الباب الأول

مبادئ التحليل الرياضى ، الفئات ، الأعداد

١-١ :- عام :

التحليل الرياضى له فروع كثيرة من فـروع الرياضيات وتجمع فيما بينها بعض الخواص ، فهى تهتم بدراسة العلاقات الكمية فى العالم الحقيقى وتُمثل هذه العلاقات كما هو الحال فى علم الحساب بمقادير عددية ، غير أن علم الحساب والجبر يدرس فى الغالب **المقادير الثابتة** التى تُميز الحالة التى نحن بصددها .

فى حين يتناول التحليل الرياضى **المقادير المتغيرة** والتى تحدد سير العمليات وعند التعرض للعلاقة والارتباط بين المقادير المتغيرة فإنه ينشأ لنا مفهوم الدالة والنهايات .

وفروع التحليل الرياضى متعددة مثل حساب التفاضل والتكامل ونظرية المتسلسلات ونظرية المعادلات التفاضلية . وقد ظهرت مبادئ طرق التحليل الرياضى عند قدماء الإغريق مثل أرشميدس وتطورت ببطء إلى أن جاء القرن السابع عشر حيث قام كل من اسحق نيوتن (١٦٤٢ - ١٧٢٧) عالم الرياضيات الإنجليزى والفيلسوف الألمانى جوتفريد ولهلم ليبنتز (١٦٤٦ - ١٧١٦) ، قاما وبصورة مستقلة بوضع مفهوم لحساب التفاضل والتكامل بصفة عامة وكذلك بالنسبة للمتسلسلات والمعادلات التفاضلية وقام أويلر بعد ذلك فى القرن ١٨ بتطوير مفهوم المتسلسلات والمعادلات التفاضلية كما قام أويلر أيضاً بوضع أسس لفروع أخرى من فروع التحليل الرياضى وقد اكتمل مفهوم هذه العلوم فى القرن التاسع عشر بجهود علماء كثيرين منهم كوشى فى فرنسا وريمان فى ألمانيا .

١-٢ :- الفئـات Sets

الفئة عبارة عن مجموعة من الأشياء محددة تحديداً واضحاً وتُعرف الأشياء المكونة للفئة بالعناصر ، عناصر الفئة أو مكونات الفئة أو أعضاء الفئة element or member

وقد لا تكون هنالك صفة مميزة تجمع بين هذه العناصر وقد تكون غير ذات معنى إلا أنها تكون محددة تحديداً واضحاً .

الإ أنه فى الغالب وخاصة من الناحية العملية ، عادة ما تجمع الفئة الواحدة بين مجموعة من العناصر ذات صفة مميزة واحدة أو أكثر .

ومن أمثلة الفئات :

1) $S_1 = \{2,4,6,8\}$

وهى عبارة عن فئة عناصرها عبارة عن الأعداد الزوجية الأكبر من الصفر والأقل من 10

2) $S_2 =$ { السبت ، الأحد ، الإثنين ، الثلاثاء ، الأربعاء ، الخميس ، الجمعة }

وهى فئة تجمع بين أيام الإسبوع وعدد عناصرها سبعة . وفى الفئات لا يهم ترتيب العناصر فمثلا فى الفئة S_1 نجد أن :

$S_1 = \{2,4,6,8\} = \{8,2,6,4\} = \{4,8,2,6\}$

وهذه الفئات متساوية لتساوى عناصرها ، مهما اختلف الترتيب فى العناصر وكذلك الفئة التى تجمع طلاب السنة النهائية فى إحدى الكليات والذين تقل أعمارهم عن 22 عاماً ، مثلا ، وهى فئة تجمع كل الطلاب الذين ينطبق عليهم هذا الشرط بالرغم من أنه قد لا يكون هنالك أى صفة مميزة تجمع بين هؤلاء الطلاب سوى أن أعمارهمْ أقل من 22 عاماً وطلاب فى السنة النهائية لهذه الكلية .

وكذلك الفئة التى تجمع الرجال الأطول من 2 متر ، وهى فئة تجمع بين كل الرجال الأطول من $200\ cm$ مهما اختلفت أعمارهم أو أوزانهم أو مؤهلاتهم أو جنسياتهم أو .... ويرمز للفئات بحروف كبيرة A , B , C مثلا بينما يُرمز لعناصر الفئة برموز من حروف صغيرة مثل $a , b , c, d , \ldots$

فإذا كانت لدينا الفئة A ومكوناتها a , b , c , h مثلا فإنه يمكن كتابتها كالتالى .

$A = \{a,b,c,h\}$

وأى عنصر من هذه العناصر ينتمى إلى الفئة A ويُعبر عن هذا كما يلى :-

$a \in A$ ، $b \in A$ ، $a,b,h \in A$ ، $c \in A$

بينما العنصر u مثلا فهو لا ينتمى للفئة A ويعبر عن هذا كما يلى :-

$u \notin A$ أى أن u لا تنتمى إلى A . ويمكن كتابة عناصر أى فئة بطريقتين وهما :-

الطريقة الأولى :-

وهى أن نكتب عناصر الفئة كلها بالتفصيل

ومثال ذلك : $S = \{2,4,6,8,10,12,14,16\}$

وعناصر هذه الفئة هى الأعداد الزوجية الأكبر من صفر والأصغر من 17 .

