البـــاب الخامس عشر

التفــاضل الجزئى

Partial Differential .

١٥-١ - عـــام

يجب أن لا يغيب عن الذهن فى كل ما درسناه ســابقاً أن عمليــات إيجـاد المشـتقة الأولى كانت للدوال ذات المتغير المستقل الواحد أى أن : $y = f(x)$

إلا أنه فى كثير من الحالات تكون الكمية y مرتبطة بأكثر من متغير مسـتقل (إثنـين أو أكثر) .

وفى هذه الحالة فإن عملية إيجاد المشتقات الجزئية تكون بنفــس أسـلوب إيجـاد مشـتقات الدوال ذات المتغير الواحد مع الاختلاف فى طريقة التعامل مع بـاقى المتغيرات المسـتقلة عند إجراء التفاضل أو الاشتقاق لأحد هذه المتغيرات .

فمـثلاً إذا كانت $y = f(x , z)$ فإنه عند حساب المعامل التفاضلى الجزئى لها بالنسـبة للمتغير x فإن المتغير الآخر z يعامل معاملة المقدار الثابت طبقاً لقواعد التفاضل المعتادة. وعند إجـراء التفـاضل بالنسـبة إلى المتغير z ، فإنـه وبـالمثل ، تُعـامل x معاملـة المقـدار الثابت.

وعموماً فإنه إذا كانـت 'y' دالة فى أكثر مــن متغـيرين فإنـه عنـد إيجـاد المشـتقة الجزئيـة لأحد هذه المتغيرات ، فإن بقية المتغيرات تُعامل معاملة المقدار الثابت .

١٥-٢ :- التفاضل الجزئى للدوال ذات المتغيرين :-

(١) المشتقة الجزئية الأولى :-

وفى الدوال ذات المتغير الواحد مثل $y = f(x)$

فإن المشــتقة الأولى لهـذه الدالـة y بالنسـبة للمتغـير المسـتقل x تعبر عـن معـدل التغير اللحظى فى المتغير التابع y والذى يحدث نتيجة لتغير طفيف فى المتغير المستقل x .

والآن ماذا تعنى المشتقة الأولى لدالة فى متغيرين مستقلين مثل x , z أى أن :-

$$y = f(x , z)$$

سنجد أن المشتقة الأولى **الجزئية** عبارة عن معدل التغير فى المتغير التابع "y" الذى يحدث نتيجة لتغير طفيف فى المتغيرين المستقلين x , z ولكن كل منهما على حدة .

ولنعتبر الحالة التالية :-

حجم الغاز يعتمد على كل من الضغط ودرجة الحرارة المعرض لها فإذا فرضنا أن :-

V = حجم الغـاز

P = ضغط الغـاز

t = درجة حرارة الغـاز

ويعُبر عن العلاقة هذه فى الصيغة التالية :-

$$V = k\,\frac{t}{p}$$

حيث k ثابت " حجم الغاز يتناسب طردياً مع درجة حرارته بينما يتناسب عكسياً مع الضغط المعرض له فإذا زادت الحرارة زاد الحجم والعكس بالعكس وإذا زاد الضغط قل الحجم والعكس بالعكس " .

(١) ولنفترض أن **الحرارة متغيرة** وأن الضغط يبقى ثابتاً .

$$\therefore \frac{dv}{dt} = k \times \frac{1}{p} \qquad \text{...........}\ (١)$$

(٢) ولنفترض أن **الضغط يتغير** مع بقاء درجة الحرارة ثابتة .

$$\therefore \frac{dv}{dp} = k\ .\ \frac{t}{-p^2} = -\,k\frac{t}{p^2} \qquad \text{...........}\ (٢)$$

ومن ذلك نلاحظ فى هذه الحالة أنه لما كان هنالك متغيران فقد تكونت لنا مشتقتان (١) ، (٢) أى $\frac{dv}{dt}$, $\frac{dv}{dp}$

ويطلق على هذه المشتقات بالمشتقات الجزئية

Partial derivatives or Partial differential coefficients

وقد اختيرت رموز خاصة للتعبير عن هذه المشتقات الجزئية . فبدلاً من الحرف d (كما فى $\frac{dy}{dx}$) نضع الرمز "∂" ويُقرأ [التفاضل الجزئى] Partial differential

وبذلك فإن المشتقات الجزئية السابقة فى (١) , (٢) يعُبر عنها كالتالى :-

$$\frac{\partial v}{\partial t} = k \cdot \frac{1}{p} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (٣)$$

$$, \frac{\partial v}{\partial p} = -\frac{kt}{p^2} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (٤)$$

وتعنى (٣) أن الحجم V قد تم تفاضله بالنسبة إلى t مع بقاء p ثابتة فى حين تعنى (٤) أن الحجم V قد تم تفاضله بالنسبة إلى p مع بقاء t ثابتة .

وعموماً إذا كانت z دالة فى y , x أى $z = f(x , y)$ فإن :-

$\frac{\partial z}{\partial x}$ عندما x متغيرة ، y ثابتة

$\frac{\partial z}{\partial y}$ عندما y متغيرة ، x ثابتة

ويمكن تعريف المعامل التفاضلى الجزئى كالتالى :-

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x , y)}{\Delta x}$$

$$, \frac{\partial z}{\partial y} = \underset{\Delta y \to 0}{Lt} \frac{f(y + \Delta y , x) - f(x , y)}{\Delta y}$$

أمثـــــلة :-

(١) اوجد المشتقات الجزئية الأولى للدالة :

$$y = 5x^2 + 6z^3$$

الحـــــل :-

" ثابت = $6z^3$ " , $\frac{\partial y}{\partial x} = 10x + 0 = 10x$

" ثابت = $5x^3$ " , $\frac{\partial y}{\partial z} = 0 + 18z^2 = 18z^2$

(٢) أوجد المشتقات الجزئية الأولى للدالة :-

$$y = 8x^2z + 4x^3z^2 - 5z^3x$$

الحـــــل :-

$$\frac{\partial y}{\partial x} = (8z) \times 2x + \left(4z^2\right) \times 3x^2 - \left(5z^3\right) \times 1$$

$$= 16xz + 12\,x^2z^2 - 5z^3 \qquad (z = \text{ثابت})$$

$$, \frac{\partial y}{\partial z} = \left(8x^2\right) \times 1 + \left(4x^3\right) \times 2z - (5x) \times 3z^2$$

$$= 8x^2 + 8x^3z - 15xz^2 \qquad (x = \text{ثابت})$$

(٣) أوجد المشتقات الجزئية الأولى للدالة :-

$$Z = 2x^3 + 5x^2y + xy^2 + y^3$$

الحـــــل :-

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x^2 + 10xy + y^2 + 0 \qquad (y = \text{ثابت})$$

$$, \frac{\partial z}{\partial y} = 0 + 5x^2 \times 1 + 2xy + 3y^2 \qquad (x = \text{ثابت})$$

(٤) أوجد المشتقات الجزئية الأولى للدالة :-

$$Z = \sin x + y^2 \cos x + e^{2y}$$

الحـــــل :-

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y \cos x + 2\,e^{2y} \qquad (x = \text{ثابت})$$

$$, \frac{\partial z}{\partial x} = \cos x - y^2 \sin y \qquad (y = \text{ثابت})$$

(٥) أوجد المشتقات الجزئية الأولى للدالة :-

$$Z = f\,(x\,,\,y) = e^{x^2+y^2}$$

الحـــــل :-

باستخدام قواعد تفاضل الدالة الأمية فإن :-

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x^2+y^2} \times 2x = 2x\,e^{x^2+y^2} \qquad (y = \text{ثابت})$$

$$, \frac{\partial z}{\partial y} = e^{x^2+y^2} \times 2y = 2y\,e^{x^2+y^2} \qquad (x = \text{ثابت})$$

(٦) **أوجد المشتقات الجزئية الأولى للدالة :-**

$$y = \left(4x^2 - 3z^3\right)^4$$

الحــــــــل :-

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 4\left(4x^2 - 3z^3\right)^3 \times 8x$$

$$= 32x\left(4x^2 - 3z^3\right)^3 \qquad , (z = constant)$$

$$,\frac{\partial y}{\partial z} = 4\left(4x^2 - 3z^2\right)^3 \times -6z$$

$$= -24z\left(4x^2 - 3z^2\right)^3 \qquad , (x = constant)$$

(٧) في دراسة لخطة تسويق منتجات أحد المصانع وُجد أن عدد الوحـدات التـى يبيعهـا المصنع سنوياً تعتمد على تطوير الأبحاث والإنفاق عليها وعلى تطوير الماكينات كذلك .

وكـانت العلاقـة بـين كميـة المبيعـات "y" ومصـاريف الأبحـاث " x بـالألف جنيـه " ومصاريف تطوير الماكينات " z بالألف جنيه " كالتالى :-

$$y = f\ (x\ ,\ z) = 1200x + 5000z - 10x^2 - 7z^3 - 30xz$$

فإذا افترضنا أن الشركة تنفق ما مقداره وحدة واحدة علـى الأبحـاث (أى ألـف جنيـه) وخمس وحدات على تطوير الماكينات (خمسة آلاف جنيـه) فإنـه مـن المتوقـع أن يكـون عدد الوحدات المباعة كالتالى :-

$$y_{(1\ ,\ 5)} = 1200 \times 1 + 5000 \times 5 - 10 \times 1^2 - 7 \times 5^3 - 30 \times 1 \times 5$$

$$= 1200 + 25000 - 10 - 7 \times 125 - 150$$

$$= 26200 - 1035$$

$$= 25165 \quad \text{وحدة}$$

فإذا ما فرضنا أن المصنع يرغب فى زيادة المبالغ المخصصـة على الأبحـاث وتطويرهـا ممـا يساعد بالتبعية على رفعة جودة المنتج وسرعة بيعه .

ونريد أن نعرف مدى تأثير الزيادة المخصصة للأبحاث هذه على عـدد الوحـدات المتوقـع بيعها .

فإنه بالتفاضل الجزئى الأول للدالة y بالنسبة إلى x يمكن الحصول على رقم تقديرى (قريبا من الواقع) كما يلى :-

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 1200 - 20x - 30z$$

ولما كان المطلوب هو حساب معدل التغير اللحظى عندما :- $z = 5 , x = 1$

$$\therefore \left[\frac{\partial y}{\partial x}\right]_{(1,5)} = 1200 - 20 \times 1 - 30 \times 5$$
$$= 1200 - 170$$
$$= 1030$$

وهذا يعنى أن زيادة الأبحاث بمقدار وحدة واحدة (ألف جنيه) تؤدى إلى زيادة متوقعة فى كمية الوحدات المباعة قدرها 1030 وحدة .

ولكن كيف يمكننا معرفة مدى دقة هذا التوقع

لذلك ، يلزم إيجاد قيمة y عندما : $x = 2$, $z = 5$

أى عندما تزيد x من 1 وحدة إلى 2 وحدة نقدية .

$$\therefore y_{(2,5)} = 1200 \times 2 + 5000 \times 5 - 10 \times 2^2 - 7 \times 5^3 - 30 \times 2 \times 5$$
$$= 2400 + 25000 - 40 - 7 \times 125 - 300$$
$$= 27400 - 1215$$
$$= 26185 \quad \text{وحدة}$$

فإذا ما قارنا $y_{2,5}$ وهى تساوى 26185 وحدة بـ (1030 + 25165) أى 26185 بـ : 26195

سنجد أن الفرق ضئيل جداً ومن هنا نجد أن المشتقة الجزئية قد أعطت نتائج قريبة جداً من المتوقع وبنسبة لا تتعدى 10 وحدات .

أى $\frac{10}{26185}$ أى حوالى ٪ 38×10^{-5} أقل من ٪ 0.04

والآن إذا ما رغبنا فى زيادة المبالغ المخصصة لتطوير المعدات والآلات بهذا المصنع بمقدار وحدة نقدية واحدة (1000 جنيه) أى أن Z ستزيد بمقدار واحد ، فإنه يمكن حساب

الزيادة المتوقعة فى عدد الوحدات المباعة بحساب معدل التغير فى y نتيجة لتغير z بمقدار وحدة واحدة .

