الباب الثالث

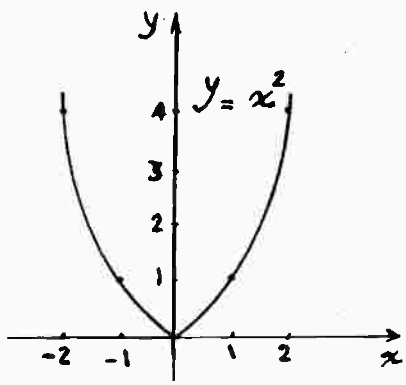
التغير فى الدوال ـ النهايات

٣-١ :- التغير فى الدوال :-

علمنا من تعريف الدالة أنه عندما تتغير قيمة المتغير المستقل x فإن قيمة الدالة تتغير بالتبعية .

وسوف نتعرض فيما يلى لبعض الأمثلة لإيضاح كيفية تغير الدوال ، وسوف يساعد الرسم البيانى كثيراً فى إيضاح هذه التغيرات .

ولنبدأ بالدالة الشهيرة : $y = f(x) = x^2$ ، انظر شكل (٣-١)



شكل (٣-١)

ويتضح من الشكل كيفية تغير الدالة فى الحدود التى يتغيرها المتغير المستقل $(-3 \le x \le 3)$ على المحور XOX وتتغير قيمة الدالة على المحور OY .

وبدراسة المنحنى يتضح الآتى :-

(١) بزيادة قيم X باستمرار من القيم السالبة إلى الصفر ، فإن قيم Y تكون موجبة وتتناقص إلى الصفر عند نقطة الأصل .

(٢) بزيادة قيم X بدءاً من الصفر فى مدى القيم الموجبة فإن Y تزداد كذلك وتكون موجبة .

(٣) عند نقطة الأصل ، تميل Y إلى أن تنعدم ثم تبدأ فى الزيـــادة ويُطلق على هــذه النقطة بنقطة تحول Turning point على المنحنى .

(٤) إذا ما فرضنـا أن x ازدادت بــدون حدود فإن y تـزداد كذلـك بــدون حـدود ولقيم x السالبة ، فإنه بنقص قيمة x بدون حدود فإن y تزداد بدون حدود أيضاً .

مثــال آخــر :- دراسة التغير فى الدالة $y = \frac{1}{x}$

(١) عند زيادة قيمة المقام بزيادة قيمة x فإن قيمة الكسر أو قيمة y تقل .

(٢) عند نقص قيمة المقام بنقص قيمة x فإن قيمة الكسر أو قيمة y تزداد . وبذلك فإنه فى هذه الدالة :-

أ) إذا كانت x كبيرة جداً ولنقل 10^{10} ، فإن y تُصبح عدداً صغيراً جداً .

ب) إذا كانت $x = \left(10^{10}\right)^{20}$ مثلاً ، فإن قيمــة y تُصبح عدداً متناهى فى الصغر .

ويُطلق على مثل هذه الأرقام أو الكميات (المتناهية فى الصغر والمتناهية فى الكبر ، فى الرياضيات بأنها أرقام محدودة Finite) .

فإذا ما تخيلنا أن x قد ازدادت وبدرجة تُصبح معها أكبر من أى عدد ممكن التعبير عنه رياضياً فإننا نقول حينئذ أن x قد ازدادت بدون حدود ويقال حينئذ أنها تقترب مــن اللانهاية والتى نعبر عنها رياضياً بالرمز ∞ .

[ولاتعنى ∞ أنها رقم معين يمكن التعامل معه كالمعتاد ، فقسمة هذا الرقم على أى رقم مُعين أو ضربه فى هذا العدد تُبقى على قيمته كما هى أى ∞] .

ويتضح مما سبق أنه عندما تُصبح x ذات قيمة لانهائية فى الكبر فإن الدالة $\frac{1}{x}$ يمكن التعبير عنها فى الصورة $y = \frac{1}{\infty}$ وهى مقـدار متنـاهى فـى الصغـر ، ويطلـق علـى هـذا المقدار المتناهى فى الصغر بالصفر $0 - zero$.

[ومن هنا يجب أن لا نتعامل مع الصفر كرقم ولكن ككمية متناهية فى الصغر ، غيــر محدد مدى صغرها .]

وعملية الضرب فى هذه الكمية المتناهية فى الصغر تؤدى إلى الناتج صفر أيضاً وقسمة هذه الكمية المتناهية فى الصغر على أى عدد محدود لا تعنى غير الصفر كذلك .

فإذا ما قسمنا عدد محدد على الصفر ، مثلاً الدالة $y=\frac{1}{x}=\frac{1}{0}$

فإن هذا يعنى قسمة الواحد على كمية متناهية فى الصغر فتكون الإجابة ، كمية متناهية فى الكبر $i.e.=\frac{1}{0}=\infty$.

ويمكن تلخيص ما سبق كالتالى :-

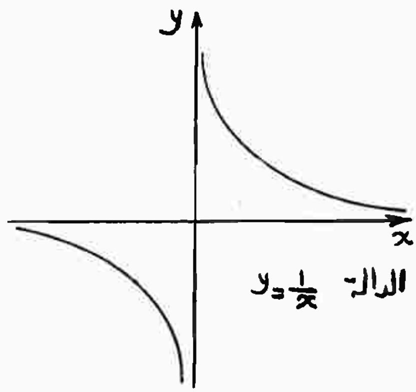
$$\text{when} \quad x \to \infty \qquad \therefore \frac{1}{x} \to 0$$

$$, \text{when} \quad x \to 0 \qquad \therefore \frac{1}{x} \to \infty$$

ونفس التحليل السابق صحيح إذا كانت قيمة البسط خلاف الواحد كأن تُصبح $= a$ ، حيث a عدد محدود موجب أو سالب أو كسر $i.e.\ y=\frac{a}{x}$

ويمكن إيضاح التحليل السابق برسم منحنى الدالة $y=\frac{1}{x}$

أنظر الرسم شكل (٣-٢) .



شكل (٣-٢)

وقد قمنا برسم الدالة كالمعتاد بفرض قيم مناسبة لـ x ثم نحسب القيم المقابلة لها y وتدوينها بجدول فنحصل على المنحنى المبين بالشكل .

ويُعرف هذا المنحنى بمنحنى القطع الزائد hyperbola وهو يتكون من فرعين بنفس الشكل ، مناظرين لقيم x الموجبة والسالبة أى أن أحد الفرعين فى الاتجاه الموجب لمحور السينات والفرع الآخر فى الاتجاه السالب لمحور السينات .

فإذا ما اعتبرنا الفرع الموجب للمنحنى سنجد :-

(١) بزيادة قيم x تتناقص قيمة y ويقترب المنحنى من محور X وعندما تقترب x من اللانهاية فإن المنحنى يزداد اقتراباً حتى ينطبق مع محور x عند اللانهاية .

وبالتعبير الهندسى فإن محور OX يُعتبر كمماس للمنحنى عند نقطة اللانهاية .

(٢) عند قيم x فيما بين $0 , 1$ فإن المنحنى يقترب من محور Y وبنفس الطريقة فإن المحور OY يُعتبر كمماس للمنحنى عند اللانهاية ويُطلق على الخط المستقيم الذى يلاقى المنحنى عند اللانهاية وبذلك يكون كمماس للمنحنى عند اللانهاية بأنه الخط المُقارب للمنحنى Asymplote .

وبذلك فإن محورى الإحداثيات OX , OY هما خطى تقارب المنحنى $y = \frac{1}{x}$ (الفرع الأيمن) .

ونفس التحليل ينطبق على الفرع السالب للمنحنى ويُصبح محورى الإحداثيات OX' , OY' هما خطى تقارب الفرع السالب للمنحنى .

وبذلك فإن كلاً من $X'oX , Y'OY$ هما خطى تقارب المنحنى $Y = \frac{1}{x}$

ويلاحظ التالى على المنحنى :-

لكل قيم X من $-\infty$ إلى $+\infty$ فإن قيمة y تتناقص دائماً ، إلا أن التغير المفاجئ من $-\infty$ إلى $+\infty$ يحدث عند مرور X بنقطة الصفر وهى حالة قيد الاعتبار فيما بعد .

مثـال آخـر :- $y = \tan x$

٣-٢ :- النهـــايات Limits

إذا كان لدينا دالة كسرية فى x وكان كل من البســط والمقـام يحتــوى علـى المتغير المستقل x وبفرض أن كل منهما يقترب من اللانهاية عندما تقـترب x مـن اللانهايـة فإن الكسر يأخذ الصورة $\frac{\infty}{\infty}$

فمثـــلاً إذا كان :-

$$f(x) = \frac{3x}{x+4}$$

فإن كلا من البسط والمقام يُصبح لانهائى عندما تُصبح x لانهائية .

والســؤال الذى يطرح نفسه الآن ، ماذا يعنى المقدار $\frac{\infty}{\infty}$

فإذا ما قسمنا كل من البسط والمقام على x :

بعد القسمة على x ؛ $\therefore f(x) = \frac{3x}{x+4} = \frac{3}{1+\frac{4}{x}}$

فإذا ما اقتربت x من ∞ فـــإن $\frac{4}{x} \rightarrow 0$

وبذلك فإن الكسر تقترب قيمته من $\frac{3}{1+0}$ أى من 3

وبذلك فإن $\frac{3x}{x+4}$ تقترب من القيمة المحددة 3 عندما تقترب x من ∞

ولذلك فإننا نُطلق على 3 بأنها النهاية التى يقترب منها المقدار الكسرى $\frac{3x}{x+4}$ عندما تقترب x من اللانهاية .

