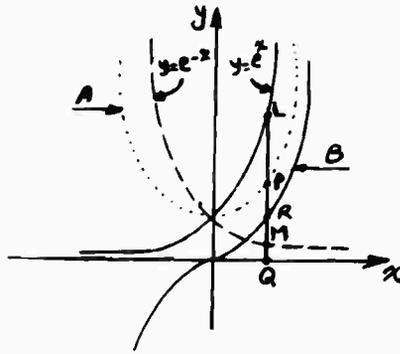


الباب الرابع عشر

الدوال الزائدية Hyperbolic Functions

١٤-١ :- عام :-

يوضح شكل (١٤-١) ، كلاً من منحنى e^x ، e^{-x} بالإضافة إلى منحنين آخرين وهما A ، B بالشكل .



شكل (١٤-١)

ويلاحظ ما يلي على هذه المنحنيات :-

(١) الإحداثي الرأسى (الصادى) لأى نقطة على المنحنى A يعادل نصف مجموع

الإحداثي الصادى للنقطتين المناظرتين للنقطة الأولى على منحنى e^x ، e^{-x}

فمثلاً النقطة P على المنحنى A ، إحداثيها الصادى PQ يعادل نصف

مجموع كل من LQ ، MQ

وعليه فإنه لأى نقطة على المنحنى A :-

$$\therefore y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

(٢) الإحداثي الصادى (الرأسى) لأى نقطة على المنحنى B ، يعادل نصف الفرق بين

الإحداثي الصادى لكل من المنحنين الآخرين e^x ، e^{-x}

$$RQ = \frac{1}{2} [LQ - MQ]$$

∴ لأي نقطة على المنحنى B :-

$$\therefore y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

وعليه فإن المنحنيين يمثلان دالتان في x ومعادلتها كالتالي :-

$$y = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) \quad , \quad y = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x})$$

وقد وجد أن خواص هاتين الدالتين تماثل خواص $y = \sin x$ ، $y = \cos x$ ويطلق

على الدالة $y = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x})$ ، بجيب التمام الزائدي Hyperbolic cosine

بينما يُطلق على الدالة $y = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x})$ بالجيب الزائدي Hyperbolic sine

وقد اختصرت إلى $\sinh x$ ، $\cosh x$

وتعني إضافة " h " بآخر الرمز إلى الزائدي (Hyp . cos , Hyp . sin)

$$\therefore \cosh x = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x})$$

$$, \sinh x = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x})$$

ومنها نصل إلى :-

$$\cosh x + \sinh x = e^x$$

$$\cosh x - \sinh x = e^{-x}$$

وهناك أربع دوال زائدية أخرى :-

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

$$, \operatorname{cosech} x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

$$, \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

$$, \operatorname{coth} x = \frac{1}{\tanh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

وفى الرسم (١٤-١) يوضح المنحنى A ، الذى يمثل أهمية كبيرة ويُطلق عليه منحنى الكتيه Catenary وهو يأخذ الشكل الذى تأخذه سلسلة منتظمة مرنة معلقة بحرية مع تثبيت نهايتها .

ويمكن التعبير عن $\sinh x$, $\cosh x$ فى صورة متسلسلة باستخدام مفكوك e^x السابق ذكره فى الباب السابق .

$$\therefore e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$$

$$\therefore e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \dots$$

$$\therefore \cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$\therefore \sinh x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \dots$$

١٤-٢ :- بعض العلاقات للدوال الزائدية :-

هنالك تشابه كبير بين العلاقات التى تربط الدوال الزائدية وتلك التى تربط الدوال المثلثية ولنعتبر المثالين التاليين :-

$$1) \cosh^2 x - \sinh^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2$$

$$= \frac{1}{4} \left[(e^{2x} + e^{-2x} + 2) - (e^{2x} + e^{-2x} - 2) \right] = 1$$

$$\therefore [\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1]$$

$$[\cos^2 x + \sin^2 x = 1]$$

وهى تشبه العلاقة المثلثية الشهيرة :-

$$2) \cosh^2 x + \sinh^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2$$

$$= \frac{2e^{2x} + 2e^{-2x}}{4} = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} = \cosh 2x$$

$$\therefore \cosh^2 x + \sinh^2 x = \cosh 2x$$

$$[\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x]$$

وهي تشبه العلاقة المثلثية الشهيرة :-

وبالمثل فإن أى علاقة مثلثية لها نظير فى الدوال الزائدية ويُلاحظ من الحالتين السابقتين أن هنالك اختلافاً فى الإشارات .