∴ معدل التغير اللحظى :-

$$\frac{\partial y}{\partial z} = 5000 - 21 z^2 - 30 x$$

$$\therefore \left[\frac{\partial y}{\partial z}\right]_{(1,5)} = 5000 - 21 \times 5^2 - 30 \times 1$$

$$= 5000 - 525 - 30$$

$$= 4445 \quad \text{وحدة}$$

بمعنى أن زيادة المبالغ المخصصة بمقدار وحدة واحدة فى تطوير الماكينات قد أدى إلى زيادة فى المبيعات بحوالى 4445 وحدة .

والآن يراد معرفة مدى الدقة فى تقدير المبيعات المتوقعة عندما تكون مصاريف الأبحاث ١ وحدة . بينما تزداد مصاريف تطوير المعدات بمقدار وحدة واحدة لتُصبح 6 وحدات.

$$\therefore y_{(1,6)} = 1200 \times 1 + 5000 \times 6 - 10 \times 1^2 - 7 \times 6^3 - 30 \times 1 \times 6$$

$$= 1200 + 30000 - 10 - 1512 - 180$$

$$= 31200 - 1702$$

$$= 29498 \quad \text{وحدة},$$

وبمقارنة هذه الكمية مع الكمية (29610 = 4445 + 25165)

نجد أن الفرق حوالى 112 وحدة وهو ليس كبيراً لأن نسبة الخطأ لا تتعدى

$$\frac{112}{29498} = 37 \times 10^{-4} \quad \text{أقل من} \quad 0.4\ \%$$

لاحظ أن الزيادة نشأت عن أن الدالة تربيعية فى x بينما تكعيبية فى z

وكلما زادت درجة أو قوة أحد المتغيرات ازداد الفرق المتوقع .

٢- المشتقة الجزئية الثانية :-

إن إيجاد المشتقة الثانية الجزئية للدوال ذات المتغيرين المستقلين لا يختلف فى حسابه عن قواعد التفاضل المعروفة غير أنه يجب ملاحظة ما يلى :-

فى حالة $y = f(x)$ كان المتغير المستقل واحد وكانت المشتقة الأولى y' واحدة وكذلك المشتقة الثانية واحدة فقط للدالة .

أما فى حالتنا هذه حيث يوجد متغيران مستقلان فإن المشتقة الجزئية الأولى عبارة عن مشتقتين $\left(\frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial x}\right)$

ومن هنا فإنه عند إيجاد المشتقة الجزئية الثانية سيكون لدينا الإشتقاقات التالية :-

نفرض :- $Z = f(x, y)$

هى المشتقة الجزئية الأولى $\begin{bmatrix} \therefore \frac{\partial z}{\partial x} & , & y = \text{ثابت} \\ , \frac{\partial z}{\partial y} & , & x = \text{ثابت} \end{bmatrix}$

$$, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right].$$

وهذا يعنى أن الاشتقاق الجزئى الأول بالنسبة إلى x $\left[\frac{\partial z}{\partial x}\right]$، سيُشتق جزئياً مرة ثانية بالنسبة إلى x $\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right]$ ومرة ثانية بالنسبة إلى y $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$

كما وأن الاشتقاق الجزئى الأول بالنسبة إلى y $\left[\frac{\partial z}{\partial y}\right]$ ، سيُشتق جزئياً مرة ثانية بالنسبة إلى x $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ ومرة ثانية بالنسبة إلى y أى $\left[\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right]$ أى أن المشتقة الجزئية الثانية لدالة فى متغيرين مستقلين عبارة عن أربعة اشتقاقات .

أمثـــــــلة :-

(٨) أوجد المشتقات الجزئية الأولى والثانية للدالة :-

$$Z = f(x, y) = 6x^3 - 5x^2y + 10xy + 8y^3$$

الحـــــــل :-

المشتقات الجزئية الأولى كالتالى :-

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 18x^2 - 10xy + 10\ y \qquad (, y = constant)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -5x^2 + 10\ x + 24y^2 \qquad (, x = constant)$$

والمشتقات الجزئية الثانية تكون كالتالى :-

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 36\ x - 10\ y \qquad (, y = constant)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x} = -10\ x + 10 \qquad (, x = constant)$$

بالإضافة إلى :-

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = -10x + 10 \qquad (, y = constant)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 48\ y \qquad (, x = constant)$$

ولاحظ أن عددها أربعة مشتقات جزئية

ولاحظ كذلك أن $\left[\frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -10\ x + 10\right]$

(٩) أوجد المشتقة الجزئية الأولى والثانية للدالة :-

$$Z = f\ (x\ ,\ y) = -3x^3 + 5y^4 - 3x^2y^2$$

الحـــــل :-

المشتقات الجزئية الأولى :-

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -9x^2 - 6xy^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 20y^3 - 6\ x^2 y$$

والمشتقات الجزئية الثانية :-

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -18x - 6y^2 \qquad \text{..........} \ (1)$$

$$,\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}=-12xy \qquad \text{..........} (٢)$$

$$,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=-12xy \qquad \text{..........} (٣)$$

$$,\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=60y^2-6x^2 \qquad \text{..........} (٤)$$

لاحظ أن (٣) تساوى (٤) وقد لاحظنا هذا فى المثال السابق وتعرف هذه بالمشتقات الجزئية الثانية المتقاطعة $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$

وهى متساوية لكل الدوال التى ستتعرض لها هنا .

وتساعد هذه الملاحظة فى التأكد من صحة كل المشتقات الجزئية الأولى والثانية المتقاطعة.

١٥-٣ :- التفاضل الجزئى للدوال فى أكثر من متغيرين :-

نفترض أن الدالة : $(G) = G(x, y, z)$ فى ثلاث متغيرات مستقلة هى x,y,z

سنجد أن عدد المشتقات الجزئية الأولى = ٣ مشتقات

بينما عدد المشتقات الجزئية الثانية = ٩ مشتقات

١- المشتقات الجزئية الأولى فى ثلاث متغيرات :-

$$\frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial y}, \frac{\partial G}{\partial z}$$

٢- المشتقات الجزئية الثانية فى ثلاث متغيرات :-

تفاضل جزئى بالنسبة إلى x للمشتقة الجزئية الأولى بالنسبة إلى x

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}$$

تفاضل جزئى بالنسبة إلى y للمشتقة الجزئية الأولى بالنسبة إلى x

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 G}{\partial y \partial x}$$

تفاضل جزئى بالنسبة إلى z للمشتقة الجزئية الأولى بالنسبة إلى x

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 G}{\partial z \partial x}$$

بالإضافة إلى :-

تفاضل جزئى بالنسبة إلى x للمشتقة الجزئية الأولى بالنسبة إلىy

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y}$$

تفاضل جزئى بالنسبة إلى y للمشتقة الجزئية الأولى بالنسبة إلىy

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}$$

تفاضل جزئى بالنسبة إلى z للمشتقة الجزئية الأولى بالنسبة إلىy

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 G}{\partial z \partial y}$$

وأخيـــراً :-

تفاضل جزئى بالنسبة إلى x للمشتقة الجزئية الأولى بالنسبة إلى z

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)=\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial z}$$

تفاضل جزئى بالنسبة إلى y للمشتقة الجزئية الأولى بالنسبة إلى z

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)=\frac{\partial^2 G}{\partial y \partial z}$$

تفاضل جزئى بالنسبة إلى z للمشتقة الجزئية الأولى بالنسبة إلى z

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)=\frac{\partial^2 G}{\partial z^2}$$

وهكذا الأمر فى حالة دالة فى أربعة متغيرات مستقلة ، سنجد أن :-

المشتقات الجزئية الأولى عددها ٤ بينما المشتقات الجزئية الثانية عددها ١٦ (كل واحدة من الأربعة اشتقاقات بالأولى تُشتق أربع مرات للمرة الثانية) .

وعمومـــاً :-

عدد المشتقات الجزئية الأولى لأى دالة = عدد المتغيرات المستقلة فى هذه الدالة

بينما عدد المشتقات الجزئية الثانية لهذه الدالة = مربع عدد المتغيرات المستقلة بها

أى أنه إذا كانت : $y = f\left(x_1 , x_2 , x_3 .... x_n\right)$

فإن عدد المشتقات الجزئية الأولى = n

، عدد المشتقات الجزئية الثانية = n^2

أمثـــلة :-

(١٠) إذا كانت :

$$G = func.(x , y , z) = 5x^3 + 12x^2 y^3 + 8yz^3 + 7y^4$$

فأوجد المشتقات الجزئية الأولى والثانية لهذه الدالة :

الحـــــــل :-

$$\frac{\partial G}{\partial x} = 15x^2 + 24xy^3 \qquad .... (A)$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} = 36x^2y^2 + 8z^3 + 28y^3 \qquad .... (B)$$

$$\frac{\partial G}{\partial z} = 24yz^2 \qquad .... (C)$$

ولايجاد المشتقات الجزئية الثانية :-

نفاضل المعادلة " A " ثلاث مرات بالنسبة إلى "x , y , z"

، نفاضل المعادلة " B " ثلاث مرات بالنسبة إلى "x , y , z"

، نفاضل المعادلة " C " ثلاث مرات بالنسبة إلى "x , y , z"

∴ بالنسبة إلى A :-

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = 30x + 24y^3 \qquad .... (١)$$

$$,\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 G}{\partial y \partial x} = 72xy^2 \qquad .... (٢)$$

$$,\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 G}{\partial z \partial x} = 0\ (zero) \qquad .... (٣)$$

، بالنسبة إلى (B) :-

$$,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y}=72xy^2$$ .... (٤)

$$,\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}=72x^2y$$ .... (٥)

$$,\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 G}{\partial z \partial y}=24z^2$$ .... (٦)

وبالنسبة إلى (C) :-

$$,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)=\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial z}=0\ (zero)$$ .... (٧)

$$,\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)=\frac{\partial^2 G}{\partial y \partial z}=24z^2$$ .... (٨)

$$,\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)=\frac{\partial^2 G}{\partial z^2}=48yz$$ .... (٩)

لاحظ أن عددها ٩ مشتقات جزئية ولاحظ التالى أيضاً :-

رقم (٢) = رقم (٤) = $\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 G}{\partial y \partial x}=72xy^2$

، رقم (٣) = رقم (٧) = $\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial z}=\frac{\partial^2 G}{\partial z \partial x}=0\ (zero)$

، رقم (٦) = رقم (٨) = $\frac{\partial^2 G}{\partial y \partial z}=\frac{\partial^2 G}{\partial z \partial y}=24z^2$

١٥-٤ :- مصفوفة هيس والمحدد الهيسى Hessian matrix and determinant

قام هيس بوضع التفاضلات الجزئية الثانية للدالة فى مصفوفة مربعة ومحدد المصفوفة المربعة هذه يُطلق عليه بالمحدد الهيسى .

