الباب الثالث عشر

الدوال الأُسية واللوغاريتمية

Exponential and logarithmic functions

١٣-١ :- عام

وقد سبق لنا دراسة القوانين التالية فى الجبر الأولى ،

$$1-\ a^m\ a^n = a^{m+n} \qquad 4-\ \left(a^m\right)^n = a^{mn}$$

$$2-\ \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad 5-\ (ab)^m = a^m\ b^m$$

$$3-\ \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} \qquad 6-\ a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

وللتحدث عن الأسس الكسرية فإنه يلزم التعرض لجذور الأعداد ومن ثم يجب معرفة ما هو جذر العدد .

فإذا كان لدينا عددين b , a بحيث أن الأُس النونى (n) للعدد a [n عدد موجب] أى a^n يساوى b

فإنه يقال أن a هى الجذر النونى للعدد b أى أنه :-

$$if \quad a^n = b$$

$$\therefore \quad a = \sqrt[n]{b}$$

وكما نعلم فإن أى عدد لا صفرى *nonzero number* ، يكون له جذران تربيعيان وثلاثة جذور تكعيبية وأربعة جذور من الدرجة الرابعة وهكذا ؛

وتشتمل جذور الأعداد على قيم حقيقية وتخيلية .

فإذا فرضنا أن عدداً له جذر نونى واحد حقيقى فإنه يُطلق على هذا الجذر بالجذر النونى الرئيسى .

وعليه فإن الجذر التكعيبى الرئيسى للعدد ٢٧- هو ٣- بينما الجذران الآخران فهما تخيليان والجذر الرئيسى الرابع للعدد ١٦ هو ٢

كما وأن الجذور الزوجية الرتبة للأعداد السالبة تكون كلها تخيلية .

مثـل : $\sqrt{-9}$, $\sqrt[4]{-256}$ ، وفى هذه الحالات فإنه لا يمكننـا أخـذ وتحديـد أحـد الجـذور كجذر رئيسى للعدد السالب .

وعموماً فإن $\sqrt[n]{a}$ يرمز للجذر الرئيسى النونى للعدد a

فإذا ما افترضنا أن m عدداً موجباً أو سالباً وأن n عدداً موجباً.

وأن a عدداً موجباً ، عندما تكون n عدداً زوجياً .

فإذا كانت a عدداً موجباً أو سالباً وكانت n عدداً فردياً . فإنه :- $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

وبعد هذا التقديم السريع للأسس ، فإن الطريق يصبح مفتوحاً أمامنا ، لدراسة اللوغاريتمـات والتعرف على خواصها .

تعـريف :- إذا كانت b عدداً موجباً خلاف الواحد ، وأن y عدد حقيقى فى المعادلة :-

$$x = b^y$$

فإن y تُعرف بأنها لوغاريتم x للأساس b

أى أن لوغاريتم العدد x ، هو الأُس الذى يرفع له عدد ما (الأساس) لكى يصبـح مسـاوياً للعدد x

أى أن y وهى اللوغاريتم للعدد x هى الأس الذى يرفع إليه العدد y لكـى تصبـح النتيجـة هى العدد x .

وتكتب : $y = Log_b\ x$ أى أنه يتم التعبير عن معنى y هذا بكتابة $Log_b\ x$

وبذلك فإن :- $b^y = x \quad , \quad y = Log_b\ x$

تُعبر عن نفس العلاقات الرابطة بين y , x , b والصورة $b^y = x$ هــى معادلـة فـى الصـورة الأُسية بينما $y = Log_b\ x$ هى معادلة فى الصورة اللوغاريتمية .

ونذكر هنا ثلاثة قوانين هامة للوغاريتمات والتى يتم استنتاجها من قوانين الأسس :-

$$Log_b\ MN = Log_b\ M + Log_b\ N$$

$$, Log_b \frac{M}{N} = Log_b\ M - Log_b\ N$$

$$, Log\ M^p = p\ Log_b\ M$$

ويوجد نظامان للوغاريتمات يستخدمان بكثرة فى الرياضيات ؛

فى النظام الأول (اللوغاريتمات العددية) الأساس هو العدد ١٠ وتستخدم فى الحسابات .

أما فى الأعمال النظرية وحساب التفاضل فإنه يفضل استعمال أساس آخر خلاف الرقم ١٠ وهو ما يرمز له بالرمز e وهو عدد تقريبى ويرمز لهذه اللوغاريتمات باللوغاريتمات الطبيعية كما سيرد بالتفصيل فيما بعد ؛

$$e = \lim_{h \to 0} (1+h)^{\frac{1}{h}} ,$$

سبق لنا دراسة قانون الفائدة البسيطة والفائدة المركبة وفى نظام استثمار الأموال بالفائدة البسيطة فإن رأس المال يبقى ثابتاً من عام لآخر دون أى زيادة .

إلا أنه فى نظام الاستثمار بالفائدة المركبة فإن الأرباح تضاف إلى رأس المال فى نهاية العام (أو كل فترة متفق عليها) ويصبح رأس المال للعام التالى عبارة عن رأس المال السابق مضافاً إليه ربح العام (أو الفترة) وهكذا ، .

فإذا افترضنا أن :-

رأس المال المستثمر $= p$

النسبة المئوية للربح فى العام $= r$

وبذلك يكون الربح المضاف عند نهاية السنة الأولى $= p \times \dfrac{r}{100}$

∴ رأس المال عند نهاية السنة الأولى $= p + \dfrac{pr}{100}$

$$= p\left(1+\frac{r}{100}\right)$$

ويعتبر هذا المبلغ رأس المال الجديد للعام التالى وبنفس الطريقة كما اتبعنا فى العام الأول :-

∴ رأس المال عند نهاية السنة الثانية $= p\left(1+\dfrac{r}{100}\right)^2$

، رأس المال عند نهاية السنة الثالثة $= p\left(1+\dfrac{r}{100}\right)^3$

، رأس المال عند نهاية السنة t $= p\left(1+\dfrac{r}{100}\right)^t$

فإذا افترضنا أن الفائدة تضاف عند نهاية كل نصف عام بدلاً من عند نهاية العام :-

∴ رأس المال المستثمر عند نهاية نصف العام الأول $= p\left(1+\dfrac{r}{2\times 100}\right)$

، رأس المال المستثمر عند نهاية العـــام الأول $= p\left(1+\dfrac{r}{2\times 100}\right)^{2}$

، رأس المال المستثمر عند نهاية العـــام الثانى $= p\left(1+\dfrac{r}{2\times 100}\right)^{4}$

، رأس المال المستثمر عند نهاية العـــام t $= p\left(1+\dfrac{r}{2\times 100}\right)^{2t}$

