

الباب الرابع

التغير ومعدل تغير الدالة ، والميل

change , rate of change of a function and gradients

رأينا فيما سبق أن الدالة تتغير قيمتها عندما يتغير المتغير الذى تعتمد عليه والسؤال المهم الآن هو كيفية حساب معدل التغير .

وما يهمنا هنا هو معدل التغير فى الدالة بالنسبة للتغير الحادث فى المتغير الذى تعتمد عليه .

وسوف نوضح هذا فيما يلى بمجموعة من الأمثلة مع مزيد من الإيضاح برسم الدوال المعنية .

٤ - ١ : - الحركة المنتظمة uniform motion

عندما يتحرك جسم بحيث يقطع مسافات متساوية فى فترات زمنية متساوية فإنه يقال أن الجسم يتحرك بانتظام .

فالمسافة دالة فى الزمن ومن التعريف الذى سبق لمعدل تغير الدالة فإن معدل التغير فى حالة الحركة المنتظمة يكون ثابتاً .

ولإيضاح ذلك نعتبر : -

$$S = \text{المسافة التى يتحركها الجسم} .$$

$$t = \text{الزمن المستغرق لقطع هذه المسافة} .$$

ومعروف من قوانين الحركة أن : -

$$S = Vt$$

حيث $V = \text{السرعة وهى ثابتة وهى المسافة المقطوعة فى كل ثانية} .$

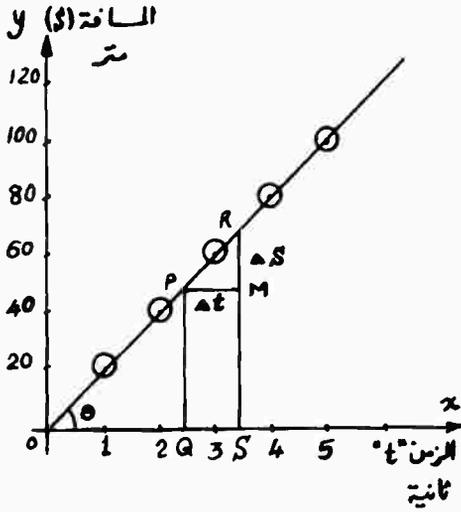
والنسبة بين المتغيرين S, t أى $\frac{S}{t}$ تكون ثابتة .

ولنعتبر المثال التالى الموضح بيانياً : -

سيارة تتحرك بحيث تقطع المسافات الموضحة بالجدول فى الأزمنة المقابلة قرين كل منها.

الزمن بالثانية t	1	2	3	4	5
المسافة بالمتري S	20	40	60	80	100

وقد حسبت هذه القراءات بدءاً من نقطة ثابتة على خط تحرك السيارة . وبتوقيع هذه النقط بيانياً والتوصيل بينها نجد أنها تقع على خط مستقيم يمثل هذه العلاقة ، انظر شكل (٤-١) .



شكل (٤ - ١)

ولنتبر كل من OQ , OS ، يمثلان فترتين زمنيتين (t) وينظر كل منهما المسافة PQ , RS

$$\therefore \frac{PQ}{OQ} = \frac{RS}{OS}$$

وهي تعادل ظل الزاوية التي يصنعها المستقيم مع الأفقى .

وهذا صحيح بالنسبة لجميع أوضاع P, R ولذلك فإن الرسم عبارة عن خط مستقيم .

ولتكن θ هي الزاوية التي يصنعها هذا الخط مع OX

i.e $\angle POQ$

$$\therefore \frac{PQ}{OQ} = \frac{RS}{OS} = \tan \theta$$

$$\therefore \frac{PQ}{OQ}$$

يُمثل ميل الخط المستقيم

ولنتعتبر PM مستقيم يوازي OX وهو يمثل الزيادة في الزمن ولتكن Δt

RM ، يُمثل الزيادة في المسافة ولتكن ΔS

$$\therefore \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{\text{الزيادة في المسافة}}{\text{الزيادة في الزمن}}$$

$$\text{ميل الخط المستقيم} = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \tan \theta$$