وتُعرف بقيمة النهاية Limiting Value أو نهاية الدالة Limit of the function .

وتستخدم الرموز التالية للتعبير عن نهاية الدالة $\frac{3x}{x+4}$:

$$\underset{x \to \infty}{Lt} \frac{3x}{x+4} = 3$$

ويرمز للقيمة التى تقترب منها x بالرمز $\infty \leftarrow x$ وتوضع تحت الرمز Lt وفكرة النهاية ذات أهمية كبيرة جداً ، ليس فقط فى حساب التفاضل ولكن فى كل الصيغ الرياضية بالرياضيات العالية .

نهاية الدالة على الصورة $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ، $\frac{0}{0}$:

لنعتبر الدالة :- $$f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$$

ويمكننا إيجاد قيمة الدالة لأى قيمة لـ x ولكن إذا اعتبرنا $x = 2$ فإن قيمة كل من البسط والمقام تُصبح صفراً

ويأخذ الكسر الشكل $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ويُطلق على هذا المقدار بأنه كمية غير معينة ويُصبح من الخطأ اعتبار أن قيمة الكسر ككل = صفر

والصورة $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ فى غاية الأهمية وسوف نحلل معناها فيما يلى :-

لنعتبر قيمة x أكبر قليلاً أو أقل قليلاً من المقدار 2 :-

(١) لتكن $x=2.1$ مثلاً

$$\therefore \frac{x^2-4}{x-2}=\frac{4.41-4}{2.1-2}=\frac{0.41}{0.1}=4.1$$

(٢) نعتبر $x = 2.01$

$$\therefore \frac{x^2-4}{x-2}=\frac{4.0401-4}{2.01-2}=\frac{0.0401}{0.01}=4.01$$

(٣) نعتبر $x = 2.001$

$$\therefore \frac{x^2-4}{x-2}=\frac{4.004001-4}{2.001-2}=\frac{0.004001}{0.001}=4.001$$

ولنأخذ الآن قيماً لـ x أقل من 2 :-

(٤) نعتبر $x = 1.9$

$$\therefore \frac{x^2-4}{x-2}=\frac{3.61-4}{1.9-1}=\frac{-0.39}{-0.1}=3.9$$

(٥) نعتبر $x = 1.99$

$$\therefore \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{3.9601-4}{1.99-1} = \frac{-0.0399}{-0.01} = 3.99$$

وبمقارنة هذه النتائج نصل إلى التالى :-

كلما اقتربت x من 2 فإن قيمة الكسر تقترب من 4 وأنه عندما تختلف قيمة x عن المقدار 2 بفارق ضئيل فإن قيمة الكسر تختلف عن المقدار 4 بفارق ضئيل كذلك . وأنه كلما قل الفارق بين 2 , x كلما قل الفارق بين قيمة الكسر ، 4 وفى النهاية ؛ عندما يصبح الفرق بين x ، 2 متناهياً فى الصغر فإن الفرق بين قيمة الكسر ، 4 يكون متناهياً فى الصغر .

ويمكن التعبير عن هذا كالتالى :-

$$as \ \ x \to 2 \quad \therefore \frac{x^2-4}{x-2} \to 4$$

وقد اتضح لنا الآن أن الدالة $\frac{x^2-4}{x-2}$ لها قيمة محددة عندما تقترب x من 2 أو بالتعبير برموز النهايات فإن :

$$\underset{x \to 2}{Lt} \quad \frac{x^2-4}{x-2} \to 4$$

ولندرس الحالة السابقة فى صورة عامة وليكن مثالنا فى هذا :-

الـدالة الكسرية : $f(x) = \frac{x^2-a^2}{x-a}$

ونوجد قيمتها عندما $x \to a$ ؛ ويجب ملاحظة أنه عندما $x = a$ فإن قيمة الكسر تصبح $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$.

وباتباع نفس الطريقة السابقة فى المثال السابق ولكن بصورة عامة :-

نعتبر $x = a + h$ حيث h تعنى كمية صغيرة متغيرة والتى تختلف قيمة x عن a بمقدارها . وبالتعويض فى قيمة الكسر :

$$\therefore \frac{x^2-a^2}{x-a} = \frac{(a+h)^2-a^2}{(a+h)-a} = \frac{2ah+h^2}{h}$$

وبقسمة كل من البسط والمقام على h (والتى ليست بالصفر)

$$\therefore \frac{x^2-a^2}{x-a}=2a+h$$

وبتناقص قيمة h فإن قيمة x تقترب من a ، أو عندما تقترب x اقتراباً نهائياً من قيمة a فإن h تقترب من الصفر .

$\therefore$ $2a+h$ تقترب من $2a$

$$i.e\ x \to a \qquad \therefore h \to 0$$

$$,\frac{x^2-a^2}{x-a} \to 2a.$$

أى أن $2a$ هى قيمة نهاية الدالة .

$$\therefore \underset{x \to a}{Lt} \frac{x^2-a^2}{x-a}=2a$$

ويتضح مما سبق أن التعبير $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ المستخدم فى الأمثلة السابقة يمكن اعتباره بأنه نسبة بين مقدارين متناهيين فى الصغر وتقترب قيمة هذه النسبة من قيمة محددة ، عندما يقترب كل من البسط والمقام من الصفر .

٣ - ٣ : - طرق حساب النهايات : -

لحساب نهاية مقدار ، نقوم أولاً بالتعويض بقيمة x التى يؤول إليها المقدار مباشرة . فإذا كانت هنالك قيمة محددة للمقدار بعد التعويض ، فإنها تعتبر نهاية المقدار المطلوبة ؛ أما إذا كانت قيمة المقدار (أو الدالة) قيمة غير معينة : $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ، $\frac{\infty}{\infty}$ فإنه يلزم اتباع أيا من الطريقتين التاليتين :

(١) التحليل للمقدار أو للدالة وذلك بتحليل كل من البسط والمقام إلى عوامله الأولية ثم نختصر العوامل المتشابهه ، ثم نعوض فى الباقى بقيمة x التى تؤول إليها .

(٢) الطريقة العامة وهذه نستخدمها فى حالة عدم تمكننا من تحليل $f(x)$ التى على الصورة الكسرية .

حيث لا نعوض بقيمة x التى تؤول لها فى الدالة ولتكن (a) ولكن نعوض بقيمة قريبة جداً منها ولتكن $(a+h)$

أو $(a+\varepsilon)$ أو $(a+\Delta)$ ثم نوجد قيمة $f(x)$ عند اقتراب h أو Δ من الصفر أى عند اقتراب x من القيمة (a) فنحصل على النهاية .

وفيما يلى أمثلة لإيضاح ما سبق : -

مثال (١) أوجد قيمة : $\underset{x\to 3}{Lt}\ f(x)=\dfrac{x+3}{x-3}$

الحل : - بالتعويض فى الدالة مباشرة عن $x=3$: -

$$\therefore \frac{3+3}{3-3}=\frac{6}{0}=\infty$$

∞ كمية معينة ومحددة ، وتعتبر نهاية لهذه الدالة عند اقتراب x من 3

مثال (٢) : - أوجد قيمة : $\underset{x\to 3}{Lt}\ \dfrac{x^2-9}{x-3}$

الحـــل :- بالتعويض فى الدالة مباشرة عن $x=3$

$$\therefore \frac{9-9}{3-3}=\frac{0}{0}$$

وهى قيمة غير معينة أو محددة وحيث أن $f(x)$ لهـا قيمـة غـير معينـة وفـى الصـورة الكسرية ، لذلك فإننا نلجأ للطريقة الأولى كما ذكرنا وهى التحليل :

البسط = $\left(x^2-9\right)=(x-3)(x+3)$

$$\therefore f(x)=\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)}=(x+3)$$

$$\therefore \underset{x\to 3}{Lt}\ f(x)=\underset{x\to 3}{Lt}\ (x+3)=3+3=6$$

مثال (٣) : - أوجد قيمة :

$$\underset{x\to 2}{Lt}\ f(x)=\frac{x^3-8}{x-2}$$

الحل : - بالتعويض المباشر : -

$$\therefore f(x)=\frac{2^3-8}{2-2}=\frac{zero}{zero}\quad at\ x=2$$

وهى قيمة غير معينة ، لذلك نقوم بتحليل كل من البسط والمقام إلى عواملهما الأولية :

$$f(x)=\frac{x^3-8}{x-2}=\frac{(x-2)\left(x^2+2x+4\right)}{(x-2)}$$

$$\therefore f(x)=x^2+2x+4$$

$$\therefore \underset{x\to 2}{Lt}\left(x^2+2x+4\right)=4+4+4=12.$$

ويحدث أحياناً أن تكون درجة البسط أعلى من درجة المقام كما فى المثال السابق .

ويمكن فى الحالة السابقة إجراء قسمة البسط على المقام فإذا حصلنا على خارج القسمة بدون باقى فإن الناتج يعتبر $f(x)$ بعد حذف المقام أى أن قسمة $\left(x^3-2^3\right)$على $(x-2)$ تعطى x^2+2x+4 وبدون باقى .

$$\therefore f(x)=x^2+2x+2$$

حيث تم حذف المقام $(x-2)$.