الطريقة الثانية :-

وهى أن نكتب الفئة كالتالىبدون كتابة للعناصر ذاتها

$S =$ { الأعداد الزوجية الأكبر من صفر والأصغر من 17 }

مثــــــال :-

بالطريقة الأولى :-

$S =$ { السبت ، الأحد ، الإثنين ، الثلاثاء ، الأربعاء ، الخميس ، الجمعة }

بالطريقة الثانية :- $S =$ { أيـــام الإســبوع }

الفئة الخالية : **Empty set**

يُطلق على الفئة التى لا تحتوى على أية عناصر ، بالفئة الخالية ويُرمز لها بالرمز Φ

$\Phi = \{\quad\}$

ويقال للفئة A بأنها فئة جزئية من الفئة B إذا كان كل عنصر من عناصر A ينتمى للفئة B ويعبر عن هذا كما يلى $A \subset B$

وتُقرأ : A فئة جزئية من B "subset" أو A محتواه contained فى B أو B تحتوى A والأخيرة تكتب هكذا $B \supset A$

١-٣ :- الأعـــداد

قام الإنسان منذ قديم الأزل بعمليات عد الأشياء التى حوله ومن هنا ظهرت الأعداد ....,1,2,3 وتُعرف هذه الأعداد الآن بالأعداد الطبيعية ، ثم ظهرت الكسور نتيجة لعمليات تقسيم وتوزيع الأشياء وقياس المقادير المتصلة المختلفة مثل الوزن والطول وبتطور علم الجبر كأحد فروع الرياضيات ظهرت الأعداد السالبة وكذلك الصفر فى

أوربا فى القرن السابع عشر فقط فى حين أنها كانت معروفة فى الصين منذ حوالى 2000 عام وفى الهند كذلك منذ حوالى 1500 عام ويُطلق على كل من الأعداد الصحيحة (أو الطبيعية) مثل ....,1,2,3 وكذلك على الأعداد السالبة مثل ....,3-,2-,1- وكذلك الكسور بالأعداد القياسية أوالـمُنطّقة .

الأعداد الحقيقية : Real Numbers "R"

كثير من الفئات ، تتكون عناصرها أو أجزائها من أعداد . والأعداد إما أن تكون حقيقية Real أو مركبة Complex ويرمز للأعداد الحقيقية بالحرف الأول من كلمة $Real \to R$ والأعداد الحقيقية تنقسم بدورها إلى :-

(١) الأعداد الطبيعية : Natural Numbers "N"

ويرمز لها بالحرف الأول من كلمة $Natural \to N$

$N = \{1,2,3,4,5,6,......\}$,

وتعرف كذلك بالأعداد الصحيحة الموجبة وتستخدم لعد عناصر الفئة . ومن ضمن عناصر فئة الأعداد الطبيعية ، هنالك مجموعة عناصر عبارة عن أعداد لا تقبل القسمة إلا على الواحد الصحيح أو على نفسها .

ويُطلق على مجموعة هذه العناصر **بالأعداد الأولية "P" Prime Numbers**

ويرمز لها بالحرف الأول من كلمة $\text{Prime} \to P$

والأعداد الأولية هى :-

$P = \{1,2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,.....\}$

وواضح أن الأعداد الأولية هى فئة جزئية من الأعداد الطبيعية . $P \subset N$

كما وأن هنالك **الأعداد الزوجية "E" Even Numbers** وهى فئة جزئية من الأعداد الطبيعية ويرمز لها بالحرف الأول من كلمة $Even \to E$

$, E = \{2,4,6,8,.....\}$

$, E \subset N$

وبصورة عامة فإن العدد الزوجى يمكن كتابته فى الصورة : $E = 2n$

حيث n عدد طبيعى ينتمى إلى مجموعة الأعداد الطبيعية $\therefore E = \{2n, n \in N\}$

وهنالك أيضاً **الأعداد الفردية "O" Odd Numbers** وهى فئة جزئية من فئة الأعداد الطبيعية ويُرمز لها بالحرف الأول من كلمة $Odd \rightarrow O$

$$O = \{1,3,5,7......\}$$

$$O \subset N$$

وبصورة عامة فإن العدد الفردى يمكن كتابته فى الصورة $O = 2n+1 \quad , \quad n \in N$

فمثـــلا

$$O = 2\times 3 + 1 = 7$$

$$= 2\times 4 + 1 = 9$$

$$= 2\times 5 + 1 = 11$$

$$\therefore O = \{2n+1\} \quad , \quad n \in N$$

ويلاحظ أن حاصل جمع عددين طبيعين مثل "$a+b$" أو حاصل ضربهما "$a.b$" للعددين الطبيعين a , b ، هو عبارة عن عدد طبيعى آخر .