وهذا ينطبق فقط على $\sinh^2 x$

وقد وضعت قاعدة تُعرف بقاعدة أوسبورن Osborn's rule ، والتي عن طريقها يمكننا كتابة أى دالة زائدية مباشرة من الدوال المثلثية المناظرة لها ، حيث يتم تغيير إشارة أى

عنصر فى الدوال المثلثية يحتوى على $[\sin \times \sin$ أو $\sin^2]$ كما يلى :-

$$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x \quad \text{-: الدالة المثلثية}$$

$$\operatorname{sech}^2 x = 1 - \tanh^2 x \quad \text{تُصحح :-}$$

$$\tanh^2 x = \frac{\sinh x \times \sinh x}{\cosh x \times \cosh x} \quad \text{-: وذلك لأن :-}$$

وفيما يلى جدول يوضح أهم العلاقات فى الدوال الزائدية وما يقابلها من دوال مثلثية :

الدوال الزائدية	الدوال المثلثية
$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$	$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$	$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$
$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$	$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
$\operatorname{sech}^2 x = 1 - \tanh^2 x$	$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$
$\operatorname{cosech}^2 x = \operatorname{coth}^2 x - 1$	$\operatorname{cosec}^2 x = \cot^2 x + 1$
$\sinh (x \pm y) = \sinh x \cdot \cosh y$ $\pm \cosh x \cdot \sinh y$	$\sin (x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm$ $\cos x \sin y$
$\cosh (x \pm y) = \cosh x \cdot \cosh y$ $\pm \sinh x \cdot \sinh y$	$\cos (x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp$ $\sin x \cdot \sin y$

جدول (١٤-١)

كما توجد بعض العلاقات بين مجموعتى الدوال المثلثية والزائدية :-

$$\cosh x = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}), \quad \cos x = \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix})$$

$$\sinh x = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}), \quad \sin x = \frac{1}{2} i (e^{ix} - e^{-ix})$$

$$, \sinh x = \frac{1}{i} \sin ix$$

$$, \cosh x = \cos ix$$

حيث : $i = \sqrt{-1}$

٣-١٤ :- تفاضل الدوال الزائدية :-

١) :- $\sinh x$

لتكن :

$$y = \sinh x$$

$$= \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

$$\therefore \frac{d}{dx} (\sinh x) = \cosh x$$

٢) :- $\cosh x$

لتكن :-

$$y = \cosh x$$

$$= \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$$

$$\therefore \frac{d}{dx} (\cosh x) = \sinh x$$

٣) :- $\tanh x$

يمكن إيجاد مشتقتها من التعريف بها في الصورة الأسية :-

$$\tanh x = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

:- أو كالتالي :

$$y = \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

وباستخدام قاعدة القسمة :-

$$\begin{aligned} \therefore \frac{dy}{dx} &= \frac{\cosh x \cdot \cosh x - \sinh x \cdot \sinh x}{\cosh^2 x} \\ &= \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x} = \operatorname{sech}^2 x \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{d}{dx} (\tanh x) = \operatorname{sech}^2 x$$

وبالمثل فإنه يمكن إثبات التالي :-

$$y = \operatorname{cosech} x \quad \therefore \frac{dy}{dx} = -\operatorname{cosech} x \coth x$$

$$, y = \operatorname{sech} x \quad \therefore \frac{dy}{dx} = -\operatorname{sech} x \tanh x$$

$$, y = \coth x \quad \therefore \frac{dy}{dx} = -\operatorname{cosech}^2 x$$

ويجب على القارئ الرجوع إلى مُشتقة الدوال المُثلثية المشابهة للمقارنة .