والآن نفترض أننا لم نتمكن من حذف أو تحليل مقدار البسط $\left(x^3-2^3\right)$ إلى عوامله الأولية : $(x-2)\left(x^2+2x+4\right)$

فإنه يمكننا استخدام الطريقة الثانية (الطريقة العامة) ، كالتالى : -

$$f(x)=\frac{x^3-2^3}{x-2}$$

نضع $x=2+h$ ، h مقدار ضئيل جداً يؤول إلى الصفر عندما تؤول x إلى 2

$$\therefore f(x)=f(2+h)$$

$$، \quad f(2+h)=\frac{(2+h)^3-2^3}{(2+h)-2}$$

$$=\frac{\left(8+12h+6h^2+h^3\right)-8}{h}$$

$$=\frac{12h+6h^2+h^3}{h}$$

وبقسمة كل من البسط والمقام على h :

$$\therefore f(2+h)=12+6h+h^2$$

ولما كانت قيمة h صغيرة جداً فإنه عندما تؤول x إلى 2 فإن h تؤول إلى صفر وبالطبع h^2 تؤول هى الأخرى للصفر

$$\therefore \underset{x \to 2}{Lt}\left(\frac{x^3-2^3}{x-2}\right)=\underset{h \to 0}{Lt}\ 12+6h+h^2=12.$$

وفى الأمثلة السابقة ، كانت قيمة $f(x)$ عند التعويض مباشرة بقيمة x فى الدالة هى $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ وهى قيمة غير معينة

إلا أنه فى بعض الأحيان تكون قيمة $f(x)$ مساوية لـ $\frac{\infty}{\infty}$ عند التعويض بقيمة x مباشرة فى الدالة .

وهنا يلزم قسمة كل من البسط والمقام.فى $f(x)$ على أعلى قوة للمتغير المستقل x كما فى الأمثلة التالية : -

مثال (٤) : - إذا كانت $f(x)=\frac{x^2}{x^2+2}$

فاوجد : $\underset{x \to \infty}{Lt}\ f(x)$

الحل : - إذا عوضنا بقيمة $x=\infty$ فإن :

$$f(x)=\frac{\infty^2}{\infty+2}=\frac{\infty}{\infty}$$

وهى قيمة غير محددة (معينة) ، هنا نقوم بقسمة كل من البسط والمقام على أعلى قوة لـ x :

$$\therefore f(x)=\frac{\left(\frac{x^2}{x^2}\right)}{\left(\frac{x^2}{x^2}\right)+\left(\frac{2}{x^2}\right)}$$

$$\therefore \underset{x \to \infty}{Lt}\ f(x)=\frac{1}{1+\frac{2}{\infty}}=\frac{1}{1+0}=\frac{1}{1}=1$$

لاحظ أن أى كمية محددة مقسومة على ∞ = صفر $\left(\frac{2}{\infty}=0\right)$

مثال (٥) : - إذا كانت : $f(x)=\dfrac{3x^2+4x-5}{4x^2-2x+3}$

فأوجد قيمة : $\underset{x\to\infty}{Lt}\ f(x)$

الحل : - بالتعويض بقيمة $x=\infty$ سنجد أن : -

$$f(x)=\frac{\infty}{\infty}$$ (وهى قيمة غير معينة)

لذلك نقوم بقسمة كل من البسط والمقام على (x^2) حيث (x^2) هى أكبر قوة للمتغير المستقل x .

$$\therefore f(x)=\frac{3+\frac{4}{x}-\frac{5}{x^2}}{4\frac{x^2}{x^2}-\frac{2x}{x^2}+\frac{3}{x^2}}$$

$$\therefore \underset{x\to\infty}{Lt}\ f(x)=\frac{3+\frac{4}{\infty}-\frac{5}{\infty}}{4-\frac{2}{\infty}+\frac{3}{\infty}}=\frac{3+0-0}{4-0+0}=\frac{3}{4}$$

ولاحظ أن أى كمية محددة مقسومة على ∞ = صفر .

٣-٤ :- نهـايـة المتتـابعـات Limit of a series

فى الأمثلة البسيطة السابقة اعتبرنا نهاية الدالة إلا أنه سبق لنا معرفة أن النهاية تستخدم كذلك فى بعض الحالات عند إيجاد مجموع متتابعة

ففى المتتابعة الهندسية (المتوالية الهندسية) Geometrical Progression ، إذا كان الأساس عدد كسرى ملائم فإن مجموع حدود المتتابعة يقترب من قيمة محددة عندما يزداد عدد الحدود كثيراً .

وتسمى هذه القيمة ، بنهاية المجموع أو مجموع المتوالية .

ولنعتبر المتوالية الهندسية التالية : S_n

$$S_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

حيث :- $a=$ الحد الأول

$n =$ عدد الحدود

$r =$ النسبة الثابتة بين الحدود (الأساس)

$S_n =$ مجموع n من الحدود

$$, \ S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r} \qquad \text{.......... (A)}$$

فإذا كانت r ، كسراً مناسباً فإن قيمة r^n تتناقص بزيادة n وبذلك فإن $r^n \to 0$

عنــدما $n \to \infty$

أى أن : $ar^n \to 0$ ، عنـــدئذ .

$$\therefore \underset{n\to\infty}{Lt} \left(\frac{ar^n}{1-r} \right) = 0$$

ويتضح من A أن S_n تقترب من $\frac{a}{1-r}$ كنهاية عندما تزداد n بلا حدود وبذلك فإن

$\frac{a}{1-r}$ تُصبح حد أو نهاية المتتالية عندما تزداد n بلا حدود

وتُعرف بمجموع المتتالية عند اللانهاية .

أما إذا كانت r أكبر من الواحـــــد الصحيح فإن قيمة الحدود تزداد بزيادة n ، وعند اقتراب n من اللانهاية فإن المجموع يقترب كذلك من اللانهاية .

ويجب أن نعلم أن هنالك أنواع متعددة من المتتابعات ولذا فإنه مــن المهــم أن نعـرف مـا يلى عن مجموع n من الحدود عند زيادة n بلا حدود :-

(١) هل يقترب المجموع من قيمة محددة .

(٢) هل يصبح ذو قيمة غير محددة .

فـإذا مـا اقترب المجمـوع من قيمة محـددة فإنه يُطلـق علـى المتتابعـة بـأنها تقاربيـة Convergent ، أما إذا أصبح المجموع لا نهائيا فإنه يُطلق عليها متباعدة divergent .

ومع بعض الاستثناءات المحدودة ، فإن معظم المتتابعات إما أن تكون تقاربية أو تباعدية.

مثـــال :- لنأخذ المتتابعة : $y_1 = 0.3 \ , \ y_2 = 0.33 \ , \ y_3 = 0.333$

، سنجد أن الحد y_n يقترب بلا حدود من $\frac{1}{3}$ بزيادة عدد الحدود وعليه فإن الكسر $\frac{1}{3}$ يُعتبر نهاية المتتابعة .

ملاحظة : تعطى الكسور العشرية ، .... , 0.33 , 0.3 قيماً أكثر دقة للكسر $\frac{1}{3}$ وبذلك فإن :

$$\underset{n\to\infty}{Lt}\ y_n = \frac{1}{3}$$

ويلاحظ أن الفرق : $\left(y_n - \frac{1}{3}\right)$ يعطى القيم التالية على التتابع :

$$y_1 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{30}\ ,\ y_2 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{300}\ ,\ y_3 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3000}$$

أى أن :

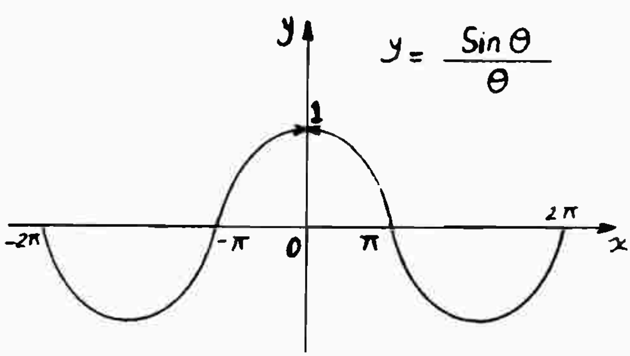
$$y_n - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3\times 10^n}$$

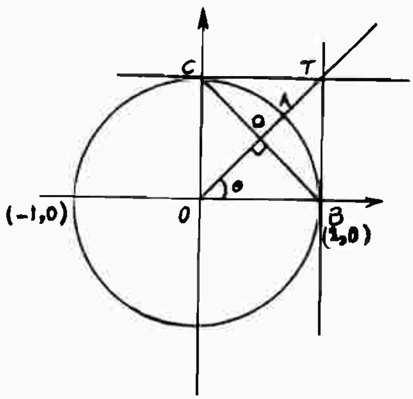
٣-٥ :- نهايات النسب المثلثية Trigonometrical limit

لنعتبر الدالة $\frac{\sin\theta}{\theta}$ ويراد إيجاد النهاية لها عندما $\theta \to 0$.

$$\underset{\theta\to 0}{Lt}\ \frac{\sin\theta}{\theta}$$

واضح من الشكل (٣-٣) أنه عندما تصغر θ جداً فإن $\sin\theta$ تصغراً جداً كذلك ، وبذلك فإنه عندما تقترب كل من θ ، $\sin\theta$ من الصفر فإن النسبة $\frac{\sin\theta}{\theta}$ تقترب من النسبة $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ونهاية هذه الكمية إيجادها كما يلى :-





شـكل (٣-٣)

ومن الشكل نعتبر O هى مركز الدائـرة التـى طـول نصـف قطرهـا مسـاوياً للوحـدة . ولنعتبـــر BAC قوس بها ، BC وتر بها ، OA نصف قطر يقطع الوتر وينصفـه فـى D وعمودى عليه وكذلك يقطع القوس BAC وينصفه .