وقد علمنا مما سبق أن عدد المشتقات الجزئية الأولى للدالة فى متغيرين هو ٢ بينما المشتقات الجزئية الثانية = $2^2 = 4$ وفى حالة ٣ متغيرات مستقلة فإن المشتقات الجزئية الثانية = 3^2 وفى حالة n متغير مستقل فإن المشتقات الجزئية الثانية $n \times n = n^2$

وتكون مصفوفة هيس كالتالى :-

١) فى حالة متغيرين : $Z = f(x\ ,\ y)$

مصفوفة هيس ٢ × ٢ =
$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) & \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) & \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \end{bmatrix}$$

ويمكن اختصارها هكذا :
$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}$$

حيث :-

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} = z_{12} \quad , \quad z_{11} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x} \quad , \quad z_1 = \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = z_{21} , \quad z_{22} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial y} \quad , \quad z_2 = \frac{\partial z}{\partial y}$$

بينما تكون مصفوفة هيس فى حالة دالة فى ثلاثة متغيرات كالتالى :-

مصفوفة هيس " ٣ × ٣ "
$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} \end{bmatrix}$$

وفى حالة n متغير مستقل فإن مصفوفة هيس تكون كالتالى :-

مصفوفة هيس n × n
$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \ldots\ldots Z_{1n} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} \ldots\ldots Z_{2n} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} \ldots\ldots Z_{3n} \\ . & . & . \quad\quad . \\ . & . & . \quad\quad . \\ Z_{n1} & Z_{n2} & Z_{n3} \ldots\ldots Z_{nn} \end{bmatrix}$$

أى أن الصف الأول عناصره عبارة عن :-

مشتقات $\frac{\partial z}{\partial x}$ بالنسبة إلى كل المتغيرات على الترتيب $(x , y \ldots)$

، عناصر الصف الثانى عبارة عن :-

مشتقات $\frac{\partial z}{\partial y}$ بالنسبة إلى جميع المتغيرات على الترتيب $(x , y \ldots)$

بينما عناصر الصف الثالث فهى عبارة عن :-

مشتقات $\frac{\partial z}{\partial m}$ (m هى المتغير المستقل الثالث مثلاً فى الدالة Z خلاف $(x , y \ldots x)$

بالنسبة إلى جميع المتغيرات على الترتيب $(x , y , m \ldots)$

أمثـــلة :-

(١١) كون مصفوفة هيس ومن ثم احسب قيمة المحـدد الهيســى لكـل مـن الـدوال التالية :-

أ) $Z = f(x , y) = 6x^3 - 5x^2y + 10xy + 8y^2$

ب) $Z = f(x , y) = -3x^3 + 5y^4 - 3x^2y^2$

الحـــــــل :-

الدالة (أ) هى المثال رقم ٨ السابق حله

وسوف نجد أن :-

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = Z_{11} = 36x - 10y$$

$$Z_{12} = -10x + 10$$

$$, Z_{21} = -10x + 10$$

$$, Z_{22} = 48y$$

∴ مصفوفة هيس لهذه المسألة :-

$$\begin{bmatrix} (36x - 10y) & (-10x + 10) \\ (-10x + 10) & (48y) \end{bmatrix}$$

وقيمة المحدد الهيسى :-

$$\begin{vmatrix} 36x - 10y & -10x + 10 \\ -10x + 10 & 48y \end{vmatrix} = \Delta$$

$$= [(36x - 10y)(48y)] - [(-10x + 10)(-10x + 10)]$$

$$= 1728xy - 480y^2 - [100x^2 - 200x + 100]$$

$$= 1728xy - 480y^2 - 100x^2 + 200x - 100$$

، الدالة (ب) هى المثال رقم (٩) السابق حله :-

وسوف نجد أن :-

$$Z_{11} = -18x - 6y^2$$
$$Z_{12} = -12xy$$
$$Z_{21} = -12xy$$
$$Z_{22} = 60y^2 - 6x^2$$

∴ مصفوفة هيس فى هذه الحالة :-

$$\begin{bmatrix} -18x - 6y^2 & -12xy \\ -12xy & 60y^2 - 6x^2 \end{bmatrix}$$

، قيمة المحدد الهيسى $\Delta =$

$$\Delta = \begin{bmatrix} -18x - 6y^2 & -12xy \\ -12xy & 60y^2 - 6x^2 \end{bmatrix}$$
$$= \left[\left(-18x - 6y^2\right)\left(60y^2 - 6x^2\right)\right] - \left[+144x^2y^2\right]$$
$$= -1080xy^2 + 108x^3 - 360y^4 + 36x^2y^2 - 144x^2y^2$$
$$= -360y^4 + 108x^3 - 1080xy^2 - 108x^2y^2$$

١٥-٥ :- توضيح معنى التفاضل الجزئى بيانياً وهندسياً

Graphical and Geometrical illustration of partial derivatives

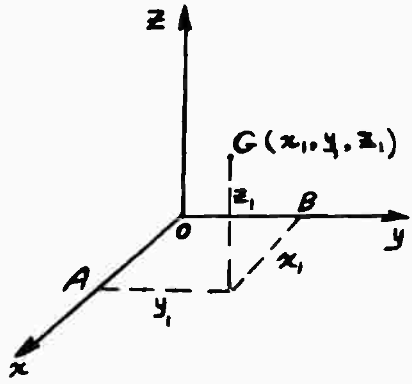
نعلم أن الدالة $y = f(x)$ يمثلها مستقيم عندما تكون x من الدرجة الأولى ويقع هذا المستقيم فىالمستوى $X\,O\,Y$

بينما يمثلها منحنى مستوى يقع فى المستوى $X\,O\,Y$ كذلك (أو فى أى مستوى آخر إذا كانت درجتها أى x من الثانية فأكثر .

هذا الكلام عندما يكون هنالك متغير واحد مستقل وهو x

ولكن فى حالة الدالة $Z = f(x\,,\,y)$ ، فهنالك متغيرين مستقلين $x\,,\,y$ ومتغير تابع وهو Z ويمكن تمثيل هذه الدالة بواسطة سطح Surface أى إحداثيات فراغية (ثلاثية الأبعاد) ، كالتالى :

أنظر الرسم شكل (١٥-١).



شكل (١٥-١)

نعتبر المحورين OY , OX المتعامدين على بعضهما ويمثلهما المستوى (الأفقى) XOY ، ويمكننا تمثيل متغيرين مستقلين x , y على المحورين OY , OX وسوف نطلق عليه المستوى xy .

فإذا ما أقمنا العمود OZ على هذا المستوى من O فسينشأ لدينا مستويان YOZ , XOZ عموديان على المستوى xy ومتعامدان مع بعضهما فى نفس الوقت ويطلق عليهما بالمستويان yz , xz

ويمثل المحور OZ قيم Z المناظرة لقيم كل من x , y .

فإذا افترضنا أن النقطة p (point = p) فى المستوى xy والتى إحداثياها هى : (x_1 , y_1)

حيث نوقع على المحور ox النقطة B التى إحداثيها x_1 على المحور OX ونوقع على المحور oy النقطة A التى إحداثيها y_1 على المحور OY وبذلك فإن p التى تقع فى المستوى "$xy = XOY$" وإحداثياها هما (x_1 , y_1)

فإذا ما رسمنا من p عموداً على المستوى XOY وموازياً للمحور OZ وبحيث يكون طوله مساوياً لقيمة Z أى يساوى Z_1 المناظرة لقيمتى (x_1 , y_1) .

وبذلـك سـنجد أن النقطـة C تُمثـل وضـع النقطـة فـى الفـراغ عندمـا تكـون المحـاور OZ , OY , OX والإحداثيات هى Z_1 , Y_1 , X_1

فإذا ما تغيرت قيم y , x وأوجدنا قيم Z المناظرة لهما ، سنجد أنه يمثلهـا نقطـة أخـرى على السطح ذاته الذى تقع عليه C .

أولاً :- نعتبر y ثابتة وقيمتها هى y_1 :-

سنجد أن المنحنى GCE يمثل التغيرات فى Z بالنسبة إلى x مع ثبوت y

وبالتبعية فإن المشتقة الجزئية الأولى للدالة بالنسبة إلى x أى :-

تمثل ميل المماس للمنحنى GCE : $\dfrac{\partial z}{\partial x}$

المناظرة لأى قيمة محددة لـ x

فمثلاً عندما $x = x_1$ فإن نقطة C هى النقطة المناظرة على المنحنى GCE وتكـون قيمـة ميل المماس لهذا المنحنى عند نقطة C التى إحداثيها $x = x_1$ هو $\dfrac{\partial z}{\partial x}$

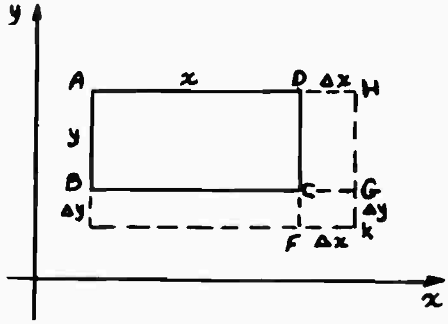
ثانيـاً :- نعتبر x ثابتة وقيمتها هى x_1 :-

سنجد أن المنحنى FCD يمثل التغيرات فى Z بالنسبة إلى y مع ثبوت قيمة x ويكـون المماس لهذا المنحنى FCD عند أى نقطة عليه مساوياً أو معبراً عن $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ لقيم y , z

والآن :- نريد أن نوضح كذلك معنى المشتقة الجزئية الأولى لدالة فى متغيرين هندسياً .

لنعتبر أن لدينا مستطيلاً ، بالطبع مساحته دالـة فـى متغـيرين وهمـا طولـه وعرضـه غـير المتساويين .

ويوضح شكل (١٥-٢) مستطيل بعداه x , y ومساحته A .



شكل (١٥-٢)

$\therefore A = xy$

فإذا اعتبرنا ثبوت y مع تغير x بمقدار ضئيل قدره Δx

$\therefore A + \Delta A = (x + \Delta x) \times y$

$, \Delta A = y \cdot \Delta x$

ويمثلها بالشكل المساحة CGHD

ومعدل زيادة A بالنسبة إلى x مع بقاء y ثابتة يعنى التفاضل الجزئى $\frac{\partial A}{\partial x}$ أى $\frac{\partial}{\partial x}(xy)$ وهى تساوى y

وبالمثل إذا اعتبرنا ثبوت x مع تغير y فإن التغير فى المساحة يمثله الشكل المستطيل $x \, \Delta y = BEFC$

ومعدل الزيادة فى المساحة :- $\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial Y}(xy) = x$

أما إذا تغيرت كل من y , x فإن :-

$$dA = \frac{\partial A}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial A}{\partial y} \cdot dy$$
$$= y \, dx + x \, dy$$

وبمقارنة هذا بالشكل (١٥-٢) يتضح أن الزيادة الكلية فى المساحة نتيجة لتغير كل من y , x بمقدار ضئيل ؛ عبارة عن :-

المستطيل BEFC ، والمستطيل CGHD والمستطيل الصغير CFKG

أى :- $y\,dx + x\,dy + dx\,dy$

وحيث أن $dx\,dy$ هى حاصل ضرب مقدارين متناهيين فى الصغر . لذلك فـإن قيمتهـا النهائية تكون أكثر تناهياً فى الصغر .

وبذلك فإنه يمكن اعتبار الزيادة الفعلية فى المساحة نتيجة لتغير كل من $y\,,\,x$ هى :-

$y\,dx + x\,dy$

فإذا ما افترضنا أن y = 8m ؛ وأنه عند لحظة معينة كانت y تزداد بمعدل 2m/sec

ونفترض كذلك أن $x = 5m$ وأنه عند نفس اللحظة كانت x تزداد بمعدل 3m/sec

والمطلوب هو حساب معدل زيادة A عند نفس اللحظة :

فإذا ما أدخلنا فى هذه المسألة عنصراً متغيراً آخراً وهو الزمن "t" فسوف نجد أنـه بمـرور الزمن (أى تغير t) فإن قيم كل من $x\,,\,y\,,\,A$ تتغير مع الزمن كذلك .