وعلى ذلك فإنه لأي قيم مُناظرة لـ S أو t فإنه نسبة الزيادة في المسافة بالنسبة

للزيادة في الزمن تكون ثابتة وتساوي ميل الخط المستقيم

وفي مثالنا السابق للحركة المنتظمة فإن الميل يساوى :-

$$\frac{20m}{1s} = 20m s^{-1} ، \text{ وهي تعادل سرعة السيارة .}$$

٤-٢ :- ميل الدالة الخطية Gradient of a linear function

يمكننا تعميم ما سبق كالتالى :-

لتكن y دالة في (x) أى : $y = f(x)$

والخط المستقيم الذى يمثل الدالة قد يكون فى إحدى الصورتين التاليتين :-

$$(١) \dots\dots\dots y = mx$$

وهى تُمثل خط مستقيم يمر بنقطة الأصل فإذا كانت Δy تُمثل الزيادة فى y ، Δx تمثل

الزيادة فى x

فإن $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ تكون ثابتة . وتمثل ميل الخط المستقيم وهذا الميل يُمثل بـ " m "

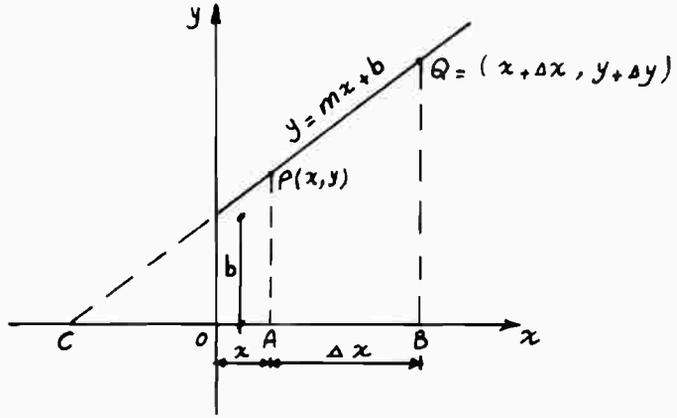
$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = m$$

وتمثل m مُعدل الزيادة فى y بالنسبة إلى x

$$(٢) \dots\dots\dots y = mx + b$$

وهى تُمثل خط مستقيم لا يمر بنقطة الأصل ولكنه يقطع مسافة b من محور y .

أنظر شكل (٤-٢)



شكل (٤-٢)

وفي الشكل ، ليكن CPQ خط مستقيم معادلته $y = mx + b$ ولتكن θ هي الزاوية التي يصنعها المستقيم مع OX ولتكن P نقطة على هذا الخط وإحداثيها (x, y)
i.e $OA = x$, $PA = y$

فإذا ما ازدادت x بمقدار Δx من OA إلى OB ، وازدادت y بمقدار Δy من AP إلى BQ

وبرسم PR موازياً للمحور OX

\therefore تكون إحداثيات Q $(x + \Delta x, y + \Delta y)$

$$i.e \quad OB = x + \Delta x \quad , \quad QB = y + \Delta y$$

وبالتعويض بهذه القيم في المعادلة :

$$y = mx + b \quad \dots\dots (1)$$

$$\therefore y + \Delta y = m(x + \Delta x) + b \quad \dots\dots (2)$$

وبطرح (1) من (2)

$$\therefore \Delta y = m(\Delta x)$$

$$\therefore m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan QCB = \tan PCA = \tan \theta$$

Gradient of the line : تمثل ميل المستقيم $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ أى أن

ومن الواضح أن إضافة الثابت b للطرف الأيمن فى المعادلة لن يؤثر فى الميل ، ففى كل

$$y = mx + b \quad , \quad y = mx$$

فإن الميل ثابت ويساوى m ويتوازى المستقيمان عند أى قيم تأخذها m

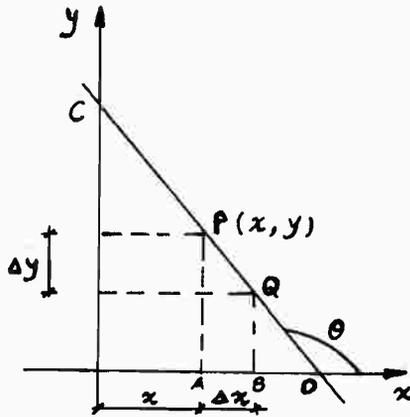
٣-٤ : - الميل السالب Negative gradient

تُقاس الزاوية التى يصنعها الخط المستقيم مع محور OX ، دائماً فى الإتجاه العكسى

لإتجاه دوران عقارب الساعة anti-clockwise

فعندما تكون هذه الزاوية أكبر من 90° ، أى من الزاوية القائمة كما فى حالة زاوية θ

التي يصنعها المستقيم CD بالشكل (٣-٤) ، فإن الميل يكون سالباً .