ثم نرسم B,C مماسين للدائرة BT,CT يتقاطعان مع OA أو امتداده فى T

ولتكن زاوية $\angle AOB$ هى θ بالتقدير الدائرى

$\therefore TB+TC >$ القوس BAC

وكذلك : القوس $BAC >$ الوتر BC

$\therefore BT > arc \ BA > BD$ .... (١)

(الوحدة $=1=OB$) ، $\tan\theta = \dfrac{BT}{OB} = BT$

$$\therefore \theta = \frac{arc \ BA}{OB} = arc \ BA$$

$$\sin\theta = \frac{BD}{OB} = BD \text{ ،}$$

∴ من المعادلة (١)

$$\tan\theta > \theta > \sin\theta$$

$$\therefore \frac{\sin\theta}{\cos\theta} > \theta > \sin\theta$$

وبالقسمة على : $\sin\theta$

$$\therefore \frac{1}{\cos\theta} > \frac{\theta}{\sin\theta} > 1$$

$$\textit{But when } \theta \to 0 \quad \therefore \cos\theta \to 1$$

وبالتالى فإن : $\frac{1}{\cos\theta} \to 1$

وحيث أن : $\frac{\theta}{\sin\theta}$ تقع دائماً بين $\frac{1}{\cos\theta}$, 1

$$\therefore \textit{when } \theta \to 0 \quad , \quad \frac{1}{\cos\theta} \to 1$$

$$\therefore \frac{\theta}{\sin\theta} \to 1$$

أى أنه عندما تقترب $\theta \to 0$ فإن $\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)$ تقترب من الواحد كنهاية

$$\therefore \underset{\theta \to 0}{Lt} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

وبالمثل فإن :

$$\underset{\theta \to 0}{Lt} \frac{\tan\theta}{\theta} = 1$$

ويمكن للقارئ إثبات ذلك كما تقدم .

٣-٦ :- التوضيح الهندسى للنهاية A geometrical illustration of a limit

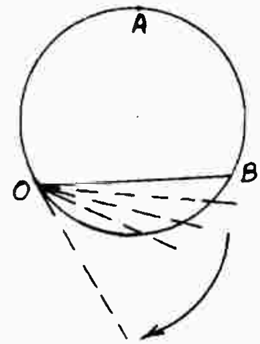
نفترض أن لدينا الدائرة OAB ، OB وتر بها يقطعها فى O,B .

فإذا افترضنا أن هذا الوتر سيأخذ فى الدوران فى اتجاه عقرب الساعة حول O فإن نقطة التقاطع B سوف تتحرك على المحيط (القوس الأصغر BO) من B إلى O حيث سيتناقص طول كل من القوس BO والوتر BO كذلك .

فإذا ما استمر الـــدوران حتى يقترب من O فإن كل من القـــوس والوتـر يتناقصـان إلى أن يُصبحا صغيران جداً.

ومن هذا فإنه فى الوضع المحدد ، عندما تتحرك B للإنطباق على O فـإن الوتـر لـــن يقطع الدائرة فى نقطة أخرى خلاف O .

أى أن الوتر يُصبح مماساً للدائرة عند O ، انظر الشكل (٣-٤)



شكل (٣-٤)

٣-٧ :- النظـريـات الأساسية للنهايات theorems on limits

سنورد فيما يلى القواعد الأساسية للنهايات ، بدون برهان :-

نظرية (١) :- إذا كان هُنالك متغيران متساويان دائماً فإن نهايتهما تكون متساوية .

نظرية (٢) :- نهاية مجموع عدد من الدوال Limit of a sum :-

نهاية حاصل جمع حدين أو ثلاثة أو أى عدد ثابت من الحدود أو الدوال تكون مساوية لمجموع نهايات كل حد من الحدود أو كل دالة من الدوال على حدة .

فإذا ما فرضنا أن كل من U, V دوال فى نفس المتغير x

$$\therefore Lt(U+V) = Lt(U) + Lt(V)$$

$$Lim(u_1 + u_2 + \ldots .. u_k) = Lt(u_1) + Lt(u_2) \ldots . + Lt \quad U_k$$

وباختصار فإن نهاية المجموع تساوى مجموع النهايات .

نظرية (٣) :- **وهى حالة خاصة من نظرية (٢)** :-

نهاية الفرق بين حدين أو دالتين ، تساوى الفرق بين نهايتى الحدين أو الدالتين :

$$Lim(U-V) = Lim(U) - Lim(V)$$

نظرية (٤) : – نهاية المقدار الثابت = المقدار ذاته : $Lt\ k = k$

نظرية (٥) :– نهاية حاصل الضرب Limit of product

نهاية حاصل ضرب حدين أو ثلاثة أو أى عدد ثابت من الحدود تساوى حاصل ضرب نهايات هذه الحدود .

$$Lt(u_1 u_2 \ldots\ldots u_n)\ Lt(u_1) \times Lt(u_2) \times \ldots \times Lt(u_n)$$

نظرية (٦) :– وهى حالة خاصة من نظرية (٤) :–

نهاية حاصل ضرب عدد ثابت × حد (أو دالة) = الثابت مضروباً فى نهاية الحد أو الدالة $Lt\ ku = k\ Lt(u)$

حيث k عدد ثابت ، u الدالة .

نظرية (٧) :– نهاية خارج قسمة حدين أو دالتين Limit of a quotient

نهاية خارج قسمة الحدين أو الدالتين تساوى خارج قسمة نهايات الحدين أو الدالتين على أن لا يكون نهاية المقسوم عليه مساوية للصفر :–

$$Lt\left(\frac{u}{v}\right) = Lt(u) \div Lt(v)$$

مالم تكن $unless\quad Lt(v) = zero$

نظرية (٨) :– $$Lim\ \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}$$

وذلك لجميع قيم n

٣–٨ :– نهايات خاصة :–

إذا كانت الزاوية θمُقاسة بالتقدير الدائرى (زاوية نصف قطرية)

$$\therefore \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1 \qquad , \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = zero$$

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e \qquad , \lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{Lnx} = 1$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \qquad , \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

٣ – ٩ : – أمثلة محلولة : –

ملاحظة :– من المفيد رسم الدالة حيث أنه يمكن عادة من الرسم استنتاج ما إذا كان للدالة نهاية أم لا .

مثال (١) اوجد نهاية الدالة :

$$f(x) = 5x^3 + 4x^2 - 7x + 6$$

عندما $x = 1$

الحل :–

$$\lim_{x\to 1} 5x^3 + 4x^2 - 7x + 6$$

$$= \lim_{x\to 1} 5x^3 + \lim_{x\to 1} 4x^2 - \lim_{x\to 1} 7x + \lim_{x\to 1} 6$$

$$= 5\times 1^3 + 4\times 1^2 - 7\times 1 + 6$$

$$= 5 + 4 - 7 + 6 = 8$$

مثال (٢) إذا كانت $f(x) = \dfrac{x^2\sqrt{x-3}}{x+7}$

فاوجد نهاية $f(x)$ **عندما** $x = 7$

الحل :–

$$\lim_{x\to 7} \frac{x^2\sqrt{x-3}}{x+7} = \frac{\lim\limits_{x\to 7} x^2 \times \lim\limits_{x\to 7} \sqrt{x-3}}{\lim\limits_{x\to 7} x + \lim\limits_{x\to 7} 7}$$

$$= \frac{7^2 \times \sqrt{7-3}}{7+7} = \frac{49\times\sqrt{4}}{14} = \frac{49\times 2}{14}$$

$$= 7$$

مثال (٣) إذا كانت $f(x) = \dfrac{x+2}{x-4}$ **فاوجد قيمة** $\lim\limits_{x\to 7} f(x)$.

الحل :–

$$\lim_{x\to 7} \frac{x+2}{x-4} = \lim_{x\to 7} x + 2 \div \lim_{x\to 7} x - 4$$

$$= 7 + 2 \div 7 - 4$$

$$= 9 \div 3 \quad = 3$$

ملاحظة :- إذا كانت نهاية المقسوم عليه تساوى صفر فى حين أن نهاية المقسوم غير مساوية للصفر فإن خارج القسمة له نهاية غير محدودة .

مثال (٤) إذا كانت $f(x)=\dfrac{x+4}{x-2}$

فأوجد قيمة $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

الحـــل :-

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}(x+4)\div\lim_{x\to 2}(x+2)$$

$$=(2+4)\div(2-2)=\frac{6}{0}=\infty$$

مثال (٥) أوجد قيمة $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^n-a^n}{x-a}$

الحـــل :-

" حل هذا المثال يعتبر برهان للنظرية رقم (٨) من نظريات النهايات "

لنعتبر $x=a+h$ حيث h مقدار صغير جداً

$$\therefore \frac{x^n-a^n}{x-a}=\frac{(a+h)^n-a^n}{(a+h)-a}$$

وبفك المقدار $(a+h)^n$ بنظرية ذات الحدين Binominal theorem

$$\therefore \frac{x^n-a^n}{x-a}=\frac{\left\{a^n+na^{n-1}h+\dfrac{n(n-1)}{\underline{|2}}a^{n-2}h^2+\ldots\ldots\right\}-a^n}{h}$$

$$=na^{n-1}+\frac{n(n-1)a^{n-2}h}{\underline{|2}}+\ldots\ldots$$

ولكن حيث أن $x=a+h$ فإنه عندما تقترب x من a فإن h تقترب من الصفر .