وعليه فإن معدل زيادة A يكون عبارة عن مجموع المعاملات التفاضلية كالتالى :-

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial x}\,\frac{dx}{dt} + \frac{\partial A}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$$

$$,\ \because \frac{\partial A}{\partial x} = y = 8$$

$$,\ \frac{\partial A}{\partial y} = x = 5$$

$$,\ \frac{dy}{dt} = 2$$

$$,\ \frac{dx}{dt} = 3$$

$$\therefore \frac{dA}{dt} = 8 \times 3 + 5 \times 2 = 34\ m^2/\sec$$

١٥-٦ :- التفاضل الجزئى والدوال الضمنية :-

نعتبر $Z = f(x\,,\,y)$ وتساوى ثابت وليكن قدره C

$$i.e \qquad Z = f(x\,,\,y) = C$$

$$\therefore dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = 0$$ (تفاضل الثابت = صفر)

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial y} . dy = \frac{\partial z}{\partial x} . dx$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\frac{\partial z}{\partial y}}$$

أمثـــــلة محلـولة :-

(١٢) إذا كانت $Z = \tan^{-1} \frac{y}{x}$ فأوجد dz

الحـــــــل :-

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \times \left(\frac{-y}{x^2}\right)$$

$$= \frac{x^2}{x^2 + y^2} \times \left(\frac{-y}{x^2}\right)$$

$$= \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

$$, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \times \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$\therefore dz = \frac{\partial z}{\partial x} . dx + \frac{\partial z}{\partial y} . dy$$

$$= \frac{-y}{x^2 + y^2} . dx + \frac{x}{x^2 + y^2} . dy = \frac{x\, dy - y\, dx}{x^2 + y^2}$$

(١٣) إذا كانت :-

$$Z = 4x^3 - xy^2 + y^3 = 0$$

فــاوجد $\frac{dy}{dx}$

الحـــــــل :-

$$\because \frac{dy}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} \div \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$, \frac{\partial z}{\partial x} = 12x^2 - y^2$$

$$, \frac{\partial z}{\partial y} = -2xy + 3y^2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \left(12x^2 - y^2\right) \div \left(-2xy + 3y^2\right)$$

(١٤) **إذا كانت** $Z = 4x^2 - 3y^2 + 5xy$

فاوجد $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$

الحـــــــل :-

عند إيجاد المشتقة الجزئية $\frac{\partial z}{\partial x}$ فإننا نفاضل بالنسبة إلى x ونتعامل مع y كما لو كـانت ثابتاً .

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial x} = 8x + 5y$$

وعند إيجاد المشتقة الجزئية $\frac{\partial z}{\partial y}$ فإننا نفاضل بالنسبة إلى y ونتعامل مع x كما لوكـانت ثابتاً .

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial y} = -6y + 5x$$

(١٥) **أوجد المشتقات الجزئية الأولى للدالة :-**

$$Z = 2x^2 + 5xy + 4y^2$$

الحـــــــل :-

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x + 5y$$

$$, \frac{\partial z}{\partial y} = 5x + 8y$$

(١٦) إذا كانت $xy = 5Z^2$ **فأوجد** $\frac{\partial y}{\partial x} , \frac{\partial y}{\partial z}$

الحـــــــل :-

$$\because xy = 5Z^2$$

$$\therefore \ y = \frac{5Z^2}{x}$$

ولإيجاد $\frac{\partial y}{\partial x}$ ، نفاضل بالنسبة إلى x ونتعامل مع Z كثابت

$$\therefore \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{-5Z^2}{x^2}$$

ولإيجاد $\frac{\partial y}{\partial z}$ نفاضل بالنسبة إلى Z ونعتبر x ثابت .

$$\therefore \frac{\partial y}{\partial z} = \frac{10}{x} Z$$

(١٧) المطلوب إيجاد المشتقات الجزئية Z_{xy} , Z_{yx} **للدالة** .

$$Z = x^2 y + 2x e^{\frac{1}{y}}$$

وبين أن $Z_{yx} = Z_{xy}$

الحـــــــل :-

لإيجاد المشتقة الجزئية الثانية ، يلزم إيجاد المشتقة الجزئية الأولى وهى Z_x , Z_y

(ثابت = y ,) $\quad , Z_x = 2xy + 2e^{\frac{1}{y}}$

(ثابت = x ,) $\quad , Z_y = x^2 - \frac{-2x\, e^{\frac{1}{y}}}{y^2}$

والمشتقات الجزئية الثانية عددها = ٤ لأن عدد المتغيرات = ٢ متغير .

والمطلوب منها اثنتين فقط وهما Z_{xy} أى المشتقة الجزئية الثانية بالنسبة إلى x للمقدار Z_y .

.... (١) $\quad \therefore Z_{xy} = 2x - \frac{2e^{\frac{1}{y}}}{y^2}$

ولإيجاد Z_{yx} ، نفاضل Z_x بالنسبة إلى y

$$\therefore Z_{yx} = 2x - \frac{2e^{\frac{1}{y}}}{y^2} \qquad \text{..........} (٢)$$

ويلاحظ أن : (١) = (٢) مما يعنى أن $Z_{xy} = Z_{yx}$

(١٨) أوجد :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial t.\partial x} \text{ and } \frac{\partial^2 y}{\partial x.\partial t}$$

علماً بأن $y = e^{xt}$

الحـــــل :-

لإيجاد $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ نوجد أولاً $\frac{\partial y}{\partial x}$ ونعتبر t = ثابت للمقدار $y = e^{xt}$

$$\therefore \frac{\partial y}{\partial x} = te^{xt}$$

ثم نفاضل $\frac{\partial y}{\partial x}$ مرة ثانية بالنسبة إلى x ونعتبر t = ثابت

$$\therefore \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = t^2 e^{xt}$$

ولإيجاد $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ نوجد أولاً المشتقة الجزئية الأولى للمقدار بالنسبة إلى t ونعتبر x = ثابت

$$\therefore \frac{\partial y}{\partial t} = x\, e^{xt} \qquad \text{..........}, (x = \text{ثابت})$$

$$, \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = x^2\, e^{xt} \qquad \text{..........}, (x = \text{ثابت})$$

ولإيجاد $\frac{\partial^2 y}{\partial t\, \partial x}$ نفاضل $\frac{\partial y}{\partial x}$ بالنسبة إلى t مع بقاء x = ثابت ولإيجاد $\frac{\partial^2 y}{\partial x\, \partial t}$ نفاضل $\frac{\partial y}{\partial t}$ بالنسبة إلى x مع بقاء t = ثابت

$$\therefore \frac{\partial^2 y}{\partial t.\partial x} = e^{xt} + xt\, e^{xt}$$

$$= e^{xt}(1 + xt)$$

$$, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x.\partial t} = e^{xt} + xt\, e^{xt}$$

$$= e^{xt}(1 + xt)$$

وعليه فإن لأى دالة y فى متغيرين x , t فإن كلاً من $\frac{\partial^2 y}{\partial x.\partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial t.\partial x}$ ، دائماً .

(١٩) أوجد المشتقات الجزئية للدالة :-

$$A = 2x^2 + 2y^2 - 5xy \cos\theta$$

حيث كل من x , y , θ متغيرات مستقلة

الحـــــــل :-

لإيجاد المشتقة الجزئية Ax أى $\frac{\partial A}{\partial x}$ مع بقاء y , θ كثوابت .

$$\therefore \frac{\partial A}{\partial x} = 4x - 5y \cos\theta$$

ولإيجاد A_y أى $\frac{\partial A}{\partial y}$ نفاضل بالنسبة إلى y مع بقاء x , θ ثوابت .

$$\therefore \frac{\partial A}{\partial y} = 4y - 5x \cos\theta$$

وبالمثل لإيجاد A_θ أى $\frac{\partial A}{\partial \theta}$ نفاضل بالنسبة إلى θ مع بقاء كل من y , x ثوابت .

$$\therefore \frac{\partial A}{\partial \theta} = 5xy \sin\theta$$

(٢٠) إذا كانت : $G = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$

فبين أن : $x\frac{\partial G}{\partial x} + y\frac{\partial G}{\partial y} + z\frac{\partial G}{\partial z} = 0$

الحـــــــل :-

لإثبات هذا يلزم إيجاد المشتقات الجزئية الأولى التالية :-

$$\frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial y}, \frac{\partial G}{\partial z}$$

ثم نعوض بقيمها فى المعادلة المطلوب إثباتها مساوية للصفر :-

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{1}{y} + z\left(\frac{-1}{x^2}\right) = \frac{1}{y} - \frac{z}{x^2}$$

$$, \frac{\partial G}{\partial y} = x\left(\frac{-1}{y^2}\right) + \frac{1}{z} = \frac{-x}{y^2} + \frac{1}{z}$$

$$, \frac{\partial G}{\partial z} = y\left(\frac{-1}{z^2}\right) + \frac{1}{x} = \frac{-y}{z^2} + \frac{1}{x}$$

وبالتعويض نجد أن :-

$$x\frac{\partial G}{\partial x} + y\frac{\partial G}{\partial y} + z\frac{\partial G}{\partial z} = \frac{x}{y} - \frac{z}{x} - \frac{x}{y} + \frac{y}{z} - \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = 0$$

(٢١) إذا كانت $f(x,y) = x^2y + y^2$ **فأوجد** $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ **باستخدام طريقة** Δ

الحـــــــل :-

لإيجاد $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$

$$\therefore f(x + \Delta x, y) - f(x,y) = \left[(x+\Delta x)^2 y + y^2\right] - \left(x^2y + y^2\right)$$

$$= (x+\Delta x)^2\ y + y^2 - x^2y - y^2$$

وبالفك والاختصار :

$$\therefore 2xy\ \Delta x + y\ (\Delta x)^2$$

$$\therefore f_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x\ ,\ y) - f(x\ ,\ y)}{\Delta x}$$

وبالتعويض عن قيمة البسط فى النهاية بالمقدار : $2xy\ \Delta x + y(\Delta x)^2$

$$\therefore \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x\ (2xy + y\ \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 2xy + y\ \Delta x = 2xy$$

وبالمثل فإن :- $f(x\ ,\ y+\Delta y) - f(x\ ,\ y) = x^2\ \Delta y + 2y\ \Delta y + (\Delta y)^2$

$$\therefore \frac{\partial f}{\partial y} = \underset{\Delta x \to 0}{Lim} \frac{f(x , y+\Delta y) - f(x , y)}{\Delta y} = x^2 + 2y$$

(٢٢) إذا اعتبرنا الرقم ١٨ ممثلاً لمجموع ثلاثة أرقام موجبة . فأوجد هذه الأرقام (الأعداد) بحيث يكون حاصل ضربهما أكبر ما يمكن .

الحــــــــل :-

نفترض أن أجزاء العدد ١٨ هى x , y , $18 - x - y$ وحاصل ضربها P

$$P = xy\,(18 - x - y)$$

ولجعل حاصل الضرب أكبر ما يمكن ، نوجد المشتقات الجزئية الأولى ونساويها بالصفر ونحل المعادلتين الناتجتين آنياً بالنسبة إلى x , y ، بعد ذلك نوجد المشتقات الجزئية الثانية ونحسب قيمها المناظرة لقيم x , y السابق الحصول عليها من حل المعادلتين .

نعتبر $A = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$, $B = \frac{\partial^2 p}{\partial y \partial x}$, $C = \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}$

ثم نوجد المقدار $\left[AC - B^2\right]$ فإذا كان أكبر من الصفر عندما A أصغر من الصفر فيكون لدينا نهاية عظمى وبذلك :-

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 18y - 2xy - y^2$$

$$, \frac{\partial p}{\partial y} = 18x - x^2 - 2xy$$

ثم نضع كل من : $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$

$$\therefore 18y - 2xy - y^2 = 0$$

$$, \ 18x - 2xy - x^2 = 0$$

وبحلهما

$$\therefore 18 - 2x - y = 0$$

$$, 18 - 2y - x = 0$$

$$\therefore 2x + y = 18$$

$$, 2y + x = 18$$

$$\therefore y = x = 6$$

$$, A = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = -2y$$

$$, B = \frac{\partial^2 p}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(18x - x^2 - 2xy\right) = 18 - 2x - 2y$$

$$, C = \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = -2x$$

$, at\ (6\ ,6)$

$\therefore A = -2 \times 6 = -12$

$, B = 18 - 2 \times 6 - 2 \times 6 = -6$

$, C = -2 \times 6 = -12$

$$\therefore AC - B^2 = -12 \times -12 - (-6)^2$$
$$= 144 - 36 = 108 > 0$$

وحيث أن ٠ > A " 12 - " ، ٠ < $AC - B^2$ فإن P يكون لها نهاية عظمى عند (6 , 6)

∴ العدد ١٨ يُجزأ إلى ثلاثة أعداد 6 , 6 , 6 للحصول على أكبر حاصل ضرب .