شكل (٣-٤)

فإذا كانت P هي النقطة التى إحداثياتها (x, y)

$$\therefore OA = X \quad , \quad AP = Y$$

فإذا ما ازدادت X بمقدار Δx فى إتجاه OB ، فإن الإحداثى الرأسى للنقطة Q

هو QB

ويرسم المستقيم RQ موازياً لـ OX ، سنجد أنه عند حركة النقطة من A إلى B فإن

الإحداثى الأفقى (السينى) سيزداد بمقدار Δx بينما يتناقص الإحداثى الرأسى (الصادى)

بمقدار ΔY (من PA إلى QB)

ويعبر عن هذا بأنها زيادة سالبة (أو نقص)

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{negative}(-ve)$$

$$\therefore \tan \theta = (-ve), \quad \text{كذلك}$$

وبذلك فإن مُعدل زيادة y بالنسبة إلى x ، يكون سالباً ويمكن تلخيص ما سبق ،
كما يلي :-

(١) إذا ازدادت y نتيجة لزيادة x فإن الميل يكون موجباً

(٢) إذا نقصت y نتيجة لزيادة x فإن الميل يكون سالباً .

٤-٤ :- ميل المنحني Gradient of a curve

نعلم أن الخط المستقيم ، هو الرسم البياني المعبر عن أى دالة من الدرجة الأولى ويكون
ميله ثابتاً عند كل نقط المستقيم

أما إذا كان الرسم البياني عبارة عن منحني فإن الميل يكون مختلفاً عند كل نقطة من
نقط المنحني ولذلك فإنه لا يلاحظ معنى الميل على المنحني حيث أنه يتغير باستمرار ،
وسوف نقوم بإيضاح ذلك فيما يلي بشئ من التفصيل :-

المنحني البياني لحركة جسم بسرعة متزايدة بانتظام :-

Body moving with uniformly increasing velocity

سبق أن بينا أن الرسم البياني الذى يصل بين المسافات والأزمنة المناظرة لجسم يتحرك
بسرعة ثابتة عبارة عن خط مستقيم

وسوف نعتبر هنا أن الجسم يتحرك بسرعة تزايدية منتظمة أى أنه فى الأزمنة المتساوية
فإن سرعته تزداد بنفس المقدار

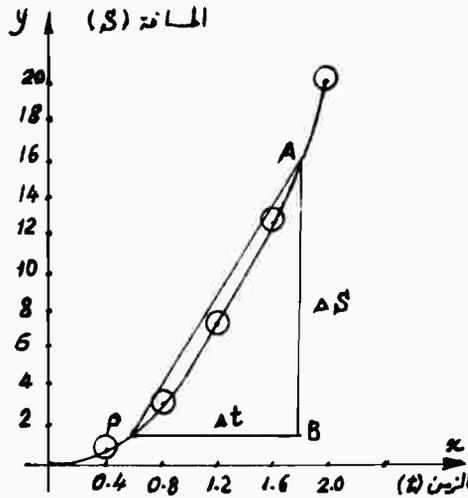
وهذا يعنى أنه فى الأزمنة المتساوية فإن المسافات المناظرة المقطوعة تكون غير متساوية .
وذلك لأنه كلما زادت السرعة فإن المسافة المقطوعة كذلك تزداد
وكلما زادت السرعة ، زادت المسافة المقطوعة.

والمثال البسيط لإيضاح ذلك ، هو الجسم الساقط فسرعته تزداد بمرور الزمن

والجدول التالي يبين المسافات المقطوعة في الفترات الزمنية المبينة لجسم يسقط سقوطاً حراً من وضع السكون

الزمن t بالثانية	0	0.4	0.8	1.2	1.6	2.0
المسافة S بالمتر	0	0.8	3.2	7.2	12.8	20.0

وبرسم هذه البيانات ، بيانياً ينتج لنا منحنى كما هو مبين بالشكل (٤-٤)



شكل (٤-٤)

وواضح أن المنحنى يميل أكثر فأكثر بانتظام مع زيادة الوقت ، أى أن نسبة المسافة للزمن تزداد أو أن السرعة تزداد .

ويعنى الشكل الإنسيابي للمنحنى أن ازدياد السرعة ثابت ولتعتبر نسبة الزيادة فيما بين المسافة والزمن في خمسة فترات زمنية كما هو موضح بالجدول التالي :

الفترة الزمنية بالثانية	0 to 0.4	0.4 to 0.8	0.8 to 1.2	1.2 to 1.6	1.6 to 2.0
المسافة بالمتر	0.8	2.4	4.0	5.6	7.2
المسافة ÷ الزمن	2	6	10	14	18

وتبين هذه النسب مُعدل السرعات للفترات المناظرة ويجب ملاحظة أن ميل الأوتار التي تصل بين النقط المتتالية على المنحنى يكون مساوياً لمعدلات السرعات .