أما إذا أضيفت الأرباح بمعدل ٤ مرات سنوياً :-

∴ رأس المال المستثمر فى نهاية العام الأول $= p\left(1+\dfrac{r}{4\times 100}\right)^{4}$

، رأس المال المستثمر فى نهاية العام t $= p\left(1+\dfrac{r}{4\times 100}\right)^{4t}$

وبالمثل إذا ما أضفنا الفائدة بمعدل ١٢ مرة سنوياً أى مرة كل شهر :-

∴ رأس المال المستثمر فى نهاية العام t $= p\left(1+\dfrac{r}{12\times 100}\right)^{12t}$

وإذا أضفنا الأرباح m من المرات فى العام :-

فإن رأس المال المستثمر فى نهاية العام t $= p\left(1+\dfrac{r}{m\times 100}\right)^{mt}$

ولنفترض أن :-

$$\frac{r}{m\times 100}=\frac{1}{h}$$

$$\therefore m=\frac{nr}{100}$$

∴ رأس المال المستثمر فى نهاية العام t $= p\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{nrt}{100}}$

$$= p\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{\frac{rt}{100}}$$

فإذا ما افترضنا أن n أصبحت كبيرة جداً جداً أى أن الفائدة تُضاف عند نهاية فترات زمنية صغيرة جداً جداً بحيث أن عملية نمو رأس المال تبدو كما لو كانت متصلة (بعكس الوضع السابق فهى ساكنة طوال العام أو الفترة ثم تزيد فجأة فى نهايتها) .

وعليه فإن الكمية التى يصل لها رأس المال تصبح عبارة عن نهاية المقدار :-

$$p\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{\frac{rt}{100}}$$

وذلك عندما تصبح n كبيرة جداً .

ولإيجاد ذلك فإنه يلزم إيجاد نهاية $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ عندما تقترب n من ∞ أى $n \to \infty$

$$\therefore \text{المقدار} = p\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{\frac{rt}{100}}$$

وسنبدأ فيما يلى فى إيجاد نهاية المقدار $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ عندما $n \to \infty$

١٣-٢ :- قيمة $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

نقوم بفك هذا المقدار بنظرية ذات الحدين Binomial theorem :-

$$\therefore \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n\cdot(n-1)}{\lfloor 2}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor 3}\cdot\frac{1}{n^3} + \dots\dots$$

ثم نختصر بحذف n^5 فى البسط مع n^5 فى المقام :-

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\lfloor 2} + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{\lfloor 3} + \dots$$

$$+ \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\dots\dots\left(1-\frac{r-1}{n}\right)}{\lfloor r} + \dots\dots$$

ونهاية المقدار $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ هى بلا شك عبارة عن مجموع نهايات هذه الحدود مجتمعة ، وذلك كالتالى :-

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n}}{\lfloor 2} = \frac{1}{\lfloor 2}$$

$$, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{\lfloor 3} = \frac{1}{\lfloor 3}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n}) \;\cdots\cdots\; (1-\frac{r-1}{n})}{\lfloor r} = \frac{1}{\lfloor r}$$

وهكـــذا .

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}+\ldots\ldots\frac{1}{\lfloor n}$$

وبذلك فإن النهاية عبارة عن متوالية لا نهائية ، إلا أنه يمكن إثبـات أنـه إذا زاد عـدد الحـدود بدون حد (زيادة لا نهائية)

فإن مجموع كل مـن الحـدود يقـترب مـن نهايـة محـددة . أى أن المتواليـة تقاربيـة ، وقـد تـم حساب قيمتها بدرجة بالغة الدقة ويمكن حسابها بدرجة الدقة المطلوبـة (تـزداد الدقـة كلمـا جمعنا عدداً أكبر من الحدود) .

ويمكن حسابها بحساب كل حد على حدة وذلك بقسمة البسط على المقام .

الحد الأول =	١,٠٠٠٠٠٠	
الحد الثانى =	١,٠٠٠٠٠٠	
الحد الثالث =	٠,٥٠٠٠٠٠	(بقسمة الحد الثانى ÷ ٢)
الحد الرابع =	٠,١٦٦٦٦٧	(بقسمة الحد الثالث ÷ ٣)
الحد الخامس =	٠,٠٤١٦٦٧	
الحد السادس =	٠,٠٠٨٣٣٣	
الحد السابع =	٠,٠٠١٣٨٩	
الحد الثامن =	٠,٠٠٠١٩٨	
الحد التـاسع =	٠,٠٠٠٠٢٥	
الحـد العاشـر =	٠,٠٠٠٠٠٣	
∴ مجموع عشرة حدود =	٢,٧١٨٢٨٣	

وبذلك فإن قيمتها لأقرب خمسة أرقام عشرية : ٢,٧١٨٢٨

وهذا الرقم الثابت يرمز له بالحرف e (أو "هـ")

وتعرف بالقيمة التقريبية ؛

$$i.e: \quad e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$
$$= 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}+\frac{1}{\lfloor 4}+\ldots\ldots.$$

فإذا رمزنا لقيمة المقدار : $p\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{\frac{rt}{100}}$ بالمقدار A باعتبار أن إضافة الربح مستمرة على فترات صغيرة جداً ، بعد t من السنوات وبأن n تصبح كبيرة جداً :-

$$\therefore A = p\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{\frac{rt}{100}}$$

وبوضع $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

$$\therefore \; A = p\, e^{\frac{rt}{100}}$$

وبوضع $x = \frac{rt}{100}$

$$\therefore \; A = p\, e^x$$

وتُعرف e^x بالدالة الأسية الطبيعية وذلك لأن الأس هو المقدار المتغير فى الدالة(e = ثابت)

وهنا يلزم أن نُفرق بين الدوال العادية التى سبق التعرض لها فى هذا الكتاب وبين الدوال الأسية واللوغاريتمية التى هى أساس هذا الباب .

فالدوال العادية مثل :- $y = x^5$, y المتغير التابع ، x هى المتغير المستقل [والأساس هو x متغير والأس ٥ = ثابت]

وعند دراسة القوى فى هذه الحالة ، نلاحظ الأساس (x) فعندما يكون الأساس واحداً فإنه يتم جمع القوى عند الضرب وطرحها عند القسمة وضربها عند الرفع إلى قوى أعلى كالتالى:-

$$x^m \ . \ x^n = x^{m+n}$$

$$, x^m \div x^n = x^{m-n}$$

$$, [x^m]^n = x^{mn}$$

أى أن الدوال الأسية العادية هى تلك الدوال التى يكون الأساس فيها متغير والقوة أو الأس ثابت ؛ $\left[y = x^5\right]$ فيها x الأساس متغير والقوة ٥ ثابتة . أى أن x يمكن أن تتغير بينما القوة ثابتة ومثل $y = 5\,(\sin x)^2$

بينما الدوال الأسية الطبيعية أو موضوع هذا الباب ، فهى الدوال التى تكون قيمة الأساس فيها ثابتة بينما القوة أو الأس متغيرة .