Exercise 16

أوجد المعاملات التفاضلية الجزئية $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ فى المسائل التالية :-

(١) $Z = \sin^{-1} \frac{x}{y}$

(٢) $Z = \frac{ax}{y^2}$

(٣) $Z = x^y$

(٤) $Z = \tan^{-1} \frac{x}{y}$

(٥) $Z = \frac{xy}{x^2 + y^2}$

(٦) $Z = x^3 + 3x^2y + 6xy^2 + 2y^3$

(٧) $Z = \cos\left(x^2 + y^2\right)$

فى المسائل التالية احسب التفاضلات الكلية :-

(٨) $Z = x^2y + xy^3$

(٩) $Z = ax^2 + 2b\,xy + cy^2$

(١٠) $Z = \frac{x}{y}$

(١١) $Z = Log\ x^y$

(١٢) $Z = e^{xy}$

(١٣) $Z = a^x\ e^y$

(١٤) إذا كانت $Z = 2x^2 + 3y^2$

فأوجد dz عندما $x = 1$, $y = 3$, $dx = 0.01$, $dy = 0.02$

(١٥) إذا كانت $Z = x^5y - \sin y$ فأوجد $\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial y}$ وبين أنها تساوى $\frac{\partial^2 y}{\partial y \partial x}$

(١٦) اسطوانة دائرية قائمة يزيد نصف قطر قاعدتها عند لحظة معينة بمقدار $1m/\sec$ فى حين يزداد الارتفاع بمعدل $2m/\sec$.

فاحسب معدل زيادة حجم الاسطوانة عندما يكون الارتفاع 10 m ونصف القطر 5 m

(١٧) سطح تُمثله العلاقة : $Z = a^2 - x^2 - 2y^2$. فما هو مقدار الميل عند نقطة على السطح المنحنى عند مقطعه بمستوى بحيث تكون y ثابتة وما هو مقدار الميل عند نقطة على السطح المنحنى عند مقطعه بمستوى بحيث تكون x ثابتة .

(١٨) إذا كانت $Z_x = \dfrac{\partial z}{\partial x}$ فأوجد $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ للدالة :-

$$x^2 z^2 + y \sin x \, z = 2$$

(١٩) إذا كانت $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ فأوجد قيمة $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$

(٢٠) بمعلومية أن : $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$ فأوجد $\dfrac{dy}{dx}$ للدالة :-

$$f(x , y) = x^2 y + xy^2 = 1$$

(٢١) إذا كان :

$$W = u^2 v + uv^2 + 2u - 3v$$

$$u = \sin(x + y + z)$$

$$, v = \cos(x + 2y - z)$$

فأوجد $\dfrac{\partial w}{\partial x}$ عندما :-

$$x = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}$$

(٢٢) إذا كانت :- ثابت = $a + b + c$ فى حين أن كل العناصر موجبة فمتى تكون: $a \times b \times c$ ذات أكبر قيمة ؛

أجـــوبة التمارين

ANSWERS

Exercise (1)

(1) $\underline{a}$) 0 , $\underline{b}$) لقيم x الأقل من ١

$\underline{c}$) $0.5 , \frac{2}{3} , 1 , \frac{4}{3} , 2 , 5 , 10 , -2 , -1 , \frac{-1}{2} , \frac{-1}{3}$

$\underline{d}$) infinity

$\underline{e}$) المنحنى على شكل قطع زائد

(2) $\underline{a}$) 4.1, 4.01, 4.001 4.000001

$\underline{b}$) 4

(3) $\underline{a}$) 5 , $\underline{b}$) infinity

(4) $\underline{a}$) 11 , 5 , 3 , 2.5 , 2.1 , 2.01 $\underline{b}$) 2

(5) 2	(6) 2	(7) $3x^2$	
(8) $\frac{1}{3}$	(9) $\frac{1}{2}$	(10) $\frac{-1}{3}$	
(11) $\frac{-5}{2}$	(12) $\frac{-1}{2\sqrt{x}}$	(13) 7	(14) $\frac{2}{3}$
(15) $\frac{1}{4}$	(16) $\underline{a}$) -0.6	$\underline{b}$) 1	(17) 1
(18) $\frac{3}{2}$	(19) $\frac{1}{2}$	(20) $\frac{-1}{\sqrt{2}}$	(21) $\frac{2}{3}$
(22) $\frac{m}{3}$	(23) $\frac{-1}{2}$ at $a > 0$, ∞ at $a < 0$		
(24) $\frac{2}{3}$	(25) 1	(26) $\frac{-1}{2}$	(27) $\frac{2}{3}$
(28) -2.5	(29) 0	(30) -2	(31) $\frac{1}{\sqrt{2}}$
(32) ∞	(33) $\frac{-3}{2}$	(34) $\frac{1}{6}$	(35) $\frac{1}{4}$
(36) 2.5	(37) -4	(38) -12	(39) $\sqrt{3}$

(40) -1 (41) $\frac{-1}{\sqrt{2}}$ (42) 2 (43) $\frac{-1}{56}$

(44) $-\sqrt{2}$ (45) 6 (46) $\frac{1}{3}$ (47) $6\sqrt{2}$

(48) 2 (49) 1 (50) $\frac{1}{9}$

(51) $2\cos x$ (52) $\frac{1}{2}$ (53) $\frac{1}{2}$ (54) 1

(55) $\frac{1}{2}$ (56) $\frac{1}{3}$ (57) $\frac{m^2}{2}$ (58) 3

(59) $-\sqrt{2}$ (60) 8 (61) 4 (62) $-2\sin x$

(63) 1 (64) $\frac{1}{20}$ (65) 2 [$1 + 2x = n^4$ ضع]

(66) 2 (67) $\frac{1}{2}$ (68) $\frac{3}{2}$ (69) 3

(70) 0.2

Exercise (2)

(1) 1.5 , 1.2

(2) a) $\frac{5}{3}$, b) $\frac{-3}{4}$, c) $\frac{-b}{2a}$, d) $\frac{2}{3}$

(3) $y = 1.5\,x + 1$

(4) $\Delta s = 9.8t \times (\Delta t) + 4.9\,(\Delta t)^2$

, $\frac{s}{t} = 9.8t + 4.9(\Delta t)$

, 1) 20.58 , 2) 20.09 , 3) 19,649

, 4) 19.6049 , $19.6\ ms^{-1}$ السرعة هى

(5) 6

(6) $\Delta y = 3x^2\,(\Delta x) + 3x\,(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$

., $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\,(\Delta x) + (\Delta x)^2$

., 12

(7) $\Delta y = \dfrac{-\Delta x}{x^2 + \Delta x}$, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{-1}{x^2 + x \,.\, \Delta x}$

$135°$ = الزاوية , -1 = الميل ،

(8) a) 6 b) 4 , c) 3

(9) a) 6 b) 18 , c) 10

Exercise (3)

(1) $8x^7$, 7 , $\dfrac{1}{5}$, 0.007 , $\dfrac{5}{3}.x^4$, $48x^3$, $12x^{13}$

(2) $5c\,x^4$, $\dfrac{7ab}{c}x^6$, $3b\,x^{3b-1}$, $2(4a+1)x^{4a}$, $6\pi x$

(3) 5 , $\dfrac{2}{3}$, -5 , a

(4) $\dfrac{x^2}{2}$, x^2 , $\dfrac{x^3}{3}$, $\dfrac{x^3}{12}$, $\dfrac{x^8}{8}$, $\dfrac{1}{4a+1}.x^{4a+1}$

, $\dfrac{1}{n+1}.x^{n+1}$, x^5 , $\dfrac{3}{20}x^5$

(5) $2at$

(6) $30t$

(7) $2\pi r$

(8) $4\pi r^2$, 144π

(9) $\dfrac{3}{2\sqrt{x}}$, $\dfrac{-2}{x^2}$, $\dfrac{-3}{2\,.\,x^{\frac{3}{2}}}$, $\dfrac{2}{3x^{\frac{1}{3}}}$, $\sqrt[4]{3} \times \dfrac{3}{4x^{\frac{1}{4}}}$

(10) $\dfrac{0.6}{x^{0.4}}$, $\dfrac{1.05}{x^{0.85}}$, $-\dfrac{3.2}{x^{1.4}}$, $\dfrac{-9}{x^2}$, $\dfrac{-n}{x^{n+1}}$

(11) $7.5\,x^{1.5}$, $-\dfrac{5.2}{x^{2.3}}$, $\dfrac{5.6}{x^{-0.3}}$, $\dfrac{-5}{2x^{\frac{3}{2}}}$

(12) $\dfrac{-60}{V^3}$

(13) 20.25 , 0 (14) $\dfrac{4}{3}$

(15) -0.02 , -0.5 , -2 , -8

(16) $\frac{-2}{x^3}$

(17) $x = 1$

(18) $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

(19) $x = \frac{1}{16}$

(20) $x = \frac{1}{2}$

Exercise (4)

(1) $18x^2 + 10x$

(2) $\frac{-3}{x^2} + 2$

(3) $9x^2 + 1$

(4) $\frac{-4}{x^2} + \frac{4}{x^3} = \frac{4}{x^2}\left(\frac{1}{x} - 1\right)$

(5) $16x^3 + 6x - 2$

(6) $x + \frac{1}{8}$

(7) $3 - 4x + 6x^2$

(8) $\frac{3}{\sqrt{x}}$

(9) $10x - \frac{1}{3\sqrt{x^3}}$

(10) $\frac{2}{3} \times \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

(11) $4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$

(12) $2x^2 + x - \frac{10}{3} \times \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

(13) $\frac{-21}{x^4} + \frac{10}{x^3} - \frac{3}{x^2}$

(14) $x^4 - x^3 + x^2 - x$

(15) $\frac{-1}{2\sqrt{x^3}} - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + 2$

(16) $u + at$

(17) $5 + 16t$

(18) $4t - 3$

(19) $3a\, x^2 + 2b\, x + c$

(20) $2\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$

(21) $\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x^3}}$

(22) $3(1 + x)^2$

(23) $3n\, x^{3n-1} - 3n\, x^2$

(24) $\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{5}{x^2}$

(25) $\frac{dy}{dx} = \left| 4x - 3 \right|_{x=1.5} = 3$, $x = \frac{3}{4}$

(26) $\frac{dy}{dx} = 6x$, $x = 0$

(27) $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 8x - 5$, -10 , -9 , -2

(28) $\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{x^2}$, $x = \pm 1$, $(1, 2), (-1, -2)$

Exercise (5)

(1) $20x + 9$

(2) $\frac{3x^2}{2} + 2x + 1$

(3) $(2x - 3)(2x + 3) + 2(x^2 + 3) = 3(x^2 - 1)$

(4) $6x(x^2 + 2) + 2x(3x^2 - 1) = 2x(6x^2 + 5)$

(5) $(x^2 - 2x)(6x - 1) + (3x^2 - x)(2x - 1) = 3x(4x^2 - 6x + 1)$

(6) $(x^2 + x - 1) + (x + 1)(2x + 1) = x(3x + 4)$

(7) $(x^2 - x + 1) + (x - 1)(2x - 1) = 3x^2 - 4x + 2$

(8) $2x(x^2 + 3x - 2) + (x^2 - 3)(2x + 3) = 4x^3 + 9x^2 - 10x - 9$

(9) $2x(x^2 - 2) + 2x(x^2 + 2) = 4x^3$

(10) $2(2x^3 - x + 1)$

(11) $3(x^2 - 7)$

(12) $6x^4 + 16x^3 - 7x^2 - 24x - 3$

(13) $4x(x^2 - 1)$

(14) $6(3x^2 + 5x + 2)$

(15) $(ax^2 + bx + c) \times u + (ux + 5v)(2a\,x + b)$

(16) $\frac{1}{2\sqrt{x}}(2x + 1)(x^2 - 2x + 3) + 2\sqrt{x}(x^2 - 2x + 3)$

$+ \sqrt{x}(2x - 2)(2x + 1)$

(17) $\frac{4}{3\sqrt[3]{x}}(\sqrt{x} - 2) + \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}}(\sqrt{x + 1}) + \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 2)$