$i.e\ \ at\ \ x\to a \qquad \therefore h\to 0$

$\therefore$ النهاية تُصبح

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=\lim_{x\to a}\left\{na^{n-1}+\frac{n(n-1)}{\underline{|2}}a^{n-2}h^2+\ldots\ldots\right\}$$

$$=na^{n-1}\quad,\quad[h\to 0]$$

وذلك لأن بقية الحدود تحتوى على المقدار h وبقوى متزايدة وعند اقتراب x من a فإن $h=0$ وباختصار فإنه عندما $x=a$ فإن كل الحدود المحتوية على h تتلاشى .

مثال (٦) أوجد نهاية الدالة :-

$$f(x)=\frac{x-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{x-4}}$$

عندما $x=3$

الحـــل :-

يلاحظ أن كلاً من البسط numerator والمقام denominator يتلاشى عند $x=3$

وبالتالى فإن الدالة تأخذ الصورة $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$.

وبحذف الجذور rationalising من المقام :

$$\therefore \frac{x-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}=\frac{(x-3)\left[\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}\right]}{\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}\right)\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}\right)}$$

$$=\frac{(x-3)\left[\sqrt{(x-2)}+\sqrt{(4-x)}\right]}{(x-2)-(4-x)}=\frac{(x-3)\left[\sqrt{(x-2)}+\sqrt{4-x}\right]}{2(x-3)}$$

$$=\frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}}{2}$$

وبذلك فإن النهاية عندما $x=3$ تُصبح :

$$\frac{\sqrt{3-2}+\sqrt{4-3}}{2}=\frac{1+1}{2}=\frac{2}{2}=1$$

مثال (٧) أوجد قيمة :

$$\lim_{x\to 2} x^2-5x+3$$

الحـــل :-

$$\lim_{x\to 2} x^2-5x+3=\lim_{x\to 2} x^2+\lim_{x\to 2}(-5x)+\lim_{x\to 2} 3$$

$$=\left(\lim_{x\to 2} x\right)\left(\lim_{x\to 2} x\right)+\left(\lim_{x\to 2} -5\right)\left(\lim_{x\to 2} x\right)+\left(\lim_{x\to 2} 3\right)$$

$$=2\times 2+\ -5\times 2+3=4-10-+3=-3$$

مثال (٨) أوجد قيمة :

$$\lim_{x\to -1}\frac{(x+5)(3x-2)}{x^2-3x+1}$$

الحـــــل :-

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\frac{\lim\limits_{x\to -1}(x+5)\times \lim\limits_{x\to -1}(3x-2)}{\lim\limits_{x\to -1}\left(x^2-3x+1\right)}$$

$$=\frac{(-1+5)\times(3\times -1-2)}{(-1)^2-3(-1)+1}=\frac{4\times(-5)}{5}=-4$$

مثال (٩) أوجد قيمة :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4+2x^2-3}{4x^4-2x^3+2x}$$

الحـــــل :-

بالتعويض مباشرة بقيمة x نجد أن كلاً من البسط والمقام يعطى الكسر $\frac{\infty}{\infty}$ ،

لذلك نقسم على أعلى قوة x^4

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{2}{x^2}-\frac{3}{x^4}}{4-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^3}}$$

وذلك بالقسمة على x^4

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}3+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x^2}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-3}{x^4}}{\lim\limits_{x\to\infty}4+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x^3}}$$

$$=\frac{3+0-0}{4-0+0}=\frac{3}{4}$$

مثال (١٠) أوجد قيمة :

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{9+h}-2}{h}$$

الحـــــل :-

$$\lim_{h\to 0} f(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{9+h}-2}{h}\times\frac{\sqrt{9+h}+2}{\sqrt{9+h}+2}$$

وذلك بالضرب فى المرافق ؛

$$= \lim_{h\to 0} \frac{9+h-4}{h\left(\sqrt{9+h}+2\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{5}{\sqrt{9+h}+2}$$

$$= \frac{5}{\sqrt{9}+2} = \frac{5}{3+2} = \frac{5}{5} = 1$$

مثال (١١) أوجد قيمة

$$\lim_{a\to 0} \frac{\sin a}{\sqrt{a}}$$

الحـــل :-

$$\lim_{a\to 0} \frac{\sin a}{\sqrt{a}} = \lim_{a\to 0} \frac{\sin a \, . \sqrt{a}}{\sqrt{a} \, . \sqrt{a}}$$

$$= \lim_{a\to 0} \frac{\sin a}{a} \times \lim_{a\to 0} \sqrt{a}$$

$$= 1 \times Zero = Zero$$

وقد سبق بيان أن : $\lim_{a\to 0} \frac{\sin a}{a} = 1$

مثال (١٢) أوجد

$$\lim_{x\to 3} f(x) = 3x - 7$$

الحـــل :-

بالتعويض فى الدالة $f(x)$ مباشرة بقيمة $x = 3$

$$\therefore f(x) = 3 \times 3 - 7 = 2$$

$$\therefore \lim_{x\to 3} (3x-7) = 2$$

مثال (١٣) أوجد قيمة

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x+2}$$

الحـــل :-

بالتعويض المباشر فى الدالة عن قيمة $x = 3$ سنجد أن :

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x+2} = \frac{3^2-9}{3+2} = \frac{0}{5} = 0$$

وهى النهاية المطلوبة .

مثال (١٤) أوجد قيمة

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-8}{x+4}$$

الحـــــل :-

بالنسبة للبسط فقط ، سنقوم بحساب النهاية كالتالى :-

$$\lim_{x\to 2} \left(x^2-8\right) = 2^2-8 = -4$$

وبالنسبة للمقام فقط

$$\lim_{x\to 2} (x+4) = 2+4 = 6$$

$$\therefore \lim \frac{x^2-8}{x+4} = \frac{-4}{6} = \frac{-2}{3}$$

مثال (١٥) أوجد قيمة

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \frac{1}{(x-3)^2}, x \neq 3$$

الحـــــل :-

برسم منحنى هذه الـــدالة حول $x = 3$ ، سنجد أنها تـــزداد بدون حـــد عند اقتراب x من 3

وبالتعويض المباشر نجد أن :

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{1}{0} = \infty$$

مثال (١٦) أوجد قيمة

$$\lim_{x\to 4} \frac{3x}{8-2x}$$

الحـــــل :-

بالنسبة للبسط :-

$$\lim_{x\to 4} 3x = 3\times 4 = 12$$

، بالنسبة للمقام :-

$$\lim_{x\to 4} (8-2x) = 8-2\times 4 = 8-8 = 0$$

$$\therefore \lim_{x\to 4} f(x) = \lim_{x\to 4} \frac{3x}{8-2x} = \frac{12}{0} = \infty$$

وبذلك فإن الدالة ليس لها نهاية عند $x = 4$

مثال (١٧) أوجد

$$a)\ \lim_{x\to 2^+} \frac{2x^2-3x+5}{x^2+x-6}$$

$$b)\ \lim_{x\to 2^-} \frac{2x^2-3x+5}{x^2+x-6}$$

$$c)\ \lim_{x\to 2} \frac{2x^2-3x+5}{x^2+x-6}$$

الحــــل :-

$$(a)\ \lim_{x\to 2^+} \frac{2x^2-3x+5}{x^2+x-6} = \lim_{x\to 2^+} \frac{2x^2-3x+5}{(x-2)(x+3)}$$

ونهاية البسط يمكن حسابها على انفراد بسهولة وهى تساوى :-

$$2\times 2^2-3\times 2+5=8-6+5=7$$

ولإيجاد نهاية المقام :-

$$\lim_{x\to 2^+}(x-2)(x+3) = \lim_{x\to 2^+}(x-2) \times \lim_{x\to 2^+}(x+3)$$
$$=(2-2)(2+3)=0\times 5=0$$

أى أن نهاية المقام = صفر ، وحيث أنه يقترب من الصفر من خلال القيم الموجبة $\left(x^+ : 2^+\right)$.

$$\therefore \lim_{x\to 2^+} \frac{2x^2-3x+5}{x^2+x-6} = \frac{7}{0} = +\infty$$

$$(b)\ \lim_{x\to 2^-} \frac{2x^2-3x+5}{x^2+x-6} = \lim_{x\to 2^-} \frac{2x^2-3x+5}{(x-2)(x+3)}$$

وكما سبق فى الجزء الأول (a) فإن نهاية البسط $= 7$

ولإيجاد نهاية المقام :-

$$\lim_{x\to 2^-}(x-2)(x+3) = \lim_{x\to 2^-}(x-2) \times \lim_{x\to 2^-}(x+3)$$
$$=-(2-2)(2+3)=0\times 5=0$$

ويلاحظ أن نهاية المقام تساوى الصفر أيضاً ، ولكن حيث أن المقام يقترب من الصفر من خلال القيم السالبة : $\left(x^- , 2^-\right)$

$$\therefore \lim_{x\to 2^-} \frac{2x^2-3x+5}{x^2+x-6} = (-\infty)$$

$$(c) \lim_{x\to 2} \frac{2x^2-3x+5}{x^2+x-6} = (|\infty|)$$

مثال (١٨) أوجد قيمة

$$\lim_{x\to 0} \left[x\sqrt{x-5}\right]$$

الحـــل :-

إذا إختبرنا قيمة الدالة بالتعويض المباشر عند $x=0$

$$\therefore x\sqrt{x-5}=0 \qquad\qquad if \;\; x=0$$

وعلى كل فإن هذه الدالة ليس لها قيم حقيقية لقيم x الأقل من 5 ولهذا وحيث أن x لا تقترب من الصفر فإن $f(x)$ لن تقترب من الصفر كذلك ولا توجد نهاية .