مثل $y = e^x$ [e ثابت ، x متغير]

ومثل $y = a^{(x^2 - 5x)}$

وتبين هذه الدوال النمو فى ظاهرة معينة فى فترات زمنية متتالية سنة ، سنتين ، .... أو شهر وشهران ....

ويمثل هذا النوع من الدوال معدلات نمو ظاهرة معينة بصورة منتظمة ومستمرة أى تلك التى يكون فيها النمو جارياً بصورة مستمرة وليس فى فترات غير متصلة كسنوات أو شهور أو أسابيع مثل حسابات البنوك .

والنمو المتواصل المستمر وليس المتقطع على فترات يكون مثل ظاهرة تآكل الشواطئ ونمو السكان فى مجتمع ما وزيادة وزن الحيوانات مع زيادة التغذية .

وفى كثير من الظواهر الكيميائية والفيزيائية وفى الهندسة الكهربائية نجد أن القيمة التقريبية [هـ = e = ٢,٧١٨٢٨] ذات أهمية كبيرة رياضيا ، لأن هذه الظواهر كثيرا ما تربطها علاقات تحتوى على دوال أسية .

ويمكننا الآن التعبير عن الدالة e^x كمتسلسلة تحتوى على قوة متزايدة تصاعدية فى x ، لأنها تبين أن القيمة التقريبية e إذا رفعت لأى قوة x مثلاً فإن الناتج يكون عبارة عن متسلسلة تقاربية convergent

ولهذا تستخدم e كأس للوغاريتمات الطبيعية كما سيرد فيما بعد ، .

$$\because e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$\therefore e^x = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^x$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}$$

وبفك هذا المقدار بنظرية ذات الحدين :-

$$\therefore \left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx} = 1 + nx\,.\,\frac{1}{n} + \frac{nx\,(nx-1)}{\lfloor 2}\,.\,\frac{1}{n^2}$$

$$+ \frac{nx\,(nx-1)(nx-2)}{\lfloor 3}\,.\,\frac{1}{n^3} + \ldots.$$

$$= 1 + x + \frac{x\left(x-\frac{1}{n}\right)}{\lfloor 2} + \frac{x\left(x-\frac{1}{n}\right)\left(x-\frac{2}{n}\right)}{\lfloor 3} + \ldots.$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx} = 1 + x + \frac{x^2}{\lfloor 2} + \frac{x^3}{\lfloor 3} + \ldots.$$

$$i\,.\,e \qquad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{\lfloor 2} + \frac{x^3}{\lfloor 3} + \ldots..$$

وكما هو واضح فهى متسلسلة تقاربية ، فإذا ما وضعنا $(-x)$ بدلاً من (x) :-

$$\therefore e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{\lfloor 2} - \frac{x^3}{\lfloor 3} + \ldots..$$

وبالمثل فإن :-

$$e^{ax} = 1 + ax + \frac{a^2\,x^2}{\lfloor 2} + \frac{a^3\,x^3}{\lfloor 3} + \frac{a^4\,x^4}{\lfloor 4} + \ldots.$$

$$,\; e^{-ax} = 1 - ax + \frac{a^2\,x^2}{\lfloor 2} - \frac{a^3\,x^3}{\lfloor 3} + \frac{a^4\,x^4}{\lfloor 4} + \ldots..$$

١٣-٣ :- تفاضل e^x :-

يمكن إجراء وإيجاد تفاضل e^x بسهولة وذلك بوضع مفكوك e^x ثم نفاضله حداً حداً :-

$$\because e^x = 1 + x + \frac{x^2}{\lfloor 2} + \frac{x^3}{\lfloor 3} + \frac{x^4}{\lfloor 4} + \ldots.$$

$$\therefore \frac{d}{dx} e^x = 0 + 1 + \frac{2x}{\lfloor 2} + \frac{3x^2}{\lfloor 3} + \frac{4x^3}{\lfloor 4} + \ldots..$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{\lfloor 2} + \frac{x^3}{\lfloor 3} + \ldots...$$

وهى نفسها مفكوك e^x

$$\therefore \frac{d}{dx}\left(e^x\right) = e^x$$

وهذه الخاصية أى أن المعامل التفاضلى للمقدار e^x يساوى نفس المقدار أى e^x لا تتوفر فى أى دالة أخرى فى x

وبالمثل فإنه إذا كانت $y = e^{-x}$

$$\therefore \frac{d}{dx}\left(e^{-x}\right) = -e^{-x}$$

وكذلك إذا كانت : $y = e^{ax}$:-

$$\therefore y' = a\,e^{ax}$$

وإذا كانت :- $y = e^{-ax}$:-

$$\therefore y' = -a\,e^{-ax}$$

كما وأنه يمكن إيجاد تفاضل e^x باستخدم المبادئ الأولية .

$$\because y = Log_b\ x$$

$$\therefore y + \Delta y = Log_b\ (x + \Delta x)$$

$$\therefore \Delta y = Log_b\ (x + \Delta x) - Log_b\ x$$

$$= Log_b\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} Log_b\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{\Delta x} Log_b\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{x} Log_b\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

ويلاحظ أن $\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$ فى الصورة $(1+h)^{\frac{1}{h}}$

وعليه فإن :-

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = e$$

$$\therefore \lim_{\Delta x \to u}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x}\, Log_b\ e$$

فإذا ما كانت u دالة قابلة للتفاضل فى x فيمكننا كتابة :-

$$\frac{d}{dx}\left(Log_b\ u\right) = \frac{1}{u}\ Log_b\ e\ .\ \frac{du}{dx}$$

وإذا ما وضعنا b = e فإن :- $Log_e\ e = 1$ ، وسوف نستخدم الرمز Ln بدلاً من Log

والرمز Ln هنا يعنى الأساس e

$$\therefore \frac{d}{dx}\left(Ln\ u\right) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

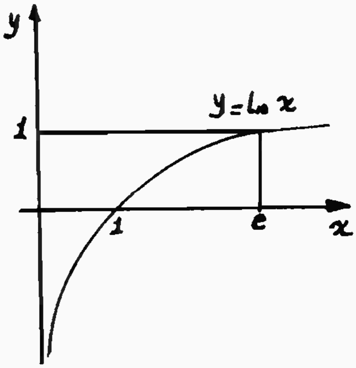
ويمكننا بيان أن ميل المنحنى $y = Ln\ x$ ، يكون موجباً دائماً وأن المنحنى مُقعر للأسفل ، وبإجراء التفاضل للدالة :-

$$y = Ln\ x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \qquad , \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-1}{x^2}$$

وحيث أن مدى أو مجال $y = Ln\ x$ دائماً أكبر من الصفر $(x > 0)$ ، فـإن المشتقة الأولى وبالتالى ميل المنحنى يكون موجباً دائماً

كما أن الإشارة السالبة للمشتقة الثانية تؤكد أن التقعر للأسفل ويوضح هذا الشكل (١٣-١) .