(18) $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}(\sqrt[4]{x^3})(\sqrt[5]{x^2}) + \frac{3}{4\sqrt[4]{x}}(\sqrt[3]{x})(\sqrt[5]{x^2}) +$

$$+\frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}}\left(\sqrt[4]{x^3}\right)\left(\sqrt[3]{x}\right)$$

(19) $2a\ bx\ .\ c\sqrt{x^3}+\frac{3c}{2}\sqrt{x}\ .\ ab\ x^2=3.5\ abc\ \sqrt{x^5}$

Exercise (6)

(1) $\frac{-6}{(3x-1)^2}$

(2) $\frac{4x}{\left(1-2x^2\right)^2}$

(3) $\frac{-4}{(x-4)^2}$

(4) $\frac{3}{(x+2)^2}$

(5) $\frac{11}{(2x+3)^2}$

(6) $\frac{-2b}{(x-b)^2}$

(7) $\frac{2b}{(x+b)^2}$

(8) $\frac{x^2-6x}{(x-3)^2}$

(9) $\frac{-6x}{\left(x^2-3\right)^2}$

(10) $\frac{-\left(\frac{\sqrt{x}}{2}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(x-1)^2}$

(11) $\frac{\left[\frac{\sqrt{x}}{2}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right]}{2}$

(12) $\frac{\frac{-1}{\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}$

(13) $\frac{6x^2}{\left(x^3+1\right)^2}$

(14) $\frac{2\left(x^2-x-1\right)}{\left(x^2+x+1\right)^2}$

(15) $\frac{\left(7x^2-11x\right)}{\left(3x^2+x-1\right)^2}$

(16) $\frac{\left(x^2-1\right)}{x^2}$

(17) $\frac{6b^2\ x}{\left(b^2-x^2\right)^2}$

(18) *zero*

(19) $\frac{3x^2-2}{(x+2)^2}$

(20) $\frac{-\left(x+\sqrt{3}\ x\right)}{x^3}$

Exercise (7)

(1) $6(3x+2)$, $-12(1-3x)^3$, $\dfrac{1}{\sqrt{2x+5}}$

(2) $\dfrac{3}{(1-3x)^2}$, $-6(2-3x)$, $\dfrac{1}{\sqrt{(1-2x)^3}}$

(3) $10x\left(x^2-3\right)^4$, $-3x\sqrt{1-x^2}$, $\dfrac{2x}{\sqrt{2x^2-5}}$

(4) $\dfrac{6x}{\left(1-3x^2\right)^2}$, $\dfrac{-3x}{\sqrt{1-3x^2}}$, $\dfrac{-2x^2}{\sqrt{1-2x^2}}+\sqrt{1-2x^2}$

(5) $\dfrac{1}{(4-x)^2}$, $\dfrac{1}{2(4-x)^{\frac{3}{2}}}$, $\dfrac{2}{(4-x)^3}$

(6) $\dfrac{-2x}{\left(x^2-1\right)^2}$, $\dfrac{-x}{\left(x^2-1\right)^{\frac{3}{2}}}$, $\dfrac{1}{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$

(7) $\dfrac{x}{\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$, $\dfrac{1}{2\sqrt{x(1-x)^3}}$, $\dfrac{-1}{(1+x)^{\frac{3}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}}$

(8) $\dfrac{1-x-x^2}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}$, $\dfrac{2x}{3\left(x^2+1\right)^{\frac{2}{3}}}$

(9) $\dfrac{x}{\sqrt{c^2+x^2}}$, $\dfrac{-x}{\left(c^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$

(10) $\dfrac{4x-1}{2\sqrt{1-x-2x^2}}$, $-6nx\left(1-3x^2\right)^{n-1}$

(11) $\dfrac{x\left(2c^2-x^2\right)}{\left(c^2-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$, $3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)$

(12) $\dfrac{-x}{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$, $\dfrac{\left[\dfrac{2x}{\sqrt{1+4x}}-\sqrt{1+4x}\right]}{x^2}$

(13) $\dfrac{-2x^2}{\sqrt{(1+x^2)^3}}+\dfrac{2}{\sqrt{1+x^2}}$, $\dfrac{\dfrac{2x^2}{\sqrt{1+x^2}}-2\sqrt{1+x^2}}{4x^2}$

(14) $\left[\dfrac{-x^2}{2\sqrt{2-x}}+2x\sqrt{2-x}\right]$, $\dfrac{5-6x}{2\sqrt{3x^2-5x+2}}$

(15) $\dfrac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$, $\dfrac{3x}{2\sqrt{3x+2}}+\sqrt{3x+2}$

(16) $\dfrac{-(4x+5y)}{(5x+14y)}$

(17) $-\dfrac{2x(x^2+y^2)-x}{2y(x^2+y^2)+y}$

(18) $-\dfrac{x^2-y}{y^2-x}$

(19) $-\dfrac{x^{n-1}}{y^{n-1}}$

(20) $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{2x+3}{2y+4}=\dfrac{1}{6}$ at $(1,1)$

Exercise (8)

(1) $6x(x-1)$, $6(2x-1)$, 12

(2) $2ax^{2a-1}$, $2a(2a-1).x^{2a-2}$, $2a(2a-1)(2a-2).x^{2a-3}$

(3) $(12x^3-12x^2+4x-7)$, $(36x^2-24x+4)$, $72x-24$

(4) $10x^4-9x^2+4$, $40x^3-18x$, $120x^2-18$

(5) $\dfrac{-1}{x^2}$, $\dfrac{2}{x^3}$, $\dfrac{-6}{x^4}$

(6) $\dfrac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}$, $\dfrac{-1}{4x^{\frac{3}{2}}}$, $\dfrac{3}{8x^{\frac{5}{2}}}$

(7) $\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$, $\dfrac{-1}{\sqrt{(2x+1)^3}}$, $\dfrac{3}{\sqrt{(2x+1)^5}}$

(8) $\frac{-2}{x^3}, \frac{6}{x^4}, \frac{-24}{x^5}$

(9) $\frac{\lfloor n}{2a}\left[\frac{1}{(a-x)^{n+1}}+\frac{(-1)^n}{(a+x)^{n+1}}\right]$

(10) $-5, \frac{5}{12},$ أسفل نقطة على المنحنى

(11) $x=3, x=2, 2.5=0.25$ (أسفل نقطة على المنحنى)

(12) $-7, 2, 0, \frac{10}{3}$

Exercise (9)

(1) $\frac{dy}{dx}=2x-2, -4, -2, 2, 4, x=1, \frac{d^2y}{dx^2}=+ve$, (min. pt)

(2) max $value = 4$, $x = 0$, min. $value = 0$, $x = 2$

(3) $\frac{dy}{dx}=3-2x$, 3, 1, −1, −3, 1.5, $-ve$, max.

(4) max . $value = -4$, $x=-\frac{1}{2}$, min . $value = 4$, $x=\frac{1}{2}$

(5) a) min . $value = -16$, $x=2$, max . $value = 16$, $x=-2$

b) max . $value = 2$, $x=3$, min . $value = -2$, $x=1$

c) max . $value = 12$, $x=0$, min . $value = -20$, $x=4$

d) max . $value = 5$, $x=1$, min . $value = 4$, $x=2$

e) max . $value = 41$, $x=-2$, min . $value$ $9\frac{3}{4}$, $x=\frac{1}{2}$

(6) a) $x=\frac{1}{4}$, min — b) $-\frac{1}{4}$, min

c) $x=\frac{1}{3}$, max — d) $x=-2$, min

(7) a) $(-5, 120)$max , $(1, 12)$min , $(-2, 66)$ infl

b) $(-1, 37)$max , $(6, -306)$min , $(\frac{5}{2}, \frac{-269}{2})$ infl

$c)\ (-1\ ,\ 40)\max\ ,\ (-2\ ,\ 33)\ and\ (2\ ,\ -95)\min\ ,\ \text{infl. } at:\ x=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{3}$

$d)\ No\ \max\ ,\ No\ \min\ ,\ (1\ ,\ -1)\ \text{infl}$

$e)\ \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\ ,\ \frac{4\sqrt{6}}{9}\right)\max\ ,\ \left(\frac{-\sqrt{6}}{3}\ ,\ \frac{-4\sqrt{6}}{9}\right)\min$

$f)\ No\ \max\ ,\ No\ \min\ ,\ (0\ ,\ 5)\ \text{infl}$

(8) العددان هما : 5 , 5   (9) $x=-3\ ,\ x=2\ ,\ x=\frac{-1}{2}$

(10) $x=0$ (11) max "0.385", min "−0.385", $gradiant=-1$

(12) $(a)\ 6\ ,\ 6$, $(B)\ 6\ ,\ 6$, $(C)\ 4\ ,\ 8$, $(D)\ 3\ ,\ 9$

(13) $12\sqrt{2}\times12\sqrt{2}$ (14) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ (15) $\frac{1}{2}=\frac{\text{القطر}}{\text{العرض}}$

(16) $\frac{1}{\pi}=\frac{\text{القطر}}{\text{الطول}}$ (17) $3a$ (18) $20\ cm$

(19) $R^2\ at\ height=\frac{R}{\sqrt{2}}$

(20) $r=2\ inch$, $h=4\ inch$ (21) $decr\ .\ at\ \frac{35}{\sqrt{29}}\ km/h$

(22) $86.4\ cm^2/\min$ (23) $8\ m/\sec$

(24) 60° (25) $\cong 2.42\ cm$ (26) الارتفاع = القطر

(27) 1   (28) العرض = الطول   (29) نصف القطر = العمق

(30) $\sqrt{3}$ مرة   (31) $\frac{x}{2}\ km=$ بعد $\frac{x}{2v}$ ساعة ويكون أقل بعد

(32) $2.52\ m\ ,\ 1.26\ m$ (33) $10\ cm^2/\sec$

(34) $\frac{\pi}{8}\ m/\min$ (35) $33.2\ ft/\sec$

(36) $50\ km/h$ (37) $5\frac{5}{7}\ ft/\sec\ ,\ 1\frac{5}{7}\ ft/\sec$

(38) $\frac{5}{18}\pi\ ft/\min$

(39) $L=5.6\ m$

ويتم تحديده باعتبار النهاية العظمى للدالة $L = \dfrac{2.4}{\sin\alpha} + \dfrac{1.6}{\cos\alpha}$:

(40) $4 \times 4 \times 2m$

(41) $6 \times 6 \times 3\ ft$

(42) $4\ cm\ ,\ \sqrt{3} = 1.732$

(43) $x = 1.5$

(44) $75 \times 100\ \ ,\ \ 75 \times 100\ i.e\ \ 150 \times 100\ or\ 3 \times 100 + 2 \times 150$

(45) $1\ \ ,\ \ 2\sqrt{2}$

(46) $2\sqrt{5}\ mile$

(47) $2\left(1 + \sqrt{6}\right) \times 3\left(1 + \sqrt{6}\right)\ inch$.

(48) $\alpha = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$ زاوية نصف قطرية ؛

(49) $\dfrac{18}{\pi + 4} \cong 2.52$

(50) على بعد $18m$ من مصدر الضوء الأقوى

(51) $V_{max}\ \dfrac{128}{9} \times 1000\ cm^3$

عند ارتفاع $20\,cm$

(52) $\dfrac{1}{m} = \cos\alpha$ ، ولكن بشرط أن يكون $\dfrac{1}{m} \le \dfrac{a}{AB}$

حيث a مسقط AB على اتجاه الخط الحديدى .