وهذا ما يدعونا غالباً إلى القول بأن فئات الأعداد الطبيعية مُقفلة أى تنطبق عليها عمليات الجمع والضرب .

(٢) **الأعداد الصحيحة** : **Integers Numbers "Z"**

وهى الأعداد $....,3,2,1,0,1-,2-,3-$ ويرمز لها بالرمز Z

$$Z = \{......-3,-2,-1,0,1,2,3...\}$$

وبعض عناصر هذه الفئة ، عبارة عن **الأعداد الصحيحة السالبة والصفر**
Negative Integers Numbers

ويرمز لها بالرمز $\bar{Z}$ $\qquad \bar{Z} = \{.....,-3,-2,-1,0\}$

وباقى عناصر هذه الفئة هى **الأعداد الصحيحة الموجبة Positive Integers**

ويرمز لها بالرمز $\overset{+}{Z}$ $\qquad ,\overset{+}{Z} = \{1,2,3.....\}$

وقد نشأت الأعداد الصحيحة السالبة من حل معادلات مثل : $X + b = C$

حيث b , C أعداد طبيعية ، مما أدى إلى عمليات الطرح أو عكس عمليات الجمع وهُنا تُصبح $X = C - b$ وكل الأعداد الطبيعية تنتمى إلى فئة الأعداد الصحيحة ، أى $N \subset Z$

(٣) الأعداد القياسية أو الكسرية : "Q" Rational Numbers

وهى عبارة عن الأعداد التى يمكن وضعها فى الصورة $\frac{a}{b}$ مثل $\frac{-5}{3}, \frac{1}{3}$ وقد نشأت هذه الأعداد من حل بعض المعادلات مثل $bx = a$ وذلك لجميع الأعداد الصحيحة للمقدارين a , b حيث $b \neq 0$ ، وبالتالى فإن $x = \frac{a}{b}$ مما أدى إلى ظهور عمليات القسمة وهى عكس عملية الضرب وبالتالى $x = \frac{a}{b}$ ، أ $a \div b$ حيث a هى البسط ، b هى المقام فإذا رمزنا للأعداد القياسية بالرمز Q فإن : $Q = \frac{a}{b}$ حيث :-

$a =$ أحد عناصر الأعداد الصحيحة ، $a \in Z$ ،

$b =$ أحد عناصر الأعداد الطبيعية ، $b \in N$ ، $b \neq 0$

أمثلة : $\frac{-7}{100} = -0.07 , \frac{51}{100} = 0.51 , \frac{4}{7} , \frac{11}{2} , 3\frac{1}{2} = \frac{7}{2}$ والعدد 57 يمكن كتابته $\frac{57}{1}$ وبذلك فإن أى عدد قياسى n يمكن كتابته فى صورة كسر $\frac{n}{1}$ وبذلك فإن كل الأعداد الصحيحة تُعتبر فئة جزئية من الأعداد القياسية أى $N \subset Z \subset Q \subset R$.

(٤) الأعداد غير القياسية "اللاقياسية" أو الأعداد الصماء: Irrational Numbers

ويرمز لها بالرمز Q' وهى عبارة عن الأعداد التى لا يمكن التعبير عنها فى الصورة الكسرية $\frac{a}{b}$ حيث a , b أعداداً صحيحة . والأعداد اللاقياسية أو الصماء ، تكون مثل $\sqrt{3}$ والنسبة التقريبية π"ط" ، $\sqrt{2}$ ، $\log 3$ ويلاحظ أنه لا يمكن وضعها فى الصورة $\frac{a}{b}$ حيث a , b أعداداً صحيحة ، $b \neq 0$ وكل من فئة الأعداد القياسية وفئة الأعداد غير القياسية تُعرف بفئة الأعداد الحقيقية أى أن اتحاد كل من Q ، Q' هو R -" اتحاد كل من Q , Q' " $\therefore R = Q \cup Q'$ وذلك لتمييزها عن فئة الأعداد التخيلية والجذور التربيعية لمعظم الأعداد تكون لا قياسية ويجب أن لا نغفل أن π عدد لا قياسى ولكن $\frac{22}{7}$ أو 3.14 هى قيمة تقريبية لهذا العدد اللاقياسى .

وفى بعض الأحيان نلجأ إلى التعبير عن الأعداد القياسية (المُنطَقة) بأعداد تقريبية فمثلا قد نعتبر قيمة الكسر $\frac{1}{3}$ هى 0.33 فقط وهى أقل من $\frac{1}{3}$ أو قد نعتبرها 0.3333 وهى أيضاً أقل من $\frac{1}{3}$ وفى الحالتين السابقتين0.3333 و 0.33 فإننا أخذنا قيمة تقريبية للكسر أقل منه أى أقل من $\frac{1}{3}$ وقد تقرب قيمة الكسر إلى 0.34 أو إلى 0.334 أو إلى 0.3334 وهى أكبر من $\frac{1}{3}$ ويتوقف هذا على درجة الدقة المطلوبة .

ولذلك فإن الأعداد القياسية (المُنطَقة) ، الموجودة ليست كافية فى تطبيقاتنا العملية عِند قياس سمك شريحة معدنية رقيقة مثلا وليكن سمكها مساوياً للعدد 0.058mm ويجب أن لا ننسى هنا درجة الدقة فى كل جهاز مُستخدم فى القياس ومدى الدقة المطلوبة . إلا أنه فى علم الرياضيات فإنه يفترض الدقة المطلقة فى القياس وعلى ذلك كان لزاما إدخال أعداد جديدة وهى الأعداد الصماء أو اللاقياسية أو اللامنطقة وهى تُعبر عن القياس غير المقاس بوحدات القياس (مثل محيط الدائرة) .

فمثلا لا يمكن التعبير عن طول قطر مربع طول ضلعه L بالأعداد القياسية " طول القطر $= L\sqrt{2}$ " أو عن جيب تمام الزاوية $30°$وهو يساوى $\frac{\sqrt{3}}{2}$ أو عن النسبة بين محيط الدائرة إلى قطرها $= \pi$ " $\frac{22}{7}$ تقريباً "

وبصفة عامة فإنه لا يمكننا التعبير عن النسبة بين المستقيمات غير القياسية بالأعداد القياسية فمثلا العدد $\pi = \frac{22}{7}$ تقريباً هو عدد لا قياسى " أصم " وله قيمة تقريبية = 3.14159 وهى أقل من العدد ذاته كما أنه ذو قيمة تقريبية وطبقاً لدرجة الدقة = 3.14160 وهى أكبر من العدد ذاته والفرق بين هاتين القيمتين التقريبيتين هو 0.00001 وعلى ذلك فإن خطأ كل منهما لا يتجاوز فى قدره المطلق العدد 0.00001 وإذا اقتضى الأمر ألا يزيد الخطأ عن المقدار 0.000001 فإننا نجد القيمتين :

3.141592 وهى أقل من π

3.141593 وهى أكبر من π

وعلى هذا فإن العدد اللاقياسى " الأصم أو اللا منطق " لا يمكن أن يكون مساوياً للعدد المنطق بالضبط ، إلا أنه يمكننا أن نجد لكل عدد لا قياسـى ، أعـداداً قياسـية مسـاوية لـه بالتقريب كأن تكون أكبر منه قليلا أو أصغر منه قليلا وبذلك فإنه يصبح بالإمكان جعل الخطأ صغيراً بدرجة كافية .

ولإيضاح الأعداد الصماء بصورة أكثر ؛ لنعتبر أن لدينا مربع طول ضلعه $x\ Cm$ مثـلا ، باعتبار وحدة القياس هى السنتيمتر فإنه يمكننا أن نرسم مربعات طول ضلعها $x\ \ Cm$ ، $0.7\,x$ ، $3\,x$ ، $\frac{5}{6}x$ وقد لا نكتـب وحـدة القيـاس فنكتـب $0.7\,x$ أو $3\,x$ إذا لـم يكن هنالك التباس. وتستخدم عـادة فـى القيـاس ، أعـداد جذريـة موجبـة فـى غـالـب الأحيان فإنها تعطى قيمة هذا الطول مُقربة بتفريط أو بإفراط " زيادة أو نقصاناً "

فالمربع الذى طول ضلعه = $1\ \ Cm$ مساحته $1\ \ Cm^2$

، والمربع الذى طول ضلعه = $2\ \ Cm$ مساحته $4\ \ Cm^2$

، والمربع الذى طول ضلعه = $\frac{5}{2}\ \ Cm$ مساحته $6.25\ \ Cm^2$

ولكن المشكلة تنشأ من أنه إذا كان لدينا مربـع معروفـة مسـاحته فهـل سـيكون طـول ضلعه فى جميع الحالات عدداً جذرياً " قياسياً " موجبا ؟؟

والأمر قد يكون سهلا فى بعض الحالات كما يتضح من الأمثلة التالية :-

المساحة = $16\ \ Cm^2$ $\leftarrow$ طول الضلع = ٤

، المساحة = $\frac{25}{4}\ \ Cm^2$ $\leftarrow$ طول الضلع = $2.5\ \ Cm = \frac{5}{2}$

فالعدد الجذرى الموجب الذى مربعه = ١٦ هو العدد ٤

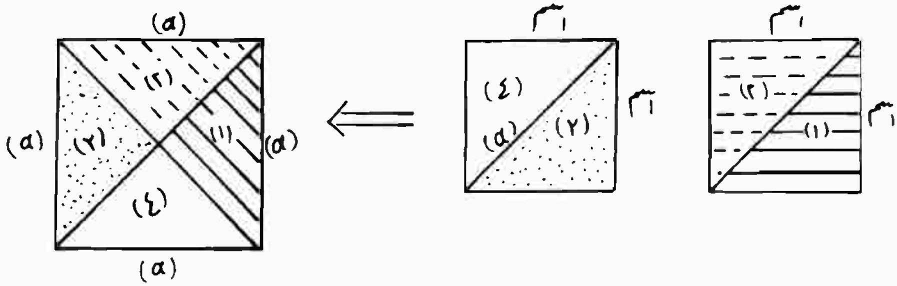
، فالعدد الجذرى الموجب الذى مربعه = $\frac{25}{4}$ هو العدد $\frac{5}{2}$

وبذلك فإن ٤ هى الجذر التربيعى للعدد ١٦ ، $4 = \sqrt{16}$

، $\frac{5}{2}$ هى الجذر التربيعى للعدد $\frac{25}{4}$ ، $\sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$

والآن ، سنقوم برسم مربعين على قطعة من الورق ، طول ضلع كـل منهمـا $1\ Cm$ أى أن مساحة كل منهما = وحدة المساحات = $1\ Cm^2$ ثم نقـوم بتقسـيم كـل مربـع إلى قسمين فى اتجاه القطر ونلون كل جزء منهما أو نميزه ، ثم نقوم بتجميعها مرة ثانية " 4 أجزاء " لعمل مربع واحد كبير وستكون مساحة هذا المربع $2\ Cm^2$ وطـول ضـلع كـل منهما = طول قطر المربع الصغير = $a = \sqrt{2} = \sqrt{1+1}$

مساحة المربع $\therefore\ a^2 = 2\ Cm^2$



شكـــــل (١-١)

وقد برهن الرياضيون القدامى منذ حوالى 2000 عام أن هذا القياس لـ : a لا ينتمـى إلى المجموعة Q وسموه عدداً لا جذرياً ، لا قياسياً أو أصم وكان هذا أول مثـال لعـدد لا جذرى . وحيث أن $\sqrt{9} = 3$ لأن $3^2 = 9$ فإننـا نسـمى العـدد a الـذى مربعـه $=2$ بالجذر التربيعى للعدد 2 ونكتبه $\sqrt{2}$

وهُنالك أمثلة كثيرة للأعداد اللاجذرية مثل : $\sqrt{3}$ ، $\sqrt{5}$ ، $\sqrt{6}$ ، $\sqrt{7}$ ، $\sqrt{8}$ ، $\sqrt{10}$

وعلمنا مما سبق أن أى عدد أو كل عدد قياسى " جذرى " يمكن أن يكتب فى الصـورة الكسرية $\frac{a}{b}$ حيث $a \in Z$ ، $b \in N$ ، $b \neq 0$

وقـد برهـن الرياضيون أن $\sqrt{2}$ وبـالمثل $\sqrt{3}$ ، $\sqrt{5}$ ، ..... لا يمكـن أن تكتـب علـى الصورة $\frac{a}{b}$ وبالمثل جميع الأعداد اللاجذرية (اللاقياسية)

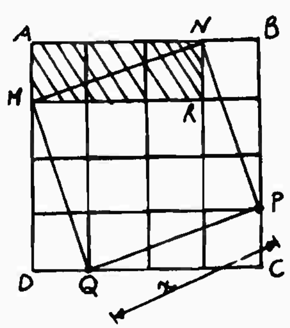
وإذا كان لدينا مكعب حجمه = $8\ Cm^3$ فإن طول ضلعه = $2\ Cm$ لأن 2 هى الجذر التكعيبى للعدد 8 وتُكتب $\sqrt[3]{8} = 2$ ولكن إذا كان لدينا مكعب حجمه = $2\ Cm^3$ ، فهل سيكون قياس طول ضلعه عدد جذرى موجب ؟

وقد أجاب الرياضيون عن هذا التساؤل بالبرهان بأن هـذا القيـاس لا ينتمى هـو الآخر للمجموعة Q وكتبوه $\sqrt[3]{2}$

ومن أمثلة هذا الكثير مثل : $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[3]{9}$, $\sqrt[3]{100}$

وهذا يوصلنا إلى الحقيقة التى ذكرناها سابقا ، أن الأعداد الجذرية الموجبة ، غير كافية للقياس ولنعتبر عدداً أصم أو لا مُنطق أو لا قياسى أو لا جذرى ، آخر مثل $\sqrt{10}$.

ولنعتبر مربعاً $ABCD$ طول ضلعه = $4\ Cm$ ، قُم بتجزئته إلى عدد 16 مربعا متساوياً ، فإذا أخذنا النقط M على AD ، Q على DC ، P على CB ، N على AB كما بالشكل بحيث يكون كل من : NA , PB , QC , DM مساوياً $3\ Cm$ ، ثم ننشئ المستطيل $AMRN$ ومساحته = $3\ Cm^2$ ويمكننا برهان أن الشكل $MQPN$ مربع ومساحته = $10\ Cm^2$ وقياس أو طول ضلع هذا المربع = $\sqrt{10}$ ، فالمساحة :
$x^2 = 10\ Cm^2$



شكـــل (١-٢)

وسوف نحاول إيجاد بعض القيم لـ x

وتقل بقيمة صغيرة جداً عن 10 , $3^2 = 9$

وتزيد بقيمة كبيرة جداً عن 10 . $4^2 = 16$,

$$\therefore \quad 3 < x < 4$$

وتقل بقيمة صغيرة جداً كذلك $(3.1)^2 = 9.61$.

وتقل بقيمة صغيرة كذلك $(3.16)^2 = 9.9856$.

وتزيد بقيمة صغيرة عن 10 $(3.17)^2 = 10.0489$.

$$\therefore \ 3.16 < x < 3.17$$

ويمكن أن نستمر بهذه الطريقة لمحاولة إيجاد قيمة أقرب ما تكون وعلى حسب درجة الدقة المطلوبة **إلا أن العملية لن تنتهى أبداً** ولن يمكننا الحصول على عدد قياسى جذرى مربعه = 10 تماماً وفى الحقيقة فإن $\sqrt{10}$ لا يمكن التعبير عنه كعدد جذرى قياسى فى الصورة $\frac{a}{b}$ ولذلك يطلق عليه عدداً لا قياسياً

والجذور التربيعية لمعظم الأعداد هى لا قياسية (ماعدا $\sqrt{4}$ ، $\sqrt{9}$ ، $\sqrt{16}$ مثلا)، π هى أيضاً عدداً لا قياسياً ويجب أن لا ننسى أن 3.14 أ، $\frac{22}{7}$ هى مجرد قيمة تقريبية للعدد π

ويلاحظ أن $\sqrt{10} \equiv 3.1622777$

مقرباً إلى جزء من عشرة من المليون ، إلا أن مربع هذا العدد لا يزال أقل من 10 ولا يعطى 10 تماماً ، أبداً .

١-٤ :- التمثيل الهندسى للأعداد الحقيقية :-

يمكن تمثيل أى عدد حقيقى x ينتمى إلى فئة الأعداد الحقيقية R ، $x \in R$ على خط مستقيم يُعرف بالمحور الحقيقى أو بخط الأعداد الحقيقية *Real line* أو بمحور الأعداد . وكل عدد حقيقى تناظره نقطة واحدة فقط على الخط المستقيم وبنفس الطريقة فإنه يوجد عنصر واحد فقط من فئات الأعداد الحقيقية يناظر عنصراً واحداً فقط من فئات النقط على الخط المستقيم فالأعداد التى على يمين نقطة الأصل 0 هى فئة الأعداد الموجبة بينما الأعداد التى على يسار 0 هى فئة الأعداد السالبة ونقطة 0 ذاتها ليست موجبة ولا سالبة .

١-٥ :- العمليات الجبرية على الأعداد الحقيقية :-

إذا كانت R هى فئة الأعداد الحقيقية ، $\{a , b , c\}$ هى فئة جزئية منها :

$\{a,b,c\}\subset R$

فإن ∴

(١) كل من حاصل $a+b$ ، $a.b$ ينتميان لفئة الأعداد الحقيقية ويُعرف هذا بقانون الإقفال

(٢) $b+a = a+b$ ويعرف هذا بقانون الإبدال الجمعى

(٣) $a+(b+c) = (a+b)+c$ ويُعرف هذا بقانون الترافق الجمعى

(٤) $a . b = b . a$ " " " الإبدال فى الضرب

(٥) $a.(bc) = (ab).c$ " " " الترافق فى الضرب

(٦) $a.(b+c) = ab+ac$ " " " التوزيع

(٧) $a+0 = 0+a = a$ وتعرف 0 بالعدد المحايد فى الجمع

(٨) $a . 1 = 1.a = a$ وتعرف 1 بالعدد المحايد فى الضرب

(٩) لأى عنصر a ينتمى إلى R يوجد عدد z بحيث أن :

$z+a=0$ وتعرف z بمعكوس a فى عمليات الجمع ، $z=-a$

(١٠) لأى مقدار $a\neq 0$ يوجد عدد z ينتمى إلى R بحيث أن $az=1$ وتُعرف z بمعكوس a فى عمليات الضرب ، $z=\frac{1}{a}$ or a^{-1}

١-٦ :- القيمة المطلقة للعدد الحقيقى :-

يرمز للقيمة المطلقة للعدد الحقيقى a بالرمز $|a|$ وتُعرف بمقياس أو معيار a ، a قد تكون موجبة أو صفر أو سالبة . ، $|a|$ هى المسافة بين العددين $a , 0$ أى أنها $S\ (a , 0)$ فمثلا : -

$$|4|=4 , |-4|=4 \quad , \quad |-\sqrt{3}|=|\sqrt{3}|=\sqrt{3}$$

$$,|1|=1 , |0| = 0 \quad , \quad \left|\frac{-2}{3}\right| = \frac{2}{3}$$

أى أن القيمة المطلقة للعدد الحقيقى a هى عدد حقيقى غير سالب أى أن $|a|\geq 0$

ويلاحظ الآتى $\therefore$

(١) $|a \cdot b \cdot c| = |a|\ |b|\ |c|$

ومنها $|a \cdot b \cdot c \ldots\ldots r| = |a|\ |b|\ |c|\ \ldots\ldots |r|$

(٢) $|a + b| \leqq |a| + |b|$

ومنها $|a + b + c \ldots\ldots r| = |a| + |b| + |c| + \ldots\ldots |r|$

(٣) $|a - b| \geqq |a| - |b|$

والمسافة بين النقطتين x_2 ، x_1 وهما من الأعداد الحقيقية على محور الأعداد الحقيقية

هى :- $|x_1 - x_2| = |x_2 - x_1|$

١-٧ :- الأســس والجــذور :-

إذا ضربنا x فى نفسها عدد n من المرات

أى $x \cdot x \cdot x \ldots\ldots$ ، n من المرات

ويمكن أن نعبر رياضيا عن حاصل الضرب السابق كالتالى :-

x^n وتُعرف x بالأســاس ، n بالأُس .

القواعد الأساسية للوغاريتمات :

(١) $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$

فمثــــلا : $x^4 \cdot x^5 = x^9$

(٢) $\dfrac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$

فمثــــلا : $\dfrac{x^8}{x^3} = x^{8-3} = x^5$

(٣) $\left(x^m\right)^n = x^{mn}$

فمثــــلا : $\left(x^2\right)^3 = x^6$

(٤) $\left(\dfrac{x}{y}\right)^m = \dfrac{x^m}{y^m}$

فمثــــلا : $\left(\dfrac{2}{3}\right)^4 = \dfrac{2^4}{3^4}$

ومن القاعدة الثانيـــة ، :- ،

إذا كانت $m=n$ فإن $x^{m-n} = x^0 = 1$

وهذا منطقى لأن : $\frac{x^m}{x^n}=\frac{x^m}{x^m}=\frac{x^n}{x^n}=x^{m-m}=x^{n-n}=x^0=1$

وذلك طالما $m=n$ وكذلك إذا كان لدينا المقدار x^{m-n} وكانت $m=0$ فإن :-

$x^{m-n} = x^{-n}$ ومنها $\therefore$ $x^{-n} = 1/x^n$ وإذا كانت $x^n = M$ فإن x تُعـرف بأنهـا الجذر النونى (الذى رتبته n) للمقدار M وتكتب هكذا $x = \sqrt[n]{M}$ وأحيانا فإنـه قـد يوجد أكثر مـن جـذر حقيقـى رتبتـه n للمقـدار M فمثـلا $3^2 = 9$ ،والعـدد 9 لـه جـذران تربيعيـان حقيقيـان وهما $3-$, 3 وإذا كـان لدينـا m , n عدديـن صحيحـين موجبين فإن المقدار $x^{m/n}$ يُمكن وضعه على الصورة $x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m}$

١-٨ :- اللوغاريتمات :-

إذا كانت $x^m = N$ فإن m تُعرف بأنها لوغـاريتم المقـدار N للأسـاس x وتكتـب كالتالى :

$$m = \log_x N$$

$$\log_C \ a\,.b = \log_C a + \log_C b \quad ،$$

$$\log \frac{a}{b} = \log_C a - \log_C b \quad ،$$

$$\log_C a^b = b \log_C a \quad ،$$

ويُستخدم عادة فى اللوغاريتمات أساسان وهما الأســاس 10 ويُعـرف بنظـام بريجزيـان والأساس e ويُعرف بالنظام النابييرى حيث $e \cong 2.71828.....$

١-٩ :- التباينات (اللاتعادلية)

إذا كان لدينا $x-y$ = عددا موجباً فإنه يمكن أن نُعبر عن ذلك بأن x أكـبر مـن y أو y أصغر من x ويُعبر عنهما على الترتيب كالتالى $x > y$ أو $x < y$ وإذا كـان مـن الممكن أن يكون $x = y$ فإنه يمكن التعبير عن هذه الحالة كالتالى $x \geqq y$ أو $y \leqq x$ وتكون x على محور تمثيل الأعداد الحقيقية واقعة على يمين y

أمثـــلة :-

(١) $x \leqq a$ يعنى ذلك أن x عدد حقيقى من الممكن أن يكـون مسـاويا للعـدد a أو أقل من a

(٢) $-6 > -5$ ويمكن كتابها $-5 > -6$

(٣) $6 < 7$ ويمكن كتابتها $7 > 6$

قواعـد المتباينـات الأساسيـــة :-

أذا كان لدينا a , b , C أعداداً حقيقية فإنه :-

١- إمـا $a > b$
أ، $b > a$
أ، $a = b$
" قانون الثلاثيـة "

٢- إذا كانت $a > b , b > c$ فإن $a > c$ " قانون الإنتقالية "

٣- إذا كانت $a > b$ فإن $a + h > b + h$

٤- إذا كانت $a > b$ ، $h > 0$ فإن $ah > bh$

٥- إذا كانت $a > b$ ، $h < 0$ فإن $ah < bh$

١-١٠ :- الفترات على خط الأعداد الحقيقى :-

(١) الفترة المفتوحة :- Open interval :-

إذا كان a , b عددين حقيقيين وبحيث أن $a < b$ فإن الفترة المفتوحة من a إلى b عبـارة عن مجموعة الأعداد x التى تُحقق المتباينة $a < x < b$ ويرمز للفـترة المفتوحـة بـالرمز (a , b) أو بالرمز $]a , b[$ $i.e\ (a,b) = \{a < x < b \quad , x \in R\}$

(٢) الفترة المُغلقة (المُقفلة) :- Closed interval :-

إذا كان a , b عددين حقيقيين ، $a < b$ فإن الفترة المُغلقة مـن a إلى b عبارة عـن مجموعة الأعداد x التى تُحقق المتباينة $a \leqq x \leqq b$ ويُرمز للفترة المغلقة بالرمز $[a , b]$ أى أن كل من النهايتين a , b قد أضيفت لعناصر الفترة $a < x < b$

(٣) الفترة النصف مفتوحة :-

وهى مجموعة الأعداد التى تحقق المتباينة $a < x \leqq b$ ويرمز لها بالرمز $(a , b]$

(٤) الفترة النصف مُغلقة :-

وهى مجموعة الأعداد التى تحقق المتباينة $a \leqq x < b$ ويرمز لها بالرمز $[a , b)$

(٥) فئة الأعداد الحقيقية R عبارة عن الفترة المفتوحة $(-\infty , \infty)$

$$i.e \;\; R = (-\infty , \infty) = \{x : -\infty < x < \infty\}$$

ومجموعة الأعداد التى أكبر من a تُسمى بالفترة (a , ∞)

بينما مجموعة الأعداد التى أصغر من a تُسمى بالفترة $(-\infty , a)$

ومن ذلك فإن مجموعة كل الأعداد الحقيقية هى الفترة $(-\infty , \infty)$ والفترة سواء كانت مفتوحة أو مغلقة يُطلق عليها بمصطلح واحد " الفترة " .

١-١١ :-المقادير المتغيرة والمقادير الثابتة Variables and Constants :-

المقدار المتغير هو المقدار الذى يمكن أن يأخذ قيما مختلفة فى المسألة المطروحة فى حين أن المقدار الثابت يظل محتفظاً بنفس قيمته تحت نفس شروط المسألة وقد يكون المقدار الثابت فى مسألة مطروحة هو مقدار متغير فى مسألة أخرى وفى التعبيرات والصيغ الجبرية فإنه تُستعمل رموزاً للتعبير عن المقادير أو الأعداد ، بعضها يمثل مقدار متغير وبعضها يمثل مقدار ثابت .

مثـــال (١) : لنعتبر الصيغة الرياضية الممثلة لحجم الكرة V ، $V = \frac{4}{3} \pi \; r^3$

حيث r = نصف القطر فإن :

(١) كل من r , V متغيران بتغير حجم الكرة ويطلق عليهما بالمتغيرات

(٢) كل من π , $\frac{4}{3}$ مقادير ثابتة مهما كان حجم الكرة

مثـــال (٢) : فى حالة سقوط جسم من وضع السكون فإن العلاقة المعبرة عن المسافة المقطوعة فى أى لحظة هى :- $S = \frac{1}{2} \; gt^2$

حيث تُمثل S ؛ المسافة المقطوعة فى الزمن t ، g = عجلة الجاذبية الأرضية . فإن :

(١) كل من t , S عبارة عن مُتغيرات

(٢) g , $\frac{1}{2}$ مقاديـــر ثابـــتة

١-١٢ :-المتغير التابع والمتغير المستقل

-: Dependent and independent variables

ويمكننا أن نلاحظ من المثـالين السـابقين أن هنـالك نوعـين مـن المتغيرات ففـى حالـة : $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ فإنه بزيادة أو نقص r ، فإن الحجم V يزيد أو ينقص على الترتيب أى أن التغير فى V يعتمد على التغير فى r .

وفى حالة :- $S = \frac{1}{2} gt^2$ فإن مسافة السقوط S تعتمدعلى الزمـن t وعموما فإنه فـى كل الصيغ والعلاقات الرياضية ، هنالك نوعين من المتغـيرات ، المتغير المسـتقل والمتغـير التابع :-

(١) فالمتغير الـذى تعتمـد قيمتـه علـى قيمـة ومقـدار متغـير آخـر يعـرف بـالمتغير التـابع dependent Variable مثل V فى مثالنا السابق عن الكرة .

(٢) والمتغير الذى يؤدى التغير فى قيمته إلى قيم مناظرة فى المتغير الآخر ، يُعرف بالمتغير المستقل مثل t , r فى الأمثـلة السـابقة .

وعند التعبير عن معادلة من الدرجة الثانية فى صورتها العامة فإن :- $y = ax^2 + bx + c$ فإن كل من a , b , c ثوابت تُستخدم لتحديد مدى العلاقة بين x , y فـى حـين أن x هى المتغير المستقل " الذى يبدأ فى التغير " وينتـج عـن هـذا التغير ، تغير منـاظر فـى y ولذلك فإن y هى المتغير التابع .