(١٤) : منحنيات الدوال الزائدية :-

ارجع لشكل (١٤-١) الذى يوضح منحنى $y = \sinh x$, $y = \cosh x$

$$(1) \quad y = \cosh x \quad , \quad \frac{dy}{dx} = \sinh x \quad , \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \cosh x$$

، تساوى الصفر فقط عندما $x = 0$ ولذلك توجد نقطة تحول على المنحنى (A)

وحيث أن $\sinh x$ ، سالبة قبل هذه النقطة وموجبة بعدها ، بينما $\frac{d^2y}{dx^2}$ ، موجبة

فتكون النقطة نهاية صغرى ولا توجد نقط تحول أخرى أو نُقط انقلاب على

المنحنى (A) .

$$(2) \quad y = \sinh x : \quad \frac{dy}{dx} = \cosh x \quad , \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \sinh x$$

، أى $\cosh x$ دائماً موجبة ولا تساوى الصفر أبداً وبالتالي فإن $\sinh x$ تتزايد

دائماً وليس لها نقط تحول .

إلا أنه عندما $x = 0$ ، فإن :- $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ وهى سالبة قبل 0 وموجبة بعدها

(0 = نقطة الأصل) .

ولذلك فإنه توجد نقطة إنقلاب عندما $x = 0$

ويكون الميل عند نقطة 0 مساوياً للواحد والزاوية $\frac{\pi}{4}$

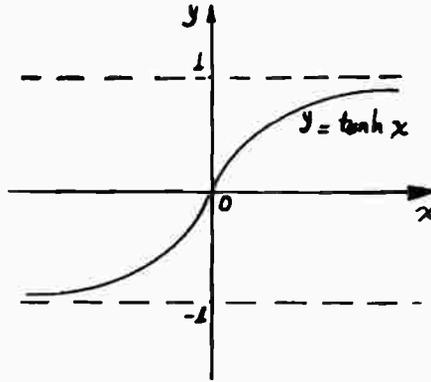
$$(3) \quad y = \tanh x : \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{sech}^2 x$$

وحيث أن $\operatorname{sech}^2 x$ دائماً موجبة فإن $\tanh x$ تتزايد دائماً فيما بين $-\infty$, $+\infty$

وحيث أن كلاً من $\sinh x$, $\cosh x$ مستمرة دائماً (متصلة) كما وأن $\cosh x$ لا

تساوى الصفر أبداً ، لذلك فإن $\tanh x$ ، يجب أن تكون دالة متصلة .

ويوضح الشكل (٢-١٤) منحنى $\tanh x$.



شكل (٢-١٤)

كما يمكن كتابة $\tanh x$ في الصورة :

$$\tanh x = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = 1 - \frac{2}{e^{2x} + 1}$$

ويتضح من هذه الصورة أنه عندما تزداد x من $-\infty$ إلى $+\infty$ فإن e^{2x} تتزايد من

صفر إلى ١ .

$$\therefore 1 - \frac{2}{e^{2x} + 1}$$

أو $\tanh x$ تتزايد من - ١ إلى صفر .

وبالمثل فإنه عندما تزيد x من صفر إلى $+\infty$ فإن $\tanh x$ تزيد من صفر إلى الواحد .
ولهذا فإن المنحنى له خطى تقارب asymptotes وهما $y = \pm 1$ وموضحين بالشكل .

٥-١٤ :- تفاضل الدوال الزائدية العكسية

تشابه الدوال الزائدية العكسية مع نظيرتها (الدوال المثلثية)

ولذلك فإنه يتم استخراج المعادلات التفاضلية (للأولى) بطريقة مشابهة لما تم فى (الثانية) .