Exercise (10)

(1) $\tan^{-1} 3$

(2) $40^\circ\ 54'\ \ or\ \ 139^\circ\ 6'$

(3) $x - y + 2\ \ ,\ \ x + y + 2 = 0$

(4) $(-2\ ,\ -4)$

(5) $18x - y = 27\ \ ,\ \ x + 18y = 489$

(6) $3y - 5x + 16 = 0$

(7) $\left\{\begin{array}{ll} y + 2x + 7 = 0 & \text{معادلة المماس} \\ ,x - 2y + 1 = 0 & \text{معادلة العمودى} \end{array}\right\}$

(8) $\tan^{-1}\dfrac{4}{3}$

(9) $45^\circ\ ,\ 135^\circ$

(10) $y = 3 - x\ \ ,\ \ y = x - 1$

(11) 16

(12) $\left(\frac{5}{2}\ ,\ \frac{25}{4}\right),\ x = \dfrac{5}{2}\ \ ,\ \ (1\ ,\ 13),\ x = 1$

(13) $2x + 9y = 20$

(14) $y = x^2 - 3x + 4$

ثم نحدد "b" من الشرط : $y` = 2x + b = 4 + b = 1$

وتُعين "c" من الشرط : أن النقطة (٢ , ٢) هى نقطة التماس

(15) $b^2 x_1 x + a^2 y_1 y - a^2b^2 = 1$

(16) $-\dfrac{b}{a^2}$ (17) $2y + x + 3 = 0 , 2y - x - 1 = 0$

(18) $(-6 , 10 , 15)$

(19) $y - 1 = \dfrac{-3}{2}(x - 1)$ (20) $y - \dfrac{2x}{\sqrt{3}} = \dfrac{\pi}{3}$

(21) $3x - y - 1 = 0$, $x + 3y - 17 = 0$

(22) $m = \tan\theta = \pm 4$

(23) $\left\{\begin{matrix} y = -4x + 8 \\ , y = -\dfrac{x}{4} - 2 \end{matrix}\right\}$, $\Phi = \tan^{-1}\dfrac{15}{8} \cong 62^\circ$

(24) $x + 2y = 4\sqrt{2}$

(25) $[n\pi , n = 0 , 1 , 2 , ...]$

(26) $y = 8 - 4x$, $x - 4y = 2$

(27) $(3 , 2)$, $(-3 , -2)$ (٢٨) قيم x تخيلية فلا يوجد مماس

(29) $34^\circ , 36^\circ$ (30) $83^\circ , 14^\circ$ (31) $53^\circ , 0^\circ$ (32) 90°

(33) $y = 4x$, $y = -4(x - 4)$

(34) $x = \pm 4$, $y = 8$ (35) $y = \pm 3x + 8$, $y = 0$

(36) $y = \pi - x$ (37) $y = x + \dfrac{2}{3}$

(38) $y = \dfrac{-x}{2} + 2$ (39) $y = 0$, $y = \pm\dfrac{1}{2}(3x - 1)$

(40) $\left\{\begin{matrix} 9x - 11y + 38 = 0 \\ , 11x - 9y + 24 = 0 \end{matrix}\right\}$ (41) $\left\{\begin{matrix} 4x + y = 16 \\ x - 4y = 4 \end{matrix}\right\}$

(42) $\left\{\begin{matrix} 3x + 2y + 10 = 0 \\ , 2x - 3y = 0 \end{matrix}\right\}$ (43) $\left\{\begin{matrix} 8x - y = 4 \\ , x + 8y = 32 \end{matrix}\right\}$

(44) $at\ t=0\ ,\ s=3\ ,\ v=1\ ,\ a=0$

(45) $at\ t=0\ ,\ s=-7\ ,\ v=6\ ,\ a=2$

(46) $at\ t=0\ ,\ s=-3\ ,\ v=2\ ,\ a=2$

(47) $at\ t=0\ ,\ s=-5\ ,\ v=3\ ,\ a=-6\ [,\ at\ v=0\ ,\ s=-4\ ,\ a=0]$

(48) $at\ t=0\ ,\ s=0,\ v=80\ ,\ a=-32$

$at\ v=0\ ,\ s=100\ ,\ a=-32$

(49) $\dfrac{u^2\sin^2\theta}{2g}\ ,\ \dfrac{u^2\sin 2\theta}{2g}$

(50) $[a=2-10t]\ ,\ \dfrac{5}{2}=$ الزمن بين لحظتي السكون

(51) $s=\dfrac{4}{3}\ ,\ t=3\ ,\ t=1$ تتوقف عند

(52) $2\sec\ ,\ 2\sec\ ,\ 64\ ft$

(53) $h\cong 734.7\ ,\ t\cong 12.2\ \sec$

(54) $v=3$

(55) $87\ m/\sec\ ,\ 60\ m/\sec\ ,\ 18\ m/\sec^2$

(56) $144\ ft\ ,\ 96\ ft/\sec$

(57) $v=12.58\ ,\ a=3.904$

(58) $s=87\ ,\ a=48$

(59) $v=-1\ ,\ a=8$

(60) $v=53\ ,\ a=44$

(61) $v=24\ ,\ a=44$

(62) $t=2\sec\ ,\ a=-12\ m/\sec^2$

وفى اتجاه مضاد لاتجاه بدء الحركة

(٦٣) تنعدم السرعة مرة واحدة عند $t=4$ ، العجلة تساوى

$5m/\sec^2$ عندما $t=2\ ,\ t=\dfrac{2}{3}$

$,\ [V]_{t=2}=-120\ m/\sec\ \ ,[V]_{t=2/3}=-57.8\ m/\sec$

Exercise (11)

(1) $\frac{1}{3}$ *rad* , $60^\circ / \pi$

(2) $\frac{1}{4}$ *rad* , $45^\circ / \pi$

(3) 4 *rad* , $720^\circ / \pi$

(4) $\frac{\pi}{5}$ *rad* , 36°

(5) 1 *rad* , $180^\circ / \pi$

(6) $5 \cos 5x$

(7) $5 \cos x$

(8) $\frac{-1}{3} \sin \frac{x}{3}$

(9) $\frac{1}{2} \sec^2 \frac{x}{2}$

(10) $0.6 \sec 0.6x \, . \tan 0.6x$

(11) $\frac{-1}{6} \operatorname{cosec} \left(\frac{x}{6}\right) \cot \left(\frac{x}{6}\right)$

(12) $3(\cos 3x - \sin 3x)$

(13) $2 (\cos 2x + \sin 2x)$

(14) $\sec x \,(\tan x + \sec x)$

(15) $4\cos 4x - 5\sin 5x$

(16) $\frac{-1}{3} \sin \frac{\theta}{3} + \frac{1}{4} \cos \frac{\theta}{4}$

(17) $2\cos \left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$

(18) $\sin (3\pi - x)$

(19) $\frac{7}{2} \operatorname{cosec} \left(A - \frac{7}{2}x\right) \cot \left(A - \frac{7}{2}x\right)$

(20) $4\sin^3 x \cos x$

(21) $6x^5 \cos x^6$

(22) $-12 \cos^2 4x - \sin 4x$

(23) $2x \sec^2 x \tan x^2$

(24) $-\frac{\sec^2 \sqrt{1-x}}{2\sqrt{1-x}}$

(25) $n \,(a \cos nx - b \sin nx)$

(26) $B \sin x$

(27) $\sec^3 \frac{x}{3}$

(28) $-3\sin \left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$

(29) $3 \sec^2 3x - 3\tan^2 x \, . \sec^2 x$

(30) $3x^2 + \frac{3}{4} \cos \frac{x}{4}$

(31) $\frac{a}{x^2} \sin \frac{a}{x}$

(32) $2(x\cos x + \sin x)$

(33) $\frac{\sin x - x\cos x}{2\sin^2 x}$

(34) $6\sin^2 x \cos x^2$

(35) $2x.\sec^2 x = 2\tan x$

(36) $\dfrac{\tan x - x\sec^2 x}{3\tan^2 x}$ (37) $\dfrac{x\sec^2 x - \tan x}{x^2}$

(38) $3\cos 3x + \cos(3x)^2 \times 18x$

(39) $-6\sin x^2 \cos^2 x^2$

(40) $2x \tan x + x^2 \sec^2 x$

(41) $-4 \operatorname{cosec} (4x+1)$

(42) $\dfrac{\sin x - 2x \cos x}{2\sqrt{x} \sin^2 x}$

(43) $x^3 - \sin(2x) \times 2 + 3x^2 \cos 2x$

(44) $\dfrac{2\sin x}{(2+\cos x)^2}$ (45) $\dfrac{-\sin x(1-\sin x) - (1+\cos x)(1-\cos x)}{(1-\sin x)^2}$

(46) $2\cot 3x - 3\operatorname{cosec}^2 3x$

(47) $\dfrac{-\sin x}{3\sqrt[3]{(\cos x)^2}}$ (48) $2\left(\cos^2 2x - \sin^2 2x\right)$

(49) $4\sin x \cos x$ (50) *zero*

(51) $2x \dfrac{(\cos 2x + x\sin 2x)}{\cos^2 2x}$

(52) $\dfrac{\sin x \cos x (2+\sin x)}{(1+\sin x)^2}$

(53) $\sin x + \cos x$

(54) $\dfrac{2\sin x + x\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$

(55) $6\pi \cos(2\pi x)$

(56) $\sec x \left(2\sec^2 x - \operatorname{cosec}^2 x\right)$

(57) $\dfrac{2\sec^2 x}{(2-\tan x)^2}$

(58) $5\cos 5x$

(59) $-4\sin 4x$ (60) $2x\cos x^2$

(61) $-4\cos^3 x \times \sin x$

(62) $\dfrac{3\cos x}{2\sqrt{\sin 3x}}$

(63) $-2t^2 \cos t \sin t + 2t\cos^2 t$

(64) $\cos(2t+2)$

(65) $\dfrac{2t\cos 2t - \sin 2t}{2t^2}$

(66) $\dfrac{-2a\sin t}{(a-\cos t)^2}$

(67) $\dfrac{-2a\sec^2 z}{(a+\tan z)^2}$

(68) $5\sec 5z \,.\, \tan 5z$

(69) $\operatorname{cosec}(1-z)\,.\,\cot(1-z)$

(70) $z^3 \sec z \tan z + 3z^2 \sec z$

(71) $\dfrac{\sec z \tan z}{(1+\sec z)^2}$

(72) $-\dfrac{1}{x^2}\sin^2(1-x^2)\left[6x^2\cos(1-x^2)+\sin(1-x^2)\right]$

(73) $\dfrac{\sin(x+y)-y\cos x}{\sin x - \sin(x+y)}$

(74) $\dfrac{2x\tan y + y\sec^2 x}{x^2\sec^2 y + \tan x}$

(75) $\dfrac{2x\sin x^2 - y^2\sec x\tan x}{2y\sec x}$

(76) $\sin 2x = 2\sin x\cos x$

(77) $\sin 2x = 2\sin x\cos x$

(78) $x(2\sin x + x\cos x)$

(79) $x\left(\dfrac{\sin 2x + x}{\cos^2 x}\right)$

(80) $\dfrac{\cos x - 2x\sin}{2\sqrt{x}}$

(81) $\dfrac{2+\sin x}{(1+2\sin x)^2}$

(82) $\dfrac{2\sin^2 x}{\sqrt{2x-\sin 2x}}$

(83) $\dfrac{-\sin 2x}{4\sqrt[4]{\left(1+\cos^2 x\right)^3}}$

(84) $\dfrac{-\cot^2 \frac{x}{3}}{\sin^2 \frac{x}{3}}$

(85) $\dfrac{2\sin^2 2\theta}{\sqrt{2\theta+\cos^2\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right)}}$

(86) $\sec^6 x$

(87) $\dfrac{1}{2}\cos\theta$

Exercise (12)

(١) عظمى ، $x=\dfrac{\pi}{6}$ ، صغرى ، $x=-\dfrac{\pi}{6}$

(٢) عظمى عند $x=\dfrac{\pi}{4}$

(٣) عظمى عند $14^\circ\ 29'$ ، عند $165^\circ 31'$ ، صغرى عند 90°

(٤) عظمى ، $x=\dfrac{\pi}{3}$

(٥) عظمى ، $x=\dfrac{\pi}{4}$

(٦) عظمى ، $x=\tan^{-1} 2$

(٧) $33^\circ\ 42'$ تقريباً

(٨) صغرى ، -1 ، عندما $x=\dfrac{\pi}{4}$

Exercise (13)