شكل (١٣-١)

١٣-٤ : رســم منحنى e^x , e^{-x} :-

إذا كانت

$$y = e^x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = e^x \quad , \quad \frac{d^2y}{dx^2} = e^x \quad ,$$

وحيث أن $\frac{dy}{dx}$ دائماً موجبة فإن منحنى الدالة e^x يكون موجباً وفـى زيـادة دائمـة وبذلـك فليس عليه نقط تحول .

وحيث أنه كذلك $\frac{d^2y}{dx^2} = e^x$ فإن $\frac{d^2y}{dx^2}$ لا تتلاش أبداً عند أى قيم محددة لـ x وعليه فإنه لا توجد نقط انقلاب على المنحنى

وبالمثل :

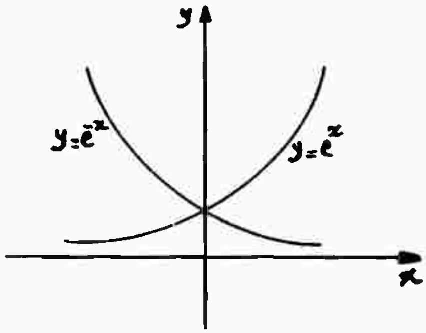
$$y = e^{-x}$$

$$y' = -e^{-x} \quad , \quad y'' = e^{-x}$$

وبذلك فإن y' دائماً متناقصة وبالتالى فإن المنحنى يكون سالباً (متناقصـاً) ولا توجـد نقـط تحول ، كما أنه لا توجد نقط انقلاب .

ويوضح الشكل منحنى كل من e^x , e^{-x} .

انظر الرسم شكل (١٣-٢) .



شكل (١٣-٢)

ويوضح شكل e^x الزيادة المستمرة فى الدالة (كما فى حالة الفائدة المركبة) بينما يوضح شكل e^{-x} التناقص المستمر فى الدالة مثلما يحدث فى التفاعلات الكيميائية وفى الفيزياء ، مثلما يحدث فى حالة فقد الحرارة المستمر عند تبريد جسم (كمثال)

١٣-٥ :- " اللوغاريتمات النابييرية ، اللوغاريتمات الزائدية " أو اللوغاريتمات الطبيعية

' Napierian , Hyperbolic ' or Natural Logarithms

اللوغاريتم هو القوة التى نرفع لها أساس معين لنحصل على عدد معين فمثلاً

$4^2 = 16$

الأساس المعين = ٤ ، القوة هى ٢ والعدد المعين = ١٦

ولذلك تعرف ٢ بأنها لوغاريتم العدد ١٦ للأساس ٤

وبالمثل : ٣ هى لوغاريتم $[5^3 = 125]$ للأساس ٥

، ٦ هى لوغاريتم $[2^6 = 64]$ للأساس ٢

إلا أنه من المتعارف عليه تثبيت الأساس وجعله ١٠ وتُعرف اللوغاريتمات للأساس ١٠ باللوغاريتمات العادية

وحيث أنه قد تم التعارف على جعل الأساس ١٠ ، لذلك لا يتم كتابته عند استخدام هذه اللوغاريتمات العادية .

فمثلاً : عند أخذ لوغاريتم ١٠٠ للأساس ١٠ ، تكتب هكذا $Log\ 100 = 2$

أى أن ٢ هى أس المقدار ١٠ (الأساس) لكى يصبح المقدار = ١٠٠

$Log\ 10 = 1 \quad , \quad Log\ 1 = 0$

ولما كان $Log\ 10 = 1$ ، $Log\ 100 = 2$ لذلك فإن لوغاريتم أى عدد يقع بين ١٠٠ , ١٠ ينحصر فيما بين ٢ , ١

ولوغاريتم أى عدد ينحصر فيما بين ١٠٠٠ , ١٠٠ ينحصر بين ٣ , ٢ وهكذا ؛ وقد سبق للقارئ دراسة هذه اللوغاريتمات العادية .

أما موضوعنا فى هذا الكتاب فهو اللوغاريتمات الطبيعية التى أتفق على أن يكون أساسها العدد التقريبى (e) وقد تعرف أحياناً بلوغاريتمات نابيير نسبة إلى عالم الرياضيات الذى وضعها عام 1614 ميلادية .

ولما كانت $e = 2.718281$ ، فإن تركيب اللوغاريتمات الطبيعية يُصبح معقداً جداً ، وتوجد جداول رياضية تعطينا لوغاريتمات الأعداد الطبيعية من صفر حتى ٩٩٩ تبسيطاً لهذا التعقيد .

وقواعد اللوغاريتمات الطبيعية هى نفس قواعد اللوغاريتمات العادية فى عمليات الضرب والقسمة والرفع لقوى .

ومثلما : $Log_{10}\ 10 = Log\ 10 = 1$

فكذلك : $Log_e\ e = 1$

وتُعرف هذه اللوغاريتمات كذلك باللوغاريتمات الزائدية **Hyperbolic logs**

١٣-٦ :- تفاضل $Log_e\ x$:-

$$Let \quad y = Log_e\ x$$

أى أن y هى القوة للأساس e لكى نحصل على العدد x

$$i\ ,e \quad x = e^y$$

$$\therefore \frac{dx}{dy} = e^y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}[Log_e\ x] = \frac{1}{x}$$

أما إذا كان اللوغاريتم لأساس آخر غير e وليكن الأساس a مثلاً فإنه يمكن تحويله إلى لوغاريتم للأساس e ببساطة

فإذا كانت $y = Log_a\ x$

$$\therefore y = Log_e\ x \times Log_a\ e$$

$$, \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\ Log_a\ e$$

وإذا كانت $y = Log_{10}\ x$ [الأساس ١٠ = a]

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\ Log_{10}\ e = \frac{1}{x} \times 0.4343$$

