\pi}{2}$
$y = \cos^{-1} x$	$-1 \le x \le 1$	$0 \le \cos^{-1} x \le \pi$
$y = \tan^{-1} x$	$-\infty < x < \infty$	$\frac{-\pi}{2} < \tan^{-1} x < \frac{\pi}{2}$
$y = \cot^{-1} x$	$-\infty < x < \infty$	$0 < \cot^{-1} x < \pi$
$y = \sec^{-1} x$	$\|x\| \ge 1$	$0 \le \sec^{-1} x \le \pi$
$y = \text{cosec}^{-1} x$	$\|x\| \ge 1$	$\frac{-\pi}{2} \le \text{cosec}^{-1} x \le \frac{\pi}{2}$

جدول (١٢ - ٢)

كما يجب كذلك ملاحظة أن : -

$$\sin^{-1}\frac{x}{a} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$\tan^{-1}\frac{x}{a} = \frac{a}{a^2 + x^2}$$

$$\sec^{-1}\frac{x}{a} = \frac{a}{x\sqrt{x^2 - a^2}}$$

$$\cos^{-1}\frac{x}{a} = \frac{-1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$\cot^{-1}\frac{x}{a} = \frac{-a}{a^2 + x^2}$$

$$\operatorname{cosec}^{-1}\frac{x}{a} = -\frac{a}{x\sqrt{x^2 - a^2}}$$

١٢ – ٥ : – أمثلة محلولة : –

(١) أوجد مشتقة الدالة : $y = \sin^{-1} x^2$

الحـــل : –

باستخدام قاعدة دالة الدالة :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(x^2\right)^2}} \times \frac{d}{dx}x^2$$

$$= \frac{2\,x}{\sqrt{1-x^4}}$$

(٢) اوجد مشتقة الدالة $y = \tan^{-1}\frac{1}{x^2}$

الحـــل : –

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x^2}\right)^2} \times \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{1+\frac{1}{x^4}} \times \frac{-2}{x^3}$$

$$= \frac{x^4}{x^4+1} \times \frac{-2}{x^3} = \frac{-2x}{x^4+1}$$

(٣) اوجد مشتقة الدالة $y = x^2 \sin^{-1}(1-x)$

الحـــل : - باستخدام قاعدة حاصل الضرب :

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 2x \sin^{-1}(1-x) + x^2 \times \frac{1}{\sqrt{1-(1-x)^2}} \times \frac{d}{dx}(1-x)$$

$$= 2x \sin^{-1}(1-x) + \frac{x^2}{\sqrt{1-\left(1-2x+x^2\right)}} \times -1$$

$$= 2x \sin^{-1}(1-x) - \frac{x^2}{\sqrt{2x-x^2}}$$

(٤) إذا كانت $y = \sin^{-1}\left(x^2-1\right)$ فاوجد $\frac{dy}{dx}$

الحـــل : -

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{d}{dx}\left(x^2-1\right)}{\sqrt{1-\left(x^2-1\right)}}$$

$$= \frac{2x}{\sqrt{2x^2-x^4}} = \frac{2}{\sqrt{2-x^2}}$$

(٥) فاضل الدالة : $y = \left(\tan^{-1}\sqrt{x}\right)^3$

الحـــل : -

$$\frac{dy}{dx} = 3\left(\tan^{-1}\sqrt{x}\right)^2 \times \frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}\sqrt{x}\right)$$

$$= 3\left(\tan^{-1}\sqrt{x}\right)^2 \times \frac{\frac{d}{dx}\sqrt{x}}{1+x}$$

$$= \frac{3\left(\tan^{-1}\sqrt{x}\right)^2}{2\sqrt{x}\,(1+x)}$$

(٦) فاضل : – $y = x\cos^{-1}\frac{1}{x}$

الحــــل : –

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x\left(-1/x^2\right)}{\sqrt{1-1/x^2}} + \cos^{-1}\frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{x\sqrt{1-1/x^2}} + \cos^{-1} 1/x$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} + \cos^{-1}\frac{1}{x}$$

(٧) أوجد تفاضل الدالة $y = arc\sin 4x$

الحــــل : –

$$\because arc\sin x \text{ means } \sin^{-1}x ,\ u = 4x \ \therefore \frac{du}{dx} = 4$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\sin^{-1}4x = \frac{d}{dx}\sin^{-1}u$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \times \frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-(4x)^2}} \times 4$$

$$= \frac{4}{\sqrt{1-16x^2}}$$

(٨) اوجد ميل الدالة : – $y = 4x\ arc\tan 2x$ عند النقطة $x = \frac{1}{2}$.