(1) $\dfrac{\pi}{3}$ (2) $\dfrac{\pi}{3}$ (3) $\dfrac{-\pi}{4}$

(4) 0 (5) $\dfrac{\pi}{6}$

(6) (231.6°) (7) 16.6° (8) 111.9°

(9) 22.4° (10) -40.1° (11) 23.7°

(12) $\left(\pi - \cos^{-1} x\right)$ (13) $\dfrac{4}{\sqrt{1-16x^2}}$

(14) $\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ (15) $\dfrac{-1}{\sqrt{9-x^2}}$

(16) $\dfrac{-b}{\sqrt{a^2-x^2}}$

(17) $-[a]$ $\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ (17) $-[b]$ $\dfrac{a}{a^2+x^2}$

(18) $\dfrac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$ (19) $\dfrac{-4x}{\sqrt{1-4x^4}}$

(20) $\dfrac{-1}{1+(a-x)^2}$ (21) $\dfrac{1}{\sqrt{x-x^2}}$

(22) $\dfrac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$ (23) $\sin^{-1} x + \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

(24) $\dfrac{3}{\sqrt{6x-9x^2}}$ (25) $\dfrac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$

(26) $\dfrac{-2}{x\sqrt{x^2-4}}$ (27) $\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} + 2x \sin^{-1} x$

(28) $\dfrac{2}{x^2-2x+5}$ (29) $\dfrac{1}{1+x^2}$

(30) $\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}$ (31) $\dfrac{2}{\sqrt{a^2x^2-1}}$

(32) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}\,(1+x)}$ (33) $\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$

(34) $\dfrac{-2}{x^2+1}$ (35) $\dfrac{2}{1+x^2}$

(36) $\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ (37) $\dfrac{3}{2x^2+2x+5}$

(38) $\dfrac{-3x^2}{9+x^2} + 3x^2 \cot^{-1} \dfrac{x}{3}$

(39) $\dfrac{1}{x^2+2x+2}$ (40) $\dfrac{1}{x\sqrt{25x^2-1}}$

(41) $\frac{1}{2}\sqrt{1+\operatorname{cosec} x}$

(42) $2x\tan^{-1}x+1$

(43) $\frac{-1}{2\sqrt{4-x^2}}$

(44) $\frac{-1}{x^2+1}$

(45) $\frac{2x^2}{\sqrt{2-x^2}} + 2x\cos^{-1}\left(1-x^2\right)$

(46) $\tan^{-1}x+\frac{x}{1+x^2}$

(47) $\sec^2 x\sin^{-1}x+\frac{\tan x}{\sqrt{1-x^2}}$

(48) $\frac{4x\sin^{-1}\left(x^2-2\right)}{\sqrt{4x^2-x^4-3}}$

(49) $\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

(50) $4x\ arc\cos x$

Exercise (14)

(1) $6e^{6x}$

(2) $\frac{1}{3}e^{\frac{x}{3}}$

(3) $\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}$

(4) $-3e^{-3x}$

(5) $\frac{-7}{3}.e^{-\frac{7}{3}x}$

(6) $-3.e^{(4-3x)}$

(7) $-a\,e^{-ax}$

(8) $\frac{1}{a}\,e^{\frac{x}{a}}$

(9) $a\,e^{ax+b}$

(10) $-9\,e^{-9x}$

(11) $e^{\sin x}\cos x$

(12) $e^x\left(x^2+2x\right)$

(13) $\frac{e^x}{e^x-1}$

(14) $e^{-2x}(\cos x-2\sin x)$

(15) $\frac{e^x+e^{-x}}{2}$

(16) $\frac{e^x-e^{-x}}{2}$

(17) $2x\,e^{x^2}$

(18) $(x+1)\,e^x$

(19) $(1-x)e^{-x}$

(20) $x\,e^{-x}(2-x)$

(21) $e^x(x+5)$

(22) $\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

(23) $2^x\ln 2$

(24) $e^{\frac{1}{x}}\left(3x^2-x\right)$

(25) $e^x(\sin x+\cos x)$

(26) $10e^x$

(27) $\frac{2\times10^{2x}}{0.4343}$

(28) $x^{n-1}.a^x.(n+x\log a)$

(29) $2\,a^{2x+1}\log a$

(30) $-\sin x\,e^{\cos x}$

(31) $2bx\,a^{bx^2}\log a$

(32) $(a+b)^x\log(a+b)$

(33) $e^{\tan x}.\sec^2 x$

(34) $\dfrac{3}{x}-3$

(35) $\dfrac{-y^2e^x+2xe^y}{x^2e^y+2ye^x}$

(36) $\dfrac{e^x\sin y+e^y\sin x}{e^y\cos x-e^x\cos y}$

(37) $\dfrac{1}{x}$

(38) $\dfrac{2ax+b}{ax^2+bx+c}$

(39) $1+\log x$

(40) $\cot x$

(41) $\dfrac{2a}{a^2-x^2}$

(42) $\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

(43) $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

(44) $\dfrac{1}{\sin x}$

(45) $\dfrac{e^x(2x-1)}{2x^{\frac{3}{2}}}$

(46) $-abe^{-bx}(\sin bx-\cos bx)$

(47) $\dfrac{1}{2\sqrt{x^2-1}}$

(48) $\dfrac{1}{1+e^x}$

(49) $\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{x}.(b-x)}$

(50) $\dfrac{e^{-x}}{\sqrt{1-e^{-2x}}}$

(51) $\dfrac{-a}{x\sqrt{b^2-x^2}}$

(52) $\dfrac{2}{e^x+e^{-x}}$

(53) $a^2e^{ax}\ ,\ a^3e^{ax}\ ,\ a^4e^{ax}\ ,\ a^ne^{ax}$

(54) $a^2e^{-ax}\ ,\ -a^3e^{-ax}\ ,\ a^4e^{-ax}\ ,\ (-1)^n a^n e^{-ax}$

(55) $\dfrac{-1}{x^2}\ ,\ \dfrac{1\times 2}{x^3}\ ,\ \dfrac{-1\times 2\times 3}{x^4}\ ,\ \dfrac{(-1)^{n-1}\lfloor n-1}{x^n}$

(56) $\dfrac{(5x-2)\sqrt{x-1}}{2}$

(57) $-x^{-x}(1+\ln x)$

(58) $\dfrac{x^4-8x^2-16}{\left(4x^2+x^4\right)\sqrt{\left(16-x^4\right)}}$

(59) $2\ x^{\ln(x-1)}\ .\ \ln\ x$

(60) $\left(\sin^{-1}x\right)^x\left[\dfrac{x}{\sin^{-1}x\sqrt{1-x^2}}+\ln\left(\sin^{-1}x\right)\right]$

(61) $e^{-x^2}\sin 3x\left[6\cos 3x-3x^2\sin 3x\right]$

(63) $2x+3^x\log 3$

(64) $-2x\ e^{-x^2}$

(65) $e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}$

(66) $2a\left(e^{2ax}-e^{-2ax}\right)$

(67) $\dfrac{2\cot^2 x}{\sin x}$

(68) $\left(2x+x^2\log 2\right).2^x$

(69) $\dfrac{1}{a}e^{\frac{x}{a}}\left(\cos\dfrac{x}{a}-\sin\dfrac{x}{a}\right)$

(70) $a^{\sin x}\cos x\log a$

(71) $\dfrac{1}{\cos x}$

(72) $2x(1-x)e^{-2x}$

(73) $\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+x}}$

(74) $\dfrac{2}{x-ax^5}$

(75) $-\tan x\ \sin^2 x$

(76) $\dfrac{-1}{x\sqrt{x^2+1}}$

(77) $x^{\frac{1}{x}}.\dfrac{1-\log x}{x^2}$

(78) $\dfrac{1}{\sqrt{x-x^2}}$

(79) $\tan^{-1}\dfrac{x}{a}$

(80) $\dfrac{-1}{\sqrt{x-4x^2}}$

(81) $\cot\ 2x$

(82) $\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

(83) $2\sqrt{1-x^2}$

(84) $2e^x\sqrt{1-e^{2x}}$

(85) $\dfrac{2e^{2x}}{e^{4x}+1}$

(86) $\dfrac{3e^{3x}}{\sqrt{1-e^{6x}}}$

(87) $\sqrt{\dfrac{2}{x}-4}$

(88) $\dfrac{4e^{x}}{1-e^{8x}}$

Exercise (15)

(1) $\dfrac{1}{4}\cosh\dfrac{x}{4}$ (2) $3\cosh 3x$

(3) $\dfrac{1}{3}\sinh\dfrac{x}{3}$ (4) $b\ \text{sech}^2\ bx$

(5) $\dfrac{1}{2}\text{sech}^2\dfrac{x}{2}$ (6) $b(\cosh bx+\sinh bx)$

(7) $\dfrac{-1}{x^2}\cosh\dfrac{1}{x}$ (8) $\sinh 2x$

(9) $3\cosh^2 x\sinh x$ (10) $a\ \cosh(ax+b)$

(11) $n\,a\ \sinh^{-1}(ax)\cosh(ax)$

(12) $2\ \tanh\ x\ \ \text{sech}^2\ x$

(13) $x\ \cosh\ x$

(14) $3x^2\ \sinh\ 3x+3x^3\ \cosh\ 3x$

(15) 1 (16) $\text{sech}^2 x\ e^{\tanh x}$

(17) $\dfrac{-2}{(1+x)\sqrt{2(1+x^2)}}$ (18) $\dfrac{2}{1-x^2}$

(19) $\dfrac{2}{1-x^4}$ (20) $\dfrac{1}{2}\text{sec}h\ x$

(21) $\tanh^2\ x$ (22) $-\dfrac{4}{\sinh^2 2x}$

(23) $4\sinh 4x$ (24) $\coth^2\ x$

(25) $\sqrt{\cosh\ x+1}$ (26) $\dfrac{1}{\cosh\ x}$

(27) $\dfrac{2}{\sinh\ 2x}$

Exercise (16)

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}\ ,\ \dfrac{-x}{y\sqrt{y^2-x^2}}$ (2) $\dfrac{a}{y^2}\ ,\ -\dfrac{2ax}{y^3}$

(3) $y\,x^{y-1}\ ,\ x^{y}\ \log x$ (4) $\dfrac{y}{x^2+y^2}\ ,\ \dfrac{-x}{x^2+y^2}$

(5) $\dfrac{y\left(y^2-x^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}\ ,\ \dfrac{x\left(x^2-y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}$

(6) $3x^2+6xy+6y^2 \quad ,\ 3x^2+12xy+6y^2$

(7) $-2x\ \sin\left(x^2+y^2\right)\ ,\ -2y\ \sin\left(x^2+y^2\right)$

(8) $\left(2xy+y^3\right)dx+\left(x^2+3xy^2\right)dy$

(9) $2(ax+by)\,dx+2(bx+cy)\,dy$

(10) $\dfrac{ydx-xdy}{y^2}$

(11) $\dfrac{y}{x}dx+\log x dy$

(12) $e^{xy}(ydx+xdy)$

(13) $a^x e^y(\log a dx+dy)$ (14) 0.04 تقريباً

(15) $5x^4$ كل منهما تساوى

(16) $150\pi\ \Delta\ m^3/\text{sec}$

(17) $-2x\ ,\ -4y$

(18) $\dfrac{-x}{z}$ (19) $\dfrac{dz}{dy}=\dfrac{-2y}{3z}\ (if\ z\neq 0)\ ,\ \dfrac{dz}{dx}=\dfrac{-x}{3z}$

(20) $\dfrac{-2xy+y^2}{x^2+2xy}$

(21) $$\frac{dw}{dx}=\left(2+\cos^2\frac{\pi}{6}-2\cos\frac{5\pi}{12}\cos\frac{\pi}{6}\right)\left(-\sin\frac{5\pi}{12}\right)-$$
$$-\left(\cos^2\frac{5\pi}{12}-2\cos\frac{5\pi}{12}\cos\frac{\pi}{6}-3\right)\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

(22) $a\times b\times c$ تكون ذات قيمة عظمى عندما $a=b=c$

وهذا ينطبق على أى عدد من العوامل أى $(a\times b\times c\times d\times\ldots)$.