١٣-٧ :- تفاضل الدوال الأسية فى الصورة العامة :-

لتكن $y = a^x$

$$\therefore Log_e\ y = Log_e\ a^x = x\ Log_e\ a$$

$$\therefore x = \frac{Log_e\ y}{Log_e\ a} = Log_e\ y \times \frac{1}{Log_e\ a}$$

$$\therefore \frac{dx}{dy} = \frac{1}{y} \times \frac{1}{Log_e\ a}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = y \times Log_e\ a$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = a^x \times Log_e\ a$$

فمثلاً : $y = 5^x$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 5^x\ .\ Log_e\ 5 \cong 1.609 \times 5^x$$

وكحالة خاصة :-

$$y = 10^x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 10^x\ Log_e\ 10 = 2.303 \times 10^x$$

ويمكن إيجاز ما سبق فى الجدول التالى -

الـدالة	معاملها التفاضلى
e^x e^{-x} a^x	e^x $-e^{-x}$ $a^x \ Log_e \ a$
$Log_e \ x$	$\frac{1}{x}$

٨–١٣ :– أمثلة محلولة :–

(١) إجر التفاضل للدالة :– $y = e^{4x^2}$

الحـــل :– بتطبيق قاعدة الدالة .

$$\because y = e^{4x^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = e^{4x^2} \times \frac{d}{dx}\left(4x^2\right)$$

$$= 8x \times e^{4x^2}$$

(٢) إجر تفاضل $y = Log \ x^7$

الحـــل :–

$$\because y = Log \ x^7$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^7}\frac{d}{dx}x^7$$

$$= \frac{7 \ x^6}{x^7} = \frac{7}{x}$$

أو يمكننا إيجادها بمعرفة أن $Log \ x^7 = 7 \ Log \ x$

$$\therefore y = 7 \ Log \ x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 7 \times \frac{1}{x} = \frac{7}{x}$$

(٣) فـــاضل $y = Log \dfrac{x^3}{\sqrt{x^3 - 1}}$

الحـــل :–

$$\because Log \frac{a}{b} = Log\ a - Log\ b$$

$$\therefore y = Log\ x^3 - Log\left(x^3 - 1\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^3} \times 3x^2 - \frac{1}{\left(x^3 - 1\right)^{\frac{1}{2}}} \times \frac{d}{dx}\left(x^3 - 1\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{3}{x} - \frac{1}{\left(x^3 - 1\right)^{\frac{1}{2}}} \times \frac{1}{2\left(x^3 - 1\right)^{\frac{1}{2}}} \times 3x^2$$

$$= \frac{3}{x} - \frac{3x^2}{2\left(x^3 - 1\right)} = \frac{6\left(x^3 - 1\right) - 3x^3}{2x\left(x^3 - 1\right)}$$

$$= \frac{3\left(x^3 - 2\right)}{2x\left(x^3 - 1\right)}$$

(٤) فــاضل : $y = e^{-ax} \sin\left(bx + c\right)$

الحـــــل :-

وهى مسألة ذات أهمية فى الفيزياء والهندسة الكهربية

$$\because y = e^{-ax} \times \sin\left(bx + c\right)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \left[e^{-ax} \times \cos\left(bx + c\right) \times b\right] + \left[\sin\left(bx + c\right) \times -e^{-ax} \times a\right]$$

$$= e^{-ax}\left[b \cos\left(bx + c\right) - a \sin\left(bx + c\right)\right]$$

(٥) أوجـد $\frac{dy}{dx}$ ، إذا كانت : $y = Ln\left(3x + 5\right)$

الحـــــل :-

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3x + 5} \times \frac{d}{dx}\left(3x + 5\right) = \frac{3}{3x + 5}$$

(٦) أوجـد $\frac{dy}{dx}$ ، إذا كانت : $y = Ln\sqrt{5 + 7x}$

الحـــــل :-

$$y = Ln\,(5+7x)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\,Ln\,(5+7x)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{5+7x} \times \frac{d}{dx}\,(5+7x)$$

$$= \frac{7}{2\,(5+7x)}$$

(٧) أوجـد $\frac{dy}{dx}$ ، إذا علمت أن : $y = Ln\,\frac{x^2\sqrt{x^2-1}}{x^2+3}$

الحـــــل :-

$$y = Ln\,x^2\sqrt{x^2-1} - Ln\left(x^2+3\right)$$

$$= Ln\,x^2 + Ln\,\sqrt{x^2-1} - Ln\left(x^2+3\right)$$

$$= 2\,Ln\,x + Ln\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}} - Ln\left(x^2+3\right)$$

$$= 2\,Ln\,x + \frac{1}{2}\,Ln\left(x^2-1\right) - Ln\left(x^2+3\right)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2}{x} + \frac{1\times 2x}{2\left(x^2-1\right)} - \frac{1\times 2x}{\left(x^2+3\right)}$$

$$= \frac{2}{x} + \frac{x}{\left(x^2-1\right)} - \frac{2x}{x^2+3}$$

(٨) أوجـد تفاضل $y = a^{3x^2}$

الحـــــل :-

$$\because \frac{d}{dx}\,a^u = a^u\,\frac{du}{dx}\,Ln\,a$$

$\therefore$ نضع $u = 3x^2$, $\frac{du}{dx} = 6x^2$:-

$$\therefore y = a^u$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = a^{3x^2} \times Ln\,a \times 6x^2$$

(٩) أوجد تفاضل $y = 3^{5x}$

الحـــــل :-

$$\because \frac{d}{dx} a^u = a^u \; Ln \; a \frac{du}{dx}$$

$$\therefore \frac{d}{dx} 3^{5x} = 3^{5x} \times Ln \; 3 \times 5 = 5 \times 3^{5x} \; Ln \; 3$$

(١٠) أوجد تفاضل $y = x^x$

الحـــــل :-

$$Ln \; y = Ln \; x^x = x \; Ln \; x$$

$$\therefore \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = x \cdot \frac{1}{x} + Ln \; x \times 1$$

$$= 1 + Ln \; x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = (1 + Ln \; x) \; x^x$$

(١١) أوجد تفاضل $y = e^{\frac{1}{x^2}}$

الحـــــل :-

بـوضع $u = \frac{1}{x^2}$ $\quad \therefore \quad \frac{du}{dx} = \frac{-2}{x^3}$

$$, y = e^u$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = e^u \times \frac{du}{dx}$$

$$= e^{\frac{1}{x^2}} \times \frac{-2}{x^3} = \frac{-2 \; e^{\frac{1}{x^2}}}{x^3}$$