ويوضح هذا المثال أنه لا يمكننا إيجاد $\lim_{x\to a} f(x)$ بإيجاد قيمة $f(a)$ حتى ولو كانوا متساويين فى حالات كثيرة ، بل يجب أن نعتبر قيم لـ x قريبة من (a) ولكنها لا تساوى a

مثال (١٩) أوجد

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}} (\tan\theta)$$

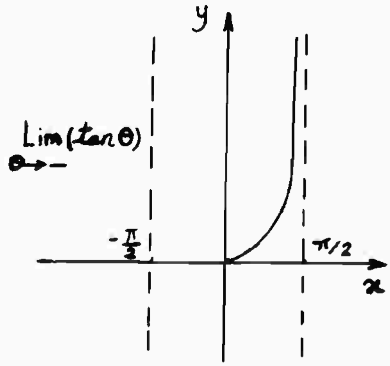
الحـــل :-

حيث أن θ تقترب من $\frac{\pi}{2}$ من جهة قيم θ الأقل من $\frac{\pi}{2}$ فإن :

$\tan\theta$ تزيد بدون حدود

ولكن عندما تقترب θ من $\frac{\pi}{2}$ من جهة قيم θ الأكبر من $\frac{\pi}{2}$ فإن $\tan\theta$ تتناقص بدون حدود . ولهذا فإن $\tan\frac{\pi}{2}$ ليس لها نهاية ولا لها قيمة عددية .

أنظر الشكل (٣-٥)



شكل (٣-٥)

مثال (٢٠) أوجد

$$\lim_{x,y\to(0,0)} \frac{x^3 - y^3}{x^3 + y^3}$$

الحــــل :-

سوف نتبع الخطوات المستخدمة فى متغير واحد وبذلك :-

$$\lim_{y\to(0)} \frac{x^3 - y^3}{x^3 + y^3} = \frac{x^3}{x^3}$$

وعند $x \to 0$ فإن $\frac{x^3}{x^3} \to 1$ وهذا يوضح بجلاء أن النهاية المطلوبة تقترب من 1

وعلى كل ، لنعتبر الحالة العكسية حيث :-

$$\lim_{y\to(0)} \frac{x^3 - y^3}{x^3 + y^3} = \frac{-y^3}{y^3}$$

فعندما $y \to 0$ فإن $\frac{-y^3}{y^3} \to -1$

وهى نتيجة مختلفة كلية عن الحالة السابقة وبالتالى فإنه لا توجد نهاية لهذه المسألة .

مثال (٢١) إذا كانت f دالة تعريفها كالتالى :-

$$f(x) = \begin{cases} x-3 & \text{if } x \neq 4 \\ 5 & \text{if } x = 4 \end{cases}$$

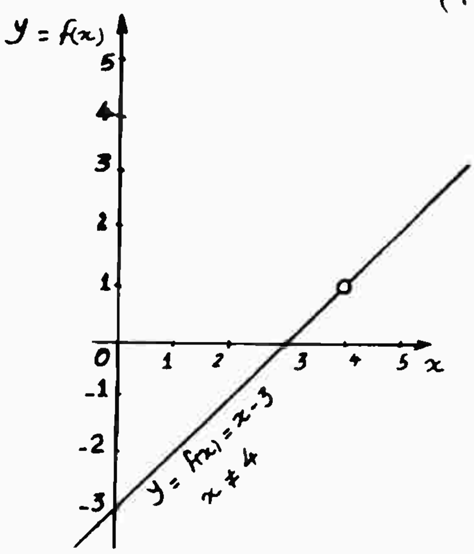
فأوجد $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$

الحـــــل :-

نرسم $f(x)$ لسهولة الإيضاح وسوف نجد أن : $f(x) = x - 3$ عبارة عن خط مستقيم لا يمر بالنقطة $x = 4$ وعند $x = 4$ فإن $f(x) = 5$ ولا تساوى (الواحد) وعلى كل؛ فعند تقدير قيمـــــــة $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$ فسوف نعتبر قيم x القريبة من 4 ولكن لا تساوى 4 وبذلك فإن :

$$\lim_{x\to 4} f(x) = \lim_{x\to 4} (x-3) = 4-3=1$$

انظر الرسم شكل (٣-٦)



شكل (٣-٦)

وفى هذا المثال :

$$\lim_{x\to 4} f(x)=1 \quad but \quad f(4)=5$$

ولذلك فإن : $\lim\limits_{x\to 4} f(x) \neq f(4)$

مثال (٢٢) أوجد

$$\lim_{x\to 0} g(x)$$

والدالة مُعرفة كالتالى :

$$g(x)\begin{cases}|X| & if \;\; X\neq 0 \\ 2 & if \;\; X=0\end{cases}$$

الحـــــل :-

يفضل هنا رسم الدالة ويلاحظ من الرسم أن الدالة غير متصلة عند $X = 0$

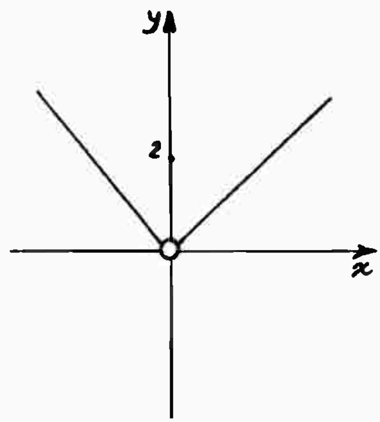
$$\therefore \lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-} (-X) = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} (X) = 0$$

ولهذا فإن $\lim_{x\to 0} g(x)$ ، موجودة وتســـاوى الصفر . كما يلاحـظ أن $g(0)=2$ إلا أن هذا ليس له تأثير على $\lim_{x\to 0} g(x)$.

وبذلك فإنه ومن تعريف النهايات فإننا نعتبر قيم X القريبة جداً مـن الصفـر ولكنهـا لا تساوى الصفر .

انظر الرسم شكل (٣-٧) .



شكل (٣-٧)

مثال (٢٣) أوجد

$$\lim_{x\to 0}\left\{\lim_{y\to 0}\frac{ax^2+bxy+cy^2}{dx^2+exy+fy^2}\right\}-\lim_{y\to 0}\left\{\lim_{x\to 0}\frac{ax^2+bxy+cy^2}{dx^2+exy+fy^2}\right\}$$

$$, ad \neq 0$$

$$, cf \neq 0$$

الحـــــل :-

يتم حل هذه المسألة على خمسة خطوات أساسية ، حيث يـلزم تحديـد النهايـات بداخـل الأقواس ثم بخارج الأقواس ثم طرح المقدارين

وسوف نبدأ بإيجاد النهاية للمقدار الذى بداخل القوس الأول :-

$$\lim_{y\to 0}\frac{ax^2+bxy+cy^2}{dx^2+exy+fy^2}$$

$$=\frac{ax^2+bx.0+c.0}{dx^2+ex.0+f.0}=\frac{ax^2}{dx^2}=\frac{a}{d}$$

ثم نوجد النهاية بخارج القوس : $\lim_{x\to 0}\left(\frac{a}{d}\right)$

وهى تساوى بالطبع $\frac{a}{d}$

ويلاحظ أن المقدار $\frac{a}{d}$ مستقل عن x ، فعند اقتراب x من الصفر فإن قيمته تبقى $\frac{a}{d}$ ، ويمكن تعريف الكسر $\frac{a}{d}$ ، فقط عندما $d\neq 0$ وحيث أنه من المسألة فإن

$ad\neq 0$ فإنه لا $a=0$ ولا $d=0$ $\leftarrow$ $\therefore d\neq 0$

وبالتالى فإن $\frac{a}{d}$ تكون مُعرّفة .

ثم نوجد النهاية لما بداخل القوس الثانى ويتم حسابه بنفس الطريقة كما سبق :-

$$\lim_{x\to 0}\left\{\frac{ax^2+bxy+cy^2}{dx^2+exy+fy^2}\right\}$$

$$=\frac{a.0+b.0.y+cy^2}{d.0+e.0.y+fy^2}=\frac{cy^2}{fy^2}=\frac{c}{f}$$

والخطوة الرابعة هى إيجاد $\lim_{y\to 0}\left(\frac{c}{f}\right)$

وهى تساوى بالطبع $\frac{c}{f}$ ويلاحظ أن $\frac{c}{f}$ مستقلة عن y ولا تعتمد عليها فعند اقتراب y من الصفر $(y \to 0)$ فإن النهاية تبقى $\frac{c}{f}$ وهى معرفة فقط عندما $f \neq 0$ وحيث أنه $cf \neq 0$ لذلك فإنه لا $c = 0$ ولا $f = 0$

وبذلك فإن $f \neq 0$ ، $\frac{c}{f}$ تكون لذلك مُعرّفة .