إذا ما أخذنا نقطة P على المنحنى ورسمنا منها وترًا يقطع المنحنى عند نقطة A . ثم نرسم الإحداثي AB الذي يلاقي المستقيم PB المرسوم موازياً لمحور الإحداثيات السيني OX عند B

ولنفترض زيادة في الزمن قدرها Δt فيما بين نقطتين P, B أى أن $PB = \Delta t$

ومن الرسم فإن التغير في المسافة بين النقطتين ، يقابل المسافة $AB = \Delta S$

∴ معدل السرعة خلال هذه المرحلة = $\frac{\Delta S}{\Delta t}$. وهو يعادل ميل الوتر PA .

إذا ما تناقصت الفترة الزمنية Δt فإن المسافة المناظرة لها ΔS تتناقص كذلك ، إلا أن النسبة بينهما لا تزال تعنى معدل السرعة خلال الفترة الزمنية . وتعنى كذلك ميل الوتر PA والذي يتناقص طوله ويتلاشى تدريجياً بتناقص كل من $\Delta t, \Delta S$

إذا ما تخيلنا أن الفترة الزمنية قد تناقصت بلا حدود إلى حد متناهى فى الصغر فإن ΔS تتناقص كذلك لقيمة متناهية فى الصغر .

وعندما تصبح A قريبة جداً من P أى منطقة عليها فإن النسبة $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ تصبح قريبة جداً

من قيمة محددة ويصبح الوتر PA مماساً للمنحنى عند P ، والنهائية التي تصل إليها

النسبة $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ تكون عبارة عن ميل هذا المماس .

وهى تعنى كذلك ، السرعة عند P

وبذلك فإن السرعة عند نقطة ما هي نهاية النسبة $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ ، عندما يُصبح كل من حدى النسبة صغيراً صغراً متناهياً . وهي أيضاً ؛ أى السرعة تعنى فى ذات الوقت ميل المماس للمنحنى عند نقطة P . وبذلك فإن ميل المنحنى عند أى نقطة على المنحنى يكون مساوياً لميل المماس للمنحنى والمرسوم عند هذه النقطة .

وفى الشكل السابق ، نرسم PQ مماساً للمنحنى عند نقطة P ، PR بطول يعادل الوحدة موازياً للمحور OX ومن R نرسم RS عمودياً على PR ويلتقى PQ فى S والزاوية التى يصنعها PQ مع OX $\theta = \angle QPR$.

$$\text{وميل } PQ :- \frac{SR}{RP} = \frac{10}{1} = 10$$

∴ السرعة عند نقطة P = ميل المماس عند P وتساوى $10 \text{ m/S} = 10 \text{ ms}^{-1}$.

أى أن السرعة عند نهاية ثانية واحدة = 10 m/S .

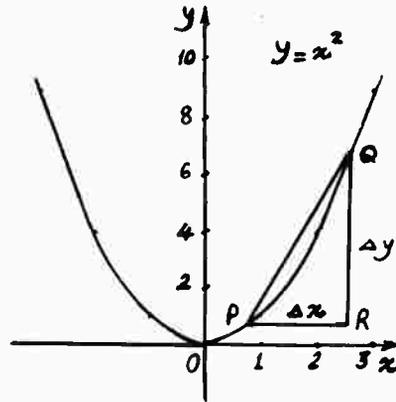
ويمكن للطالب الماهر إثبات أن الإجابة حوالى (9.8 m/s) .

ميل المنحنى $y = x^2$:-

يعتبر المنحنى $y = x^2$ من الأمثلة الشائعة والبسيطة للدوال الجبرية وهو من سلسلة المنحنيات $y = ax^2$ وللتبسيط سنعتبر $a = 1$ والطرق المتبعة هنا فى مثالنا $y = x^2$ يمكن

تطبيقها لأى منحنى حيث $a \neq 1$ [أى لأى قيمة لـ a]

والشكل التالى يوضح هذا المنحنى $y = x^2$ ، شكل (٥-٤)



شكل (٥-٤)

، لتكن P هي النقطة $(1, 1)$ ثم نرسم الوتر PQ الذي يقطع المنحنى Q ،
ثم نرسم PR موازياً للمحور OX ليلاقى الرأسى من Q في R ولتكن PR ، تُمثل

الزيادة في X فيما بين P, Q أى $\Delta x =$

ولتكن QR ، تمثل الزيادة في Y فيما بين P, Q أى $\Delta y =$

∴ ميل الوتر $PQ =$ ظل الزاوية $QPR = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