(١٢) فـــاضل : $y = a e^{b^2 + x^2}$

الحـــــل :-

بـوضع $u = b^2 + x^2$

$$\therefore \frac{du}{dx} = 2x$$

$$, y = a e^u$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = a e^u \frac{du}{dx} = a e^{b^2 + x^2} \times 2x$$

$$= 2 a x e^{b^2 + x^2}$$

(١٣) أوجد تفاضل : $y = e^{\sqrt{x^4+a}}$

الحــــل :-

نضـع $u = \sqrt{(x^4 + a)}$

$$\therefore \frac{du}{dx} = \frac{1 \times 4x^3}{2\sqrt{x^4 + a}} = \frac{2x^3}{\sqrt{x^4 + a}}$$

$$, \quad y = e^u$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = e^u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{\sqrt{x^4+a}} \times \frac{2x^3}{\sqrt{x^4 + a}}$$

(١٤) أوجد تفاضل $y = x\, e^{\tan x}$

الحــــل :-

نستخدم هنا القاعدة :- $d(uv) = v\,du + u\,dv$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = x\left[e^{\tan x} \times \sec^2 x\right] + e^{\tan x}$$

$$= e^{\tan x}\left[x \sec^2 x + 1\right]$$

(١٥) إذا كانت $y = Log\, 9x$ فأوجد $\frac{dy}{dx}$

الحــــل :-

$$\because \frac{d}{dx} Log_a\, u = \frac{1}{u} \times \frac{du}{dx} Log_a\, e$$

وبـوضع $u = 9x$ $\quad \therefore \quad \frac{du}{dx} = 9$

وبـوضع $a = 10$ وفى هذه الحالة لا تكتب ١٠

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{9x} \times 9\, Log\, e$$

$$= \frac{1}{x} Log\, e = \frac{0.4343}{x} \quad [\log e = 0.4343]$$

(١٦) أوجد تفاضل $y = Log \frac{5x}{3 + 2x^2}$

الحــــــل :-

$$\because \frac{d}{dx} Log_a\, u = \frac{1}{u} \times \frac{du}{dx} Log_a\, e$$

وبــوضع $u = \dfrac{5x}{3 + 2x^2}$

ومن الواضح هنا أن $a = 10$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{3 + 2x^2}{5x} \times \frac{\left(3 + 2x^2\right)(5) - (5x)(4x)}{\left(3 + 2x^2\right)^2} \times Log\, e$$

$$= \frac{1}{x} \times \frac{\left(3 - 2x^2\right)}{\left(3 + 2x^2\right)} \times Log\, e \ .$$

(١٧) أوجد تفاضل $y = Ln\, 4x^3$

الحــــــل :-

$$\because \frac{d}{dx} Ln\, u = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$$

وبــوضع $u = 4x^3$ $\quad \therefore \quad$ $\dfrac{du}{dx} = 12\, x^2$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{4x^3} \times 12x^2 = \frac{3}{x}$$

(١٨) إذا كانت $y = Ln\left(a + x^5\right)$ **فأوجد** $\dfrac{dy}{dx}$

الحــــــل :-

بــوضع $u = \left(a + x^5\right)$, $\quad \therefore \quad$ $\dfrac{du}{dx} = 5x^4$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\left(a + x^5\right)} \times 5x^4 = \frac{5x^4}{\left(a + x^5\right)}$$

(١٩) أوجد تفاضل $y = Ln\left(2 - 3x^2\right)^3$

الحــــــل :-

يمكن إعادة كتابة الدالة كالتالى :-

$$y = 3\, Ln\left(2 - 3x^2\right)$$

$$, \because \frac{d}{dx} Ln\ u = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$$

وبـوضع $u = \left(2 - 3x^2\right)$ ، $\therefore \quad \frac{du}{dx} = -6x$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{3\times 1}{(2-3x^2)} \times -6x = \frac{-18x}{(2-3x^2)}$$

(٢٠) أوجد تفاضل $y = Ln \sqrt{3 - 4x^2}$

الحـــــل :-

يمكن كتابة المسألة فى صورة خالية من الجذور كالتالى :-

$$y = Ln\left(3-4x^2\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} Ln\left(3-4x^2\right)$$

$$, \because \frac{d}{dx} Ln\ u = \frac{1}{u} \times \frac{du}{dx}$$

وبـوضع $u = 3 - 4x^2$ ، $\therefore \quad \frac{du}{dx} = -8x$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3 - 4x^2} \times -8x = \frac{-4x}{\left(3 - 4x^2\right)}$$

$$= \frac{4x}{\left(4x^2 - 3\right)}$$

(٢١) أوجد تفاضل $y = Ln \tan x$

الحـــــل :-

$$\because \frac{d}{dx} Ln\ u = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$$

وبـوضع $u = \tan x$ ، $\therefore \quad \frac{du}{dx} = \sec^2 x$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\tan x} \times \sec^2 x = \frac{\cos x}{\sin x} \times \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= \operatorname{cosec} x \ \sec x$$

(٢٢) أوجد تفاضل $y = \frac{1}{Ln\ x}$

الحـــــل :-

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Ln\ x \times 0 - 1 \times \left(\frac{1}{x}\right)}{[Ln\ x]^2} = \frac{-1}{x\ (Ln\ x)^2}$$

(٢٣) أوجد تفاضل :- $y = Ln\left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)$

الحـــــل :-

$$\therefore \frac{d}{dx} Ln\ u = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$$

نـضع $u = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

$$\therefore \frac{du}{dx} = \frac{(x^2 + 1)(2x) - (x^2 - 1)(2x)}{(x^2 + 1)^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)}} \times \frac{4x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x}{(x^2 - 1)(x^2 + 1)^2}$$

(٢٤) أوجد تفاضل الدالة :-

$$f(x) = Ln\left[3x^2 + 2\ Ln\ x\right]$$

الحـــــل :-

نـضع $u = 3x^2 + 2Ln\ x$

$$\therefore \frac{d}{dx} Ln\, u = \frac{1}{u} \times \frac{du}{dx}$$

$$\therefore \frac{du}{dx} = 6x + \frac{2}{x}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{(3x^2 + 2\ Ln\ x)} \times \frac{(6x^2 + 2)}{x}$$

$$= \frac{2}{x} \times \frac{(3x^2 + 1)}{(3x^2 + 2\ Ln\ x)}$$

(٢٥) أوجد تفاضل $y = Ln\left[\sin e^{3x}\right]$

الحـــــل :-

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sin e^{3x}} \times \left[\cos e^{3x}\right]\left[e^{3x}\right][3]$$

$$= 3e^{3x} \cot e^{3x}$$

(٢٦) أوجد تفاضل $y = x^{e^x}$

الحـــــل :-

يمكن تبسيط هذه المسألة بأخذ لوغاريتمات الطرفين :