والخطوة الأخيرة هى أن نقوم بطرح النهايتين وتساوى :-

$$\frac{a}{d} - \frac{c}{f}$$

مثال (٢٤) أوجد

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

الحـــل :-

$$\because 1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}$$

$$\therefore \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{2 \times \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2}$$

$$\therefore \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{2}\left[\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)}\right]^2$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$$

مثال (٢٥) أوجد

$$\lim_{x \to \infty} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

الحـــــل :-

بوضع $y=\frac{1}{x}$ $\therefore at\ x\to\infty$

فـــإن : $y\to 0$

$$\therefore \lim_{x\to\infty} x\ .\ \sin\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=1$$

مثال (٢٦) أوجد

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}\right)$$

الحـــــل :-

يلاحظ أنه عند $\theta=\frac{\pi}{2}$ فإن $\theta-\frac{\pi}{2}\to 0$

$$\because \sin\theta=\cos(90-\theta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$

$$\because \cos\theta=\sin(90-\theta)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$

لذلك سنعتبر $y=\frac{\pi}{2}-\theta$

$$\therefore \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\left\{\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}\right\}=\lim_{\frac{\pi}{2}-\theta\to 0}\left\{\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}\right\}$$

$$=\lim_{y\to 0}\left\{\frac{1-\cos y}{\sin y}\right\}=\lim_{y\to 0}\left\{\frac{1-\cos y}{\sin y}\left(\frac{1+\cos y}{1+\cos y}\right)\right\}$$

$$=\lim_{y\to 0}\left\{\frac{1-\cos^2 y}{\sin y(1+\cos y)}\right\}=\lim_{y\to 0}\left\{\frac{\sin^2 y}{\sin y(1+\cos y)}\right\}$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{1+\cos y}=\frac{\sin 0}{1+\cos 0}=\frac{0}{1+1}=\frac{0}{2}=0$$

وهى نهاية هذه الدالة عند $\theta \to \frac{\pi}{2}$

٣-٩ :- الكميات المتناهية فى الصغر ، المتكافئة

يقال لكميتين متناهيتين فى الصغر ، أنهما متكافئتان إذا كانت نهاية النسبة بينهما تساوى (واحد) .

فمثلاً الكميتان $\sin x$, x متناهيتان فى الصغر عندما تؤول x إلى الصفر $x \to 0$

كما أنهما متكافئتان لأن $\underset{x \to 0}{Lim} \frac{\sin x}{x} = 1$ (كما سبق)

وكذلك الكميتان $\sin 2x$, $2x$ متكافئتان ، x^2 ، $\sin^2 x$ متكافئتان كذلك .

مثال :- الكميتان $(a^3 + 2a^4),(a^3 - 3a^4)$ متكافئتان عندما $a \to 0$

وذلك لأن :-

$$\underset{a \to 0}{Lim} \frac{a^3 + 2a^4}{a^3 - 3a^4} = \underset{a \to 0}{Lim} \frac{1 + 2a}{1 - 3a} = \frac{1}{1} = 1$$

ونرمز لتكافؤ كميتين متناهيتين فى الصغر بالرمز ~ الذى يعنى المساواة التقريبية (يساوى تقريباً) .

فمثلاً

$$a^3 + 2a^4 \sim a^3 - 3a^4$$

$$\sin^3 x \sim x^3 \quad ، \quad \sin 3x \sim 3x$$

والكميات المتكافئة هى فى واقع الأمر كميات متساوية تقريباً ويكون التساوى أكثر دقة كلما اقتربت الكميات المتكافئة من الصفر .

فمثلاً عندما تكون $(a = 0.01)$ فإن الكمية $(a^3 + 2a^4)$ تساوى (202×10^{-8}) .

فى حين أن الكمية $(a^3 - 3a^4)$ تساوى (197×10^{-8}) والفرق بينهما = 5×10^{-8} .

وهو يعادل حوالى 2.5% من إحدى الكميتين المتكافئتين . وكلما اقتربنا من الصفر كلما قلت هذه النسبة المئوية .

مثال (٢٧) أوجد $\underset{x \to 0}{Lim} \frac{\sin 2x}{x}$

الحـــل :-

نعوض بـ $2x$ بدلاً من $\sin 2x$ ككمية متكافئة عند $x \to 0$

$$\therefore \lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{2x}{x} = 2$$

مثال (٢٨) أوجد $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 7x}$

الحـــل :-

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 7x} = \lim_{x \to 0} \frac{3x}{7x} = \frac{3}{7}$$

مثال (٢٩) أوجد $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x}$

الحـــل :-

$$\because 1-\cos x = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

(كميات متكافئة) $\because \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \sim \left(\frac{x}{2}\right)^2$

$$\therefore \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^2}{x} = \frac{x^2}{2x} = \frac{x}{2}$$

$$= \frac{0}{2} = 0$$

مثال (٣٠) أوجد

$a)\ \lim_{x \to 2} (5x+2)$

$b)\ \lim_{x \to -2} \left(x^2-5x+7\right)$

الحـــل :-

حيث أن $5x+2$ كثيرة حدود فى x لذلك نعوض مباشرة عن قيمة $a)\ x=2$

$$\lim_{x \to 2} 5x+2 = 5\times 2+2 = 12$$

حيث أن x^2-5x+7 دالة كثيرة الحدود فى x لذلك نعوض مباشـرة عـن قيمـة (b)

$: \ x=-2$

$$\therefore \lim_{x \to 2} x^2-5x+7 = (-2)^2-5\times(-2)+7 = 4+10+7 = 21$$

مثال (٣١) أوجد

$$a)\ \lim_{x\to 3} \frac{3x-5}{x+1}$$

$$b)\ \lim_{x\to -2} \frac{x^2-3x-1}{x^2-1}$$

الحـــل :-

a) بالرجوع لنظريات النهايات :-

$$\therefore \lim_{x\to 3} \frac{3x-5}{x+1} = \frac{\lim_{x\to 3}(3x-5)}{\lim_{x\to 3}(x+1)}$$

ويلاحظ أن كلاً من البسط والمقام دالة كثيرة الحدود

$$b)\ \lim_{x\to -2} \frac{x^2-3x-1}{x^2-1} = \frac{(-2)^2-3(-2)-1}{(-2)^2-1}$$

$$= \frac{4+6-1}{4-1} = \frac{9}{3} = 3$$

ومما سبق يمكننا أن نستنتج النتيجة الهامة التالية :-

إذا كانت $f(x)$ كثيرة حدود :

$$\therefore \lim_{x\to a} [f(x)]^n = [f(x)]^n$$

ويتضح ذلك من المثال التالى :-

مثال (٣٢) اوجد

$$a)\ \lim_{x\to 2} (3x-2)^3$$

$$b)\ \lim_{x\to -2} \left(x^2-3x-2\right)^{-3}$$

الحـــل :-

$$a)\ \lim_{x\to 2}(3x-2)^3=(3\times 2-2)^3=4^3=64$$

$$b)\ \lim_{x\to -2}\left(x^2-3x-2\right)^{-3}=\left[(-2)^2-3\times(-2)-2\right]^{-3}=$$

$$=[4+6-2]^{-3}=8^{-3}=\frac{1}{8^3}=\frac{1}{512}$$

مثال (٣٣) اوجد

$$a)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{5x-2}{3x+4}\right)^3$$

$$b)\ \lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2+3x+28}{x^4-2x^2+3}\right)^{\frac{3}{4}}$$

الحـــــل :-

$$a)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{5x-2}{3x+4}\right)^3=\left(\frac{-2}{4}\right)^3=\left(\frac{-1}{2}\right)^3=\frac{-1}{8}$$

$$b)\ \lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2+3x+28}{x^4-2x^2+3}\right)^{3/4}=\left(\frac{1+3\times 1+28}{1-2\times 1+3}\right)^{3/4}=\left(\frac{32}{2}\right)^{\frac{3}{4}}$$

$$=(16)^{3/4}=\left(2^4\right)^{3/4}=2^3=8$$

مثال (٣٤) أوجد

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$$

الحـــــل :-

بالتعويض مباشرة نجد أن لهذه الدالة الكسرية نهاية = $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ وهنا يلزم أن نوجد معامل مشترك فى كل من البسط والمقام ثم نختصره والعامل هنا هو $(x-2)$ ويتبقى لنا بعد الاختصار دالة أخرى $g(x)$ حيث $g(x)=(x+2)$

$$,\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)}$$

$$=\lim_{x\to 2}(x+2)=2+2=4$$

أما إذا حاولنا إيجاد قيمة $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$ ووجدنا أنها تعطى الكمية غير المعينة $\frac{zero}{zero}$ فإنه يلزم أن نختصر عامل مشترك من كل من البسط والمقام مرة ثانية ، كما يتضح فى المثال (٣٥) غير أن هذه المسألة يمكن حلها باستخدام القاعدة السابق ذكرها :-

$$\lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x-a} = n\, a^{n-1}$$

والمسألة هى :

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$$

ويمكن وضعها على الصورة :-

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-2^2}{x-2}$$

حيث $a=2 \quad , \quad n=2$

والجواب هنا مباشرة يكون : $2\times 2^{2-1} = n\, a^{n-1}$

أى يساوى : $2\times 2 = 4$ كما سبق .

مثال (٣٥) أوجد $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \dfrac{x^2-4x^2-3x+18}{x^2-6x+9}$

الحـــل :-

هذه دالة كسرية كثيرة الحدود وبالتعويض مباشرة عن قيمة $x=3$ نجد أن النهاية تصبح على الصورة $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ وهى كمية غير معينة ولذلك نقوم بالتحليل لكل من البسط والمقام إلى عواملهما الأولية .

$$\therefore f(x) = \frac{(x-3)(x^2-x-6)}{(x-3)(x-3)} = \frac{x^2-x-6}{x-3}\ , x\neq 3$$

والناتج عبارة عن دالة جديدة فى x : $g(x)$

$$g(x) = \frac{3^2-3-6}{3-3} = \frac{0}{0}$$

وقد عوضنا بقيمة $x=3$ فى $g(x)$ فوجدنا أن النهاية ستكون على الصورة $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ لذلك يلزم أن نستخرج عامل مشترك آخر فى كل من البسط والمقام .