(١) تفاضل $\sinh^{-1} x$:

$$\therefore y = \sinh^{-1} x$$

$$\therefore x = \sinh y$$

$$\therefore \frac{dx}{dy} = \cosh y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sinh^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\therefore \frac{d}{dx} \sinh^{-1} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

(٢) تفاضل $\cosh^{-1} x$:

باستخدام نفس الطريقة كما سبق فإن :

$$\frac{d}{dx} \cosh^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

(٣) تفاضل $\tanh^{-1} x$:

$$\therefore y = \tanh^{-1} x$$

$$\therefore x = \tanh y$$

$$\therefore \frac{dx}{dy} = \operatorname{sech}^2 y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\operatorname{sech}^2 y} = \frac{1}{1 - \tanh^2 y} = \frac{1}{1 - x^2}$$

$$\therefore \frac{d}{dx} \tanh^{-1} x = \frac{1}{1 - x^2}$$

∴ $\operatorname{sech}^{-1} x$, $\operatorname{cosech}^{-1} x$, $\operatorname{coth}^{-1} x$ تفاضل (٤)

$$y = \operatorname{sech}^{-1} x \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$$

$$y = \operatorname{cosech}^{-1} x \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}$$

$$y = \operatorname{coth}^{-1} x \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2-1}$$

وفيما يلي صيغتان هامتان :-

if $y = \sinh^{-1} \frac{x}{a} :-$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}}} \times \frac{1}{a} = \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

if $y = \cosh^{-1} \frac{x}{a} :-$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

٦-١٤ :- المكافئ اللوغاريتمي للدوال الزائدية العكسية

$$\sinh^{-1} x = \operatorname{Log} \left[x + \sqrt{1+x^2} \right] \quad (١)$$

$y = \sinh^{-1} x$ لتكن

$$\therefore x = \sinh y$$

$\cosh^2 x = 1 + \sinh^2 y$ ولكن

$$= 1 + x^2$$

$\cosh y = +\sqrt{1+x^2}$ ($\cosh y$ دائماً موجبة)

$$\therefore \sinh y + \cosh y = x + \sqrt{1+x^2}$$

$\sinh y + \cosh y = e^y$ ولكن

$$\therefore e^y = x + \sqrt{1+x^2}$$

وبأخذ اللوغاريتمات للطرفين

$$\therefore y = \text{Log} \left[x + \sqrt{(1 + x^2)} \right]$$

$$\therefore \sinh^{-1} x = \text{Log} \left[x + \sqrt{x^2 + 1} \right]$$

$$\cosh^{-1} x = \pm \text{Log} \left[x + \sqrt{x^2 - 1} \right] \quad (2)$$

$$y = \cosh^{-1} x \quad \text{لتكن}$$

$$\therefore x = \cosh y$$

$$\sinh^2 y = \cosh^2 y - 1 \quad \text{ولكن}$$

$$= x^2 - 1$$

$$\therefore \sinh y = \pm \sqrt{x^2 - 1}$$

[ويمكن أخذ كل من الإشارتين (\pm) لجذر المقدار $(x^2 - 1)$]

$$\therefore e^y = \sinh y + \cosh y$$

$$= \pm \sqrt{x^2 - 1} + x$$

$$= x \pm \sqrt{(x^2 - 1)}$$

$$\therefore y = \text{Log} \left[x \pm \sqrt{(x^2 - 1)} \right] \quad \text{وبأخذ اللوغاريتم للطرفين :-}$$

$$\therefore \cosh^{-1} x = \text{Log} \left[x \pm \sqrt{(x^2 - 1)} \right]$$

وبجمع هاتين الكميتين [(\pm) مرة بالزائد ومرة بالناقص]

$$\therefore \text{Log} \left[x + \sqrt{x^2 - 1} \right] + \text{Log} \left[x - \sqrt{x^2 - 1} \right]$$

$$= \text{Log} \left[\left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right) \left(x - \sqrt{x^2 - 1} \right) \right]$$

$$= \text{Log} \left[x^2 - (x^2 - 1) \right] = \text{Log} 1 = 0$$

أى أن كلاً من قيمتى $\cosh^{-1} x$ متساويتين ومختلفتين فقط فى الإشارة

$$\therefore \cosh^{-1} x = \pm \text{Log} \left[x + \sqrt{(x^2 - 1)} \right]$$

[ملحوظة : x تقع بين $1, +\infty$]