الحـــل : – لإيجاد ميل الدالة نوجد مشتقتها ، والدالة y هى عبارة عن حاصل ضرب دالتين فى x [$arc\ \tan 2x$ ، $4x$] ولذلك نستخدم قاعدة الضرب فى إيجاد مشتقة هذه الدالة .

$$\frac{dy}{dx} = 4x\left[\frac{1}{1+(2x)^2}\cdot\frac{d}{dx}(2x)\right] + arc\ \tan 2x \times \frac{d}{dx}(4x)$$

$$= \frac{8x}{1+4x^2} + 4\,arc\ \tan\ 2x$$

وبوضع $x = \frac{1}{2}$:

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{4}{2} + 4\ arc\ \tan\ 1$$

$$= 2 + 4\left(\frac{\pi}{4}\right) = 5.14$$

(٩) اوجد مشتقة الدالة : $y = \sqrt{arc\sin 2x}$

الحـــل : – لحل المسألة نستخدم القاعدة : –

$$\frac{d}{dx}\left(u^n\right) = n\,u^{n-1}\frac{du}{dx}$$

$$,\frac{d}{dx}\sin^{-1}u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot\frac{du}{dx}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(arc\sin 2x)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(arc\sin 2x)^{\frac{-1}{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}}\right]2$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{arc\sin 2x}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{arc\sin 2x - 4x^2\ arc\sin 2x}}$$

(١٠) اوجد مشتقة الدالة : $y = arc\ \tan\frac{x-a}{1+ax}$ **حيث** a **ثابت** .

الحـــل : – نستخدم فى حل هذه المسألة ، مشتقة الدالة العكسية للظل $(arc\ \tan)$:

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1}u=\frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$$

وكذلك قاعدة القسمة :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{V\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$,\frac{d}{dx}\left(arc\tan\frac{x-a}{1+ax}\right)=\left[\frac{1}{1+\left(\frac{x-a}{1+ax}\right)^2}\right]\left[\frac{(1+ax)(1)-(x-a)(a)}{(1+ax)^2}\right]$$

$$=\left[\frac{1}{1+\frac{x^2-2ax+a^2}{1+2ax+a^2x^2}}\right]\left[\frac{1+ax-ax+a^2}{1+2ax+a^2x^2}\right]$$

$$=\frac{1\ +\ a^2}{1+2ax+a^2x^2+x^2-2ax+a^2}$$

$$=\frac{1+a^2}{\left(1+a^2\right)\left(1+x^2\right)}=\frac{1}{1+x^2}$$

(١١) اوجد تفاضل الدالة : $y=arc\sec\frac{x^2+1}{x^2-1}$

الحـــل : -

$$\because\frac{d}{dx}\sec^{-1}u=\frac{-1}{u\sqrt{u^2-1}}\cdot\frac{du}{dx}$$

$$,\because\frac{d}{dx}\frac{U}{V}=\frac{V\frac{du}{dx}-U\frac{dv}{dx}}{V^2}$$

$$\therefore\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)}{\frac{x^2+1}{x^2-1}\sqrt{\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^2-1}}$$

$$= \frac{\dfrac{(x^2-1)\,2x - (x^2+1)\,2x}{(x^2-1)^2}}{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\cdot\dfrac{2x}{x^2-1}}$$

$$= \frac{-2}{x^2+1}$$

(١٢) إذا علمت أن :

$$y = (x-a)\sqrt{2ax-x^2} + a^2\ arc\ \sin\frac{x-a}{a}$$

فاوجد $\dfrac{dy}{dx}$ **حيث** a **ثابت .**

الحـــل : – لإيجاد $\dfrac{dy}{dx}$ نستخدم قاعدة السلسلة فـى الضرب بالنسبة للحد الأول ، كما نستخدم القاعدة : –

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1}u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot\frac{du}{dx}$$

فى الحد الثانى .

أولا : –

$$\frac{d}{dx}\left[(x-a)(2ax-x^2)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$= (x-a)\times\frac{1}{2}(2ax-x^2)^{\frac{-1}{2}}(2a-2x)+(2ax-x^2)^{\frac{1}{2}}\times 1$$

$$= \frac{(x-a)(a-x)}{\sqrt{2ax-x^2}}+\sqrt{2ax-x^2}$$

$$= \frac{(x-a)(a-x)+(2ax-x^2)}{\sqrt{2ax-x^2}}$$

$$= \frac{-x^2+2ax-a^2\pm 2ax-x^2}{\sqrt{2ax-x^2}}$$

$$= \frac{2(-x^2+2ax)-a^2}{\sqrt{2ax-x^2}}$$

ثانيا : - نوجد :

$$\frac{d}{dx}\left[a^2\ arc\ \sin\frac{x-a}{a}\right]$$

$$=a^2\left[\frac{1\left[\frac{1}{a}\right]}{\sqrt{1-\left(\frac{x-a}{a}\right)^2}}\right]=\frac{a}{\sqrt{1-\left[\frac{x^2-2ax+a^2}{a^2}\right]}}$$