$$\because Ln\ y = Ln\ x^{e^x} = e^x\ Ln\ x$$

$$\therefore \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = e^x \times \frac{1}{x} + Ln\ x \times e^x$$

$$= e^x\left[\frac{1}{x} + Ln\ x\right]$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = y \times e^x\left[\frac{1}{x} + Ln\ x\right]$$

$$= x^{e^x} \times e^x\left[\frac{1}{x} + Ln\ x\right]$$

(٢٧) إذا كانت $y = (2x+5)^2\sqrt{x^2-4}$

فـاوجد $\frac{dy}{dx}$ **باستخدام اللوغاريتمات**

الحـــــل :-

بأخذ اللوغاريتمات لطرفى المعادلة :-

$$\therefore Ln\ y = 2\,Ln\,(2x+5) + \frac{1}{2}\,Ln\left(x^2-4\right)$$

$$\therefore \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 2 \times \frac{1}{2x+5} \times 2 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{\left(x^2-4\right)} \times 2x$$

$$= \frac{4}{2x+5} + \frac{x}{\left(x^2-4\right)}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = (2x+5)^2 \left(x^2-4\right)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{4\left(x^2-4\right) + x\,(2x+5)}{(2x+5)\left(x^2-4\right)}\right]$$

$$= \frac{(2x+5)}{\left(x^2-4\right)^{\frac{1}{2}}} \left[6x^2 + 5x - 16\right]$$

$$= \frac{12x^3 + 40x^2 - 7x - 80}{\left(x^2-4\right)^{\frac{1}{2}}}$$

(٢٨) إذا كانت $y = \left[\frac{1}{a^{2x}}\right]^{2ax}$ **فـاوجد** $\frac{dy}{dx}$

الحـــــل :-

بأخذ اللوغاريتمات لطرفى المعادلة :-

$$\therefore Ln\ y = 2ax\ Ln\ \frac{1}{a^{2x}}$$

$$,\ Ln\ \frac{1}{a^{2x}} = Ln\ 1 - Ln\ a^{2x}$$

$$= 0 - Ln\ a^{2x}$$

$$\therefore Ln\ \frac{1}{a^{2x}} = -2x\ Ln\ a$$

$$\therefore Ln\ y = 2ax \times -2x\ Ln\ a = -4ax^2\ Ln\ a$$

$$\therefore \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = -8ax\ Ln\ a$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = y\left(-8ax\ Ln\ a\right)$$

$$= \left[\frac{1}{a^{2x}}\right]^{2ax} \times \left[-8ax\ Ln\ a\right]$$

$$= \frac{1}{4ax^2} \times -8ax\ Ln\ a$$

$$= -8x\ a^{1-4ax^2}\ Ln\ b$$

(٢٩) أوجد تفاضل $y = \left(3x^2 - 5\right)^{4+\sqrt{2x^3+3}}$

الحـــــل :-

بأخذ اللوغاريتم الطبيعى للطرفين :-

$$\therefore Ln\ y = 4 + \sqrt{2x^3 + 3} \times Ln\left(3x^2 - 5\right)$$

ثم نفاضل كلا الطرفين بالنسبة إلى x باستخدام قاعدة الضرب .

$$\therefore \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \left(4 + \sqrt{2x^3 + 3}\right) \times \left[\frac{1}{\left(3x^2 - 5\right)} \times 6x\right] +$$

$$+ Ln\left(3x^2 - 5\right) \times \left[\frac{1}{2}\left(2x^3 + 3\right)^{\frac{-1}{2}} \times 6x^2\right]$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = y\left[4 + \sqrt{2x^3 + 3} \times \frac{6x}{\left(3x^2 - 5\right)} + Ln\left(3x^2 - 5\right) \times \frac{3x^2}{\left(2x^3 + 3\right)^{\frac{1}{2}}}\right]$$

$$= \left(3x^2 - 5\right)^{4+\sqrt{\left(2x^3+3\right)}}\left[\frac{6x\left(4 + \sqrt{2x^3 + 3}\right)}{\left(3x^2 - 5\right)} + \frac{3x^2}{\sqrt{2x^3 + 3}} . Ln\left(3x^2 - 5\right)\right]$$

(٣٠) اوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا علمت أن :- $Ln\left(x + y\right) = \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)$

الحـــــل :-

هذه دالة ضمنية فى x,y لذلك نفاضل ضمنيا بالنسبة الى x كلاً من الطرفين :

$$\therefore \frac{1}{x + y}\left(1 + \frac{dy}{dx}\right) = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \times \frac{y - x\frac{dy}{dx}}{y^2}$$

وبضرب الطرفين فى الوسطين cross - multiplying

$$\therefore y^2 + x^2 + \left(y^2 + x^2\right)\frac{dy}{dx} = xy + y^2 - \left(x^2 + xy\right)\frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}\left[y^2 + x^2 + \left(x^2 + xy\right)\right] = xy + y^2 - y^2 - x^2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}\left[2x^2 + xy + y^2\right] = x\,(y - x)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{x\,(y - x)}{\left(2x^2 + xy + y^2\right)}$$

قـــاعدة :

وإذا كانت a أى عدد مـــوجب ومطلـــوب إيجاد a^u حيث u دالـة قابلـــة للتفاضل فى x فإن :

$$\therefore \frac{d}{dx} e^u = e^u \frac{du}{dx} \qquad \text{..........} \ (1)$$

$$, \ Ln\ a^u = u\ Ln\ a$$

$$\therefore a^u = e^{u\ Ln\ a}$$

$$, \ \frac{d}{dx} a^u = \frac{d}{dx}\left(e^{u\ Ln\ a}\right) = e^{u\ Ln\ a} \times Ln\ a \frac{du}{dx}$$

ومنها نصل لصيغة عامة :-

$$\frac{d}{dx} a^u = a^u\ Ln\ a \frac{du}{dx} \qquad \text{..........} \ (2)$$

(٣١) أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا علمت أن :- $y = e^{2x^2}$

الحـــــل :-

باستخدام القاعدة (١) السابقة :-

$$\therefore \frac{dy}{dx} = e^{2x^2} \frac{d}{dx}\left(2x^2\right) = 4x\ e^{2x^2}$$

(٣٢) أوجد $\frac{dy}{dx}$ ، إذا كانت :- $y = e^{-x}\ Ln\ x$

الحـــــل :-

$$\frac{dy}{dx} = e^{-x} \frac{d}{dx}(Ln\,x) + Ln(x) \frac{d}{dx}\left(e^{-x}\right)$$

$$= \frac{e^{-x}}{x} + -e^{-x}\ Ln\,(x)$$

(٣٣) إذا كانت $y = 3^{2x-3}$ **فأوجد** $\frac{dy}{dx}$

الحـــــل :-

باستخدام الصيغة العامة السابقة رقم (٢)

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 3^{2x-3}\ Ln\ 3 \times \frac{d}{dx}(2x-3)$$

$$= 3^{2x-3}\ (Ln\ 3)\ (2)$$

Exercise . 14

أوجد $\frac{dy}{dx}$ فى كل من المسائل التالية :-

(١) $y = e^{6x}$

(٢) $y = e^{\frac{x}{3}}$

(٣) $y = e^{\sqrt{x}}$

(٤) $y = e^{-3x}$

(٥) $y = e^{-\frac{7}{3}x}$

(٦) $y = e^{(4-3x)}$

(٧) $y = e^{-ax}$

(٨) $y = e^{\frac{x}{a}}$

(٩) $y = e^{ax+c}$

(١٠) $y = e^{-9x}$

(١١) $y = e^{\sin x}$

(١٢) $y = x^2\ e^x$

(١٣) $y = Ln\left(e^x - 1\right)$

(١٤) $y = e^{-2x}\sin x$

(١٥) $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

(١٦) $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

(١٧) $y = e^{x^2}$

(١٨) $y = x\ e^x$

(١٩) $y = x\ e^{-x}$

(٢٠) $y = x^2\ e^{-x}$

(٢١) $y = (x+4)\ e^x$

(٢٢) $y = \sin^{-1} e^x$

(٢٣) $y = 2^x$

(٢٤) $y = x^3\ e^{\frac{1}{x}}$

(٢٥) $y = e^x \sin x$

(٢٦) $y = 10\ e^x$

(٢٧) $y = 10\ 2^x$

(٢٨) $y = x^n\ .\ a^x$

(٢٩) $y = a^{2x+1}$

(٣٠) $y = e^{\cos x}$

(٣١) $y = a^{bx^2}$

(٣٢) $y = (a+b)^x$

(٣٣) $y = e^{\tan x}$

(٣٤) $y = Ln\left(x^3\ e^{-3x}\right)$

(٣٥) $x^2\ e^y + y^2\ e^x = 2$

(٣٦) $e^x \sin y - e^y \cos x = 1$

(٣٧) $y = Log\ \frac{x}{a}$

(٣٨) $y = Log\left(ax^2 + bx + c\right)$

(٣٩) $y = x\ Log\ x$

(٤٠) $y = Log\ \sin x$

(٤١) $y = Log\ \frac{a + x}{a - x}$

(٤٢) $y = Log\left(e^x + e^{-x}\right)$

(٤٣) $y = Log\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$

(٤٤) $y = Log\ \tan \frac{x}{2}$

(٤٥) $y = \frac{e^x}{\sqrt{x}}$

(٤٦) $y = ae^{-bx} \sin bx$

(٤٧) $y = Log\left[\sqrt{(x - 1)} + \sqrt{(x + 1)}\right]$

(٤٨) $y = Log\ \frac{e^x}{e^x + 1}$

(٤٩) $y = Log\ \frac{\sqrt{b} + \sqrt{x}}{\sqrt{b} - \sqrt{x}}$

(٥٠) $y = \cos^{-1} e^{-x}$

(٥١) $y = Log\ \frac{x}{b - \sqrt{b^2 - x^2}}$

(٥٢) $y = \sin^{-1} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

أوجد المشتقة الثانية والثالثة والرابعة والمشتقة النونية للآتى :-

(٥٣) $y = e^{ax}$

(٥٤) $y = e^{-ax}$

(٥٥) $y = Log\ x$

فاضل كل من الدوال التالية باستخدام طريقة اللوغاريتمات :-

(٥٦) $y = x\left(x - 1\right)^{\frac{3}{2}}$

(٥٧) $y = x^{-x}$

(٥٨) $y = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x\sqrt{4 + x^2}}$

(٥٩) $y = x^{Ln\ x}$

(٦٠) $y = \left(\sin^{-1} x\right)^x$

(٦١) $y = e^{-x^2} \sin^2 3x$

(٦٢) إذا كانت $y = u^v$ حيث كل من v , u دوال فى x فبين أن :-

$$\frac{dy}{dx} = v\,u^{v-1} \frac{du}{dx} + u^v\ Ln\,u \frac{dv}{dx}$$

أوجد مشتقة كل من الدوال التالية :-

(٦٣) $y = x^2 + 3^x$

(٦٤) $y = e^{-x^2}$

(٦٥) $y = \sqrt{x}\, e^{\sqrt{x}}$

(٦٦) $y = \left(e^{ax} - e^{-ax}\right)^2$

(٦٧) $y = \dfrac{\cos x}{\sin^2 x} + Log\left(\tan \frac{x}{2}\right)$

(٦٨) $y = x^2 \,.\, 2^x$

(٦٩) $y = e^{\frac{x}{a}} \cos \dfrac{x}{a}$

(٧٠) $y = a^{\sin x}$

(٧١) $y = Log\left[\tan\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x}{2}\right)\right]$

(٧٢) $y = x^2 e^{-2x}$

(٧٣) $y = Log\left(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}\right)$

(٧٤) $y = Log \dfrac{x^2}{\sqrt{1 - ax^4}}$

عين مشتقات الدوال التالية بعد أخذ اللوغاريتم للطرفين :-

(٧٥) $y = Log \cos x - \dfrac{1}{2}\cos^2 x$

(٧٦) $y = Log \dfrac{1 + \sqrt{x^2 + 1}}{x}$

(٧٧) $y = x^{\frac{1}{x}}$

(٧٨) $y = \cos^{-1}(1 - 2x)$

(٧٩) $y = x \tan^{-1}\dfrac{x}{a} - \dfrac{a}{2} Log\left(x^2 + a^2\right)$

(٨٠) $y = \sin^{-1}\sqrt{1 - 4x}$

(٨١) $y = \dfrac{1}{2} Log \tan x + Log \cos x$

(٨٢) $y = \sqrt{1 - x^2} + \sin^{-1} x$

(٨٣) $y = x\sqrt{1 - x^2} + \sin^{-1} x$

(٨٤) $y = e^x \sqrt{1 - e^{2x}} + \sin^{-1} e^x$

(٨٥) $y = Log\left[e^{2x} + \sqrt{e^{4x} + 1}\right]$

(٨٦) $y = \sin^{-1} e^{3x}$

(٨٧) $y = \cos^{-1}\sqrt{1 - 2x} + \sqrt{2x + 4x^2}$

(٨٨) $y = \tan^{-1} e^{2x} + Log\sqrt{\dfrac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}}$