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \text{Log} \frac{1+x}{1-x} \quad (3)$$

لتكن

$$y = \tanh^{-1} x$$

$$\therefore x = \tanh y$$

(x تقع بين -1 , $+1$) كما ذكرنا سابقاً في نهاية البند (٤-١٤)

$$\therefore x = \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1}$$

$$\therefore x (e^{2y} + 1) = e^{2y} - 1$$

$$\therefore e^{2y} = \frac{1+x}{1-x}$$

$$\therefore 2y = \text{Log} \frac{1+x}{1-x}$$

$$\therefore y = \frac{1}{2} \text{Log} \frac{1+x}{1-x}$$

$$i.e \quad \tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \text{Log} \frac{1+x}{1-x}$$

٧-١٤ - موجز لتفاضل الدوال الزائدية العكسية :-

الدالة	تفاضلها
$\sinh^{-1} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$
$\cosh^{-1} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$
$\tanh^{-1} x$	$\frac{1}{1 - x^2}$
$\text{cosech}^{-1} x$	$\frac{-1}{x \sqrt{1 + x^2}}$
$\text{sech}^{-1} x$	$\frac{-1}{x \sqrt{1 - x^2}}$
$\text{coth}^{-1} x$	$\frac{-1}{x^2 - 1}$

كما وأن الصيغ التالية ذات أهمية ، كذلك ؛

$$\text{when } y = \sinh^{-1} \frac{x}{a} \quad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

$$, y = \cosh^{-1} \frac{x}{a} \quad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

$$, y = \tanh^{-1} \frac{x}{a} \quad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{a}{a^2 - x^2}$$

وفيما يلي المكافئ اللوغاريتمي للثلاث دوال العكسية السابقة :-

$$\sinh^{-1} \frac{x}{a} = \text{Log} \left[\frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{a} \right]$$

$$\cosh^{-1} \frac{x}{a} = \pm \text{Log} \left[\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a} \right]$$

$$\tanh^{-1} \frac{x}{a} = \frac{1}{2} \text{Log} \left[\frac{a+x}{a-x} \right]$$

٨-١٤ :- أمثلة محلولة :-

(١) إذا علمت أن :-

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$, \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$, \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$, \text{sech } x = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

فبين أن :-

$$\frac{d}{dx} \sinh x = \cosh x$$

$$, \frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x$$

$$, \frac{d}{dx} \tanh x = \text{sech}^2 x$$

$$a) \because \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{d}{dx} \sinh x &= \frac{2(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x}) \times 0}{2^2} \\ &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x \end{aligned}$$

$$b) \because \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{d}{dx} \cosh x &= \frac{2(e^x - e^{-x}) - (e^x + e^{-x}) \times 0}{2^2} \\ &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x \end{aligned}$$

$$c) \because \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{d}{dx} \tanh x &= \frac{(e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x})}{[e^x + e^{-x}]^2} \\ &= \frac{(e^{2x} + 2 + e^{-2x}) - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})}{[e^x + e^{-x}]^2} \\ &= \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} = \left[\frac{2}{(e^x + e^{-x})} \right]^2 \end{aligned}$$

$$\frac{2}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{\cosh x} = \operatorname{sech} x$$

ولكن لدينا :-

$$\therefore \frac{d}{dx} \tanh x = \operatorname{sech}^2 x$$

$$\sinh^{-1} x = \operatorname{Ln} \left[x + \sqrt{1 + x^2} \right]$$

(٢) إذا علمت أن :-

$$\cosh^{-1} x = \pm \operatorname{Ln} \left[x + \sqrt{x^2 + 1} \right]$$

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \left[\frac{1+x}{1-x} \right]$$

$$1) \frac{d}{dx} \sinh^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$2) \frac{d}{dx} \cosh^{-1} x = \pm \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$3) \frac{d}{dx} \tanh^{-1} x = \frac{1}{1 - x^2}$$