$$=\frac{a}{\sqrt{\frac{-x^2+2ax}{a^2}}}=\frac{a^2}{\sqrt{-x^2+2ax}}$$

وبجمع النواتج فى أولا وثانيا : -

$$\therefore\frac{dy}{dx}=\frac{2\left(-x^2+2ax\right)-a^2}{\sqrt{2ax-x^2}}+\frac{a^2}{\sqrt{2ax-x^2}}$$

$$=\frac{2\left(-x^2+2ax\right)}{\sqrt{2ax-x^2}}$$

$$=2\sqrt{2ax-x^2}$$

(١٣) عبر بالتقدير الدائرى عن الزوايا فيما يلى :

$$\sin^{-1}\left(\frac{-1}{2}\right)\quad,\quad\tan^{-1}\sqrt{3}$$

$$,\cos^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)\quad,\quad\cot^{-1}\left(-\sqrt{3}\right)$$

الحـــــل : -

$$\sin^{-1}\left(\frac{-1}{2}\right)=\frac{-\pi}{6}$$

$$,\tan^{-1}\left(\sqrt{3}\right)=\frac{\pi}{3}$$

$$,\cos^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{3\pi}{4}$$

$$,\cot^{-1}\left(-\sqrt{3}\right)=\frac{5\pi}{6}$$

Exercise 13

عبر بالتقدير الدائرى عن كل من الزوايا فى المسائل التالية : –

(١) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

(٢) $\cot^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

(٣) $\tan^{-1}(-1)$

(٤) $\tan^{-1}(0)$

(٥) $\operatorname{cosec}^{-1}(2)$

فى الزوايا التالية عبر عنها إلى أقرب درجة بالتقدير الستينى للزوايا .

(٦) $\sin^{-1}(-0.7839)$

(٧) $\sin^{-1}(0.2851)$

(٨) $\cos^{-1}(-0.3729)$

(٩) $\cos^{-1}(0.9247)$

(١٠) $\tan^{-1}(-0.8423)$

(١١) $\tan^{-1}(0.4385)$

(١٢) عبر عن $\cos^{-1}(-x)$ بدلالة $\cos^{-1}(x)$

فاضل الدوال التالية : –

(١٣) $\sin^{-1}(4x)$

(١٤) $\sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)$

(١٥) $b\cos^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)$

(١٦) $b\cos^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$

(١٧) (أ) $y=\sin^{-1}\frac{x}{a}$

(ب) $y=\tan^{-1}\frac{x}{a}$

(١٨) $\sin^{-1}\sqrt{x}$

(١٩) $\cos^{-1}2x^2$

(٢٠) $\tan^{-1}(a-x)$

(٢١) $\sin^{-1}(2x-1)$

(٢٢) $\cos^{-1}(1-x)$

(٢٣) $x\sin^{-1}x$

(٢٤) $\sin^{-1}(3x-1)$

(٢٥) $\sin^{-1}\dfrac{1}{x}$

(٢٦) $\operatorname{cosec}^{-1}\dfrac{x}{2}$

(٢٧) $x^2\sin^{-1}x$

(٢٨) $\tan^{-1}\dfrac{x-1}{2}$

(٢٩) $\sin^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

(٣٠) $\operatorname{cosec}^{-1}\dfrac{1}{2x^2-1}$

(٣١) $2\sec^{-1}ax$

(٣٢) $\tan^{-1}\sqrt{x}$

(٣٣) $\sec^{-1}\dfrac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}$

(٣٤) $\sec^{-1}\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

(٣٥) $\tan^{-1}\dfrac{2x}{1-x^2}$

(٣٦) $\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

(٣٧) $\tan^{-1}\dfrac{2x+1}{3}$

(٣٨) $x^3 \cot^{-1} \frac{x}{3}$

(٣٩) $\tan^{-1}(x+1)$

(٤٠) $\sec^{-1} 5x$

(٤١) $\sin^{-1} \sqrt{\sin x}$

(٤٢) $(x^2+1)\tan^{-1} x$

(٤٣) $\tan^{-1} \frac{x}{2-\sqrt{4-x^2}}$

(٤٤) $\tan^{-1} \frac{x+1}{x-1}$

(٤٥) $x^2 \cos^{-1}(1-x^2)$

(٤٦) $x \tan^{-1} x$

(٤٧) $\tan x \sin^{-1} x$

(٤٨) $\left[\sin^{-1}(x^2-2)\right]^2$

(٤٩) $\sin^{-1} \sqrt{1-\frac{1}{x^2}}$

(٥٠) $y=(2x^2-1) arc \cos \left(x-x\sqrt{1-x^2}\right)$