وكذلك فإن $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ تساوى معدل الزيادة في y لكل زيادة بمقدار الوحدة في x فيما

بين P, Q ، والآن :-

الدالة : $y = x^2$ (1)

وعندما تزداد x بمقدار Δx ، تزداد y بمقدار Δy كزيادة مناظرة :-

$$\therefore y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 \quad \dots\dots\dots (2)$$

بطرح (1) من (2) :

$$\therefore \Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2$$

$$\therefore \Delta y = 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$$

وبالقسمة على Δx :

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

ومن ذلك فإن قيمة $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ يمكن حسابها لأى قيمة Δx عند أى نقطة على المنحنى حيث تكون قيمة X معروفة .

وبذلك فإنه عندما $x = 1$ كما هو الحال فى النقطة P على المنحنى السابق فإن :-

$$\text{if } \Delta x = 0.3 , \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2 \times 1 + 0.3 = 2.3$$

$$\text{if } \Delta x = 0.2 , \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2 + 0.2 = 2.2$$

$$\text{if } \Delta x = 0.1 , \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2 + 0.1 = 2.1$$

$$\text{if } \Delta x = 0.01 , \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2 + 0.01 = 2.01$$

$$\text{if } \Delta x = 0.001 , \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2 + 0.001 = 2.001$$

$$\text{if } \Delta x = 0.0001 , \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2 + 0.0001 = 2.0001$$

وهذه القيم توضح ميل الوتر PQ عندما تتلاشى Δx وتتحرك Q قريباً من P ومن الواضح أن ميل الوتر يقترب من 2 ويمكننا أن نستنتج أنه عندما تتحرك Q للإلتحاق على P ويصبح الوتر مماساً للمنحنى عند P ، فإن ميل المماس $= 2$.

أى أن معدل الزيادة فى y بالنسبة لوحدة الزيادة فى x عند النقطة $P = 2$. ويمكن الوصول إلى نفس النتائج لأى نقطة على المنحنى ، إلا أن ميل كل مماس يعتمد على قيمة x عند النقطة المقام منها المماس .

وبذلك سنجد أن الميل عبارة عن دالة فى x .

فمثلاً عند نقطة على المنحنى ، إحداثيها السينى $x = 3$ ، نجد أن ميل المماس سيكون مساوياً لـ : 6 $[2x = 2 \times 3 = 6]$

[وبذلك فإن الميل عند أى نقطة على منحنى ، يمثل دالة ويكون مساوياً لميل المماس المرسوم للمنحنى عند هذه النقطة]

وهو أيضاً عبارة عن معدل زيادة الدالة لقيمة x عند هذه النقطة .

الميل السالب :- Negative gradient

فى الشكل السابق (٤-٥) ، نعتبر النقطة S على المنحنى ولها إحداثى سيني سالب ، نرسم مماس للمنحنى ونمده حتى يلاقى المحور XO ، سنجد أن الزاوية التى يصنعها هذا المماس أكبر من 90° وبالتالي فإن الميل سالب (كما سبق ذكر الميل السالب للخط المستقيم) . وهذا يعنى أن معدل الزيادة فى الدالة سالب أى أن الدالة تتناقص وبدراسة المنحنى ، نجد أنه بزيادة x خلال القيم السالبة لها من $(-\infty \leftarrow 0)$ فإن الدالة المثلثة بالمنحنى ، تتناقص من $(0 \leftarrow +\infty)$ عند نقطة الأصل .

وعند هذه النقطة ، وهى نقطة الأصل ، يكون OX مماساً للمنحنى وميل المنحنى يصبح مساوياً لميل محور السينات وهو يساوى الصفر .

Exercise 2

- (١) ارسم الخط المستقيم : $3x - 2y = 6$ ثم أوجد ميله وإذا كانت P , Q نقطتان على هذا المستقيم بحيث أن قيمة x عند Q أكبر من قيمة x عند P بمقدار 0.8 ، فبكم تزيد قيمة y عند Q عن قيمتها عند P
- (٢) أوجد ميل المستقيمتين التاليتين :-

$$a) \frac{x}{3} - \frac{y}{5} = 2$$

$$b) 3x + 4y = 12$$

$$c) \frac{x}{a} + \frac{2y}{b} = 3$$

$$d) 2x - 3y = 0$$

- (٣) إذا كان ميل أحد المستقيمتين هو 1.5 وكان يمر بالنقطة (2 , 4) فأوجد معادلته .
- (٤) إذا كانت المسافة التي يقطعها جسم يسقط