الحل :-

$$1) \because \sinh^{-1} x = \text{Ln} \left[x + \sqrt{x^2 + 1} \right]$$

$$\therefore \frac{d}{dx} \sinh^{-1} x = \frac{d}{dx} \text{Ln} \left[x + \sqrt{x^2 + 1} \right]$$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \left[1 + \frac{1}{2} (x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \times 2x \right]$$

$$= \left[\frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \right] \times \left[1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right] = \left[\frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \right] \left[\frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right]$$

$$= \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{(\sqrt{x^2 + 1})(x + \sqrt{x^2 + 1})} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$2) \because \cosh^{-1} x = \pm \text{Ln} \left[x + \sqrt{x^2 - 1} \right]$$

$$\therefore \frac{d}{dx} \cosh^{-1} x = \frac{d}{dx} \left[\pm \text{Ln} \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right) \right]$$

$$= \pm \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \times \left[1 + \frac{1}{2} (x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} \times 2x \right]$$

$$= \pm \left(\frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \right) \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \right)$$

$$= \pm \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \times \frac{\sqrt{x^2 - 1} + x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \pm \frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{(x + \sqrt{x^2 - 1})(\sqrt{x^2 - 1})}$$

$$= \pm \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$3) \because \tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+x}{1-x}$$

$$\therefore \frac{d}{dx} \tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \times \frac{d}{dx} \left[\operatorname{Ln} \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \times \left(\frac{1-x}{1+x} \right) \left[\frac{(1-x)(1) - (1+x)(-1)}{(1-x)^2} \right]$$

$$= \frac{(1-x) [(1-x) + (1+x)]}{2(1+x)(1-x)^2} = \frac{2(1-x)}{2(1+x)(1-x)^2}$$

$$= \frac{1}{(1+x)(1-x)} = \frac{1}{1-x^2}$$

Exercise 15

فاضل كل من الدوال التالية :-

$$\sinh 3x \quad (٢)$$

$$\sinh \frac{x}{4} \quad (١)$$

$$\tanh bx \quad (٤)$$

$$\cosh \frac{x}{3} \quad (٣)$$

$$\sinh bx + \cosh bx \quad (٦)$$

$$\tanh \frac{x}{2} \quad (٥)$$

$$\sinh^2 x \quad (٨)$$

$$\sinh \frac{1}{x} \quad (٧)$$

$$\sinh(ax + b) \quad (١٠)$$

$$\cosh^3 x \quad (٩)$$

$$\tanh^2 x \quad (١٢)$$

$$\sinh^n ax \quad (١١)$$

$$x^3 \sinh 3x \quad (١٤)$$

$$x \sinh x - \cosh x \quad (١٣)$$

$$e^{\tanh x} \quad (١٦)$$

$$\operatorname{Log}(\sinh x + \cosh x) \quad (١٥)$$

$$\tanh^{-1} \frac{2x}{1+x^2} \quad (18)$$

$$\tan^{-1} \left(\tanh \frac{x}{2} \right) \quad (19)$$

$$y = \tanh x + \coth x \quad (20)$$

$$y = x - \coth x \quad (21)$$

$$y = \sin^{-1} (\tanh x) \quad (22)$$

$$\sinh^{-1} \frac{1-x}{1+x} \quad (23)$$

$$\tan^{-1} x + \tanh^{-1} x \quad (24)$$

$$y = x - \tanh x \quad (25)$$

$$y = \sqrt{1 + \sinh^2 4x} \quad (26)$$

$$y = 2 \sqrt{\coth x - 1} \quad (27)$$

$$y = \text{Log} (\tanh x) \quad (28)$$