ويلاحظ أنه عبارة عن $(x-3)$ كذلك

$$\therefore g(x) = \frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)} = x+2 \quad , x \neq 3$$

$$\therefore \lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} g(x) = \lim_{x \to 2}(x+2) = 2+2 = 4$$

مثال (٣٦) : -

إذا كانت : $f(x) = 2x^3 - 5x$

فأوجد : $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

الحـــــل :-

$$\because f(x) = 2x^3 - 5x \qquad \text{.......... (1)}$$

$$\therefore f(x+h) = 2(x+h)^3 - 5(x+h)$$

$$= 2\left[x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3\right] - 5x - 5h \qquad \text{.......... (2)}$$

وبطرح (2) من (1)

$$\therefore f(x+h) - f(x) = 6x^2h + 6xh^2 + 2h^3 - 5h$$

$$= h\left(6x^2 + 6xh + 2h^2 - 5\right)$$

$$\therefore \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 6x^2 + 6xh + 2h^2 - 5 \quad , \quad h \neq 0$$

$$\therefore \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0}\left(6x^2 + 6xh + 2h^2 - 5\right) =$$

$$= 6x^2 - 5$$

Exercise "1"

على النهـــايات

(١) (أ) حدد العدد الذى تقترب منه الدالة : $\frac{1}{x-1}$ عندما تزداد x بدون حدود .

(ب) قيم x التى تكون عندها الدالة سالبة .

(جـ) حدد قيم الدالة عندما تكون قيم x كالتالى : -

$x: 3 , 2.5 , 2 , 1.75 , 1.5 , 1.2 , 1.1 , 0.5 , 0 , -1 , -2$

(د) نهاية الدالة عندما تقترب x من 1 .

(هـ) باستخدام قيم الدالة فى (جـ) ، ارسم منحنى الدالة .

(٢) (أ) أوجد قيم الدالة $\frac{4x+1}{x}$ عندما تكون قيم x : -

$x: 10 , 100 , 1000 , 1{,}000{,}000$

(ب) النهاية التى تقترب منها الدالة عندما تزيد قيمة x بدرجة كبيرة جداً .

(٣) أوجد قيمة : -

(أ) نهاية الدالة : - $\quad \underset{x\to\infty}{Lt} \frac{3x+2}{x-1}$

(ب) نهاية الدالة عند اقتراب x من 1 + .

(٤) (أ) أوجد قيم الدالة : - $\frac{x^2-1}{x-1}$ عند قيم x التالية : -

$x: 10 , 4 , 2 , 1.5 , 1.1 , 1.01$

(ب) أوجد نهاية : $\frac{x^2-1}{x-1}$ عند قتراب x من الواحد .

(٥) أوجد نهاية الدالة $\frac{2x^2+1}{x^2-1}$ عندما تقترب x من اللانهاية .

(٦) أوجد : - $\quad \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-2x}$

(٧) أوجد : - $\quad \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3-x^3}{h}$

(٨) أوجد : - $\quad \lim_{x\to\infty} \frac{x}{3x+1}$

(٩) أوجد : - $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^2+x-1}{10x^2+2x+1}$

(١٠) أوجد : - $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2+x-2}$

(١١) أوجد : - $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^3-2x^2+3}{5x-3x^2+2x^3}$

(١٢) أوجد : - $\underset{h\to 0}{Lt} \dfrac{\sqrt{x-h}-\sqrt{x}}{h}$

(١٣) أوجد : - $\underset{x\to 0}{Lt} \dfrac{\sin 7x}{x}$

(١٤) أوجد : - $\underset{x\to 0}{Lt} \dfrac{2\sin x}{3\tan x}$

(١٥) أوجد : - $\underset{x\to 0}{Lt} \dfrac{\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2}$

(١٦) أوجد : -

$a)\ \underset{x\to 2}{Lt} \dfrac{x^2-4x+1}{2x+1}$

$b)\ \underset{x\to \frac{\pi}{4}}{Lt} \dfrac{1+\sin 2x}{1-\cos 4x}$

(١٧) أوجد : - $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{x^2-3x+2}$

إرشاد : - يمكن الحل بوضع $x=2+h$ أو بتحليل المقام لمعاملاته .

(١٨) أوجد : - $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x^2-2x-3}$

(١٩) أوجد : - $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\tan x}{\sin 2x}$

(٢٠) أوجد : - $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x-\cos x}{\cos 2x}$

(٢١) أوجد : - $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$

إرشاد : افرض $x=n^6$

(٢٢) أوجد : - $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+mx}-1}{x}$

إرشاد : إفرض $1+mx=n^3$

(٢٣) أوجد : - $\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{ax}-x}{x-a}$

(٢٤) أوجد : - $\lim\frac{x}{\sqrt{1+3x^{-1}}}$

(٢٥) أوجد : - $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

(٢٦) أوجد : - $\lim_{x\to\pi}\frac{\sqrt{1-\tan x}-\sqrt{1+\tan x}}{\sin 2x}$

(٢٧) أوجد : - $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-1}{3x^2-4x}$

(٢٨) أوجد : - $\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3-7x}{1-2x^3}$

يمكن حل المسألة السابقة (٢٧) والمسألة (٢٨) بأيٍ من الطريقتين التاليتين : -

أ) القسمة على أكبر قوة لـ x بالمسألة .

ب) بفرض $x=\frac{1}{h}$.

(٢٩) أوجد : - $\lim_{x\to\infty}\frac{3x-1}{x^2+1}$

(٣٠) أوجد : - $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}-6x}{3x+1}$

(٣١) أوجد : - $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n^2+1}}{2n-1}$

(٣٢) أوجد : - $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{x^2+1}$

(٣٣) أوجد : - $\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{1-2n}$

(٣٤) أوجد : - $\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+.....+n}{\sqrt{9n^4+1}}$

(٣٥) أوجد : - $\lim_{x\to -2}\frac{3x+6}{x^3+8}$

(٣٦) أوجد : - $\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2-3x+2}{2x^2+4x+1}$

(٣٧) أوجد : - $\lim_{x\to\infty}\left[\frac{5x^2}{1-x^2}+2^{1/x}\right]$

(٣٨) أوجد : - $\lim_{x\to3}\frac{9-x^2}{\sqrt{3x}-3}$

(٣٩) أوجد : - $\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{\sqrt{3n^2+1}}$

(٤٠) أوجد : - $\lim_{x\to-1}\frac{x^2-x-2}{x^3+1}$

(٤١) أوجد : - $\lim_{x\to\pi+0}\frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x}$

(٤٢) أوجد : - $\lim_{n\to\infty}\frac{1+3+5+\ldots\ldots+(2n-1)}{1+2+3+\ldots\ldots+n}$

(٤٣) أوجد : - $\lim_{x\to7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$

(٤٤) أوجد : - $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 2x-\cos 2x-1}{\cos x-\sin x}$

فيما يلى من مسائل تذكر أن :

$$\lim_{\theta\to0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$$

فى حالة θ بالتقدير الدائرى .

$$\lim_{\theta\to0}\frac{\theta}{\sin\theta}=1$$

(٤٥) أوجد : - $\lim_{x\to0}\frac{\sin 6x}{x}$

إرشاد : - بضرب البسط والمقام فى 6 أو نعتبر $6h=\theta$

(٤٦) أوجد : - $\lim_{x\to0}\frac{\sin\frac{x}{3}}{x}$

(٤٧) أوجد : - $\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$

(٤٨) أوجد : - $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{x\sin x}$

(٤٩) أوجد : - $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$

(٥٠) أوجد : - $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\left(\frac{x}{3}\right)}{x^2}$

(٥١) أوجد : - $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin(x+h)-\sin(x-h)}{h}$

(٥٢) أوجد : - $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

(٥٣) أوجد : - $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{Tan\, x-\sin x}{x^3}$

(٥٤) أوجد : - $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^{-1} x}{x}$

إرشاد : - ضع $\tan^{-1} x=\theta$

(٥٥) أوجد : - $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{\sin^{-1}(1-2x)}{4x^2-1}$

إرشاد : - ضع $\sin^{-1}(1-2x)=\theta$

(٥٦) أوجد : - $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin 3x}$

(٥٧) أوجد : - $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos mx}{x^2}$

(٥٨) أوجد : - $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x+\tan^2 x}{x\sin x}$

(٥٩) أوجد : - $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x}$

(٦٠) أوجد : - $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}$

(٦١) أوجد : - $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\sin x}{\sec(x)-1}$

(٦٢) أوجد : - $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\cos(x+h)-\cos(x-h)}{h}$

(٦٣) أوجد : - $\lim\limits_{x\to o}\dfrac{\sin^2 x}{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}$

(٦٤) أوجد : - $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{\sin 5x}$

(٦٥) أوجد : - $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt[4]{1+2x}-1}$

(٦٦) أوجد : - $\lim_{x\to 1} \frac{\sin(1-x)}{\sqrt{x}-1}$

(٦٧) أوجد : - $\lim_{x\to \pi} \frac{\cos\frac{x}{2}}{x-\pi}$

(٦٨) أوجد : - $\lim_{x\to -2} \frac{x^2+x-2}{x^2+2x}$

(٦٩) أوجد : - $\lim_{x\to -1} \frac{x^3+1}{\sin(x+1)}$

(٧٠) أوجد : - $\lim_{x\to \infty} \frac{x-\sin x}{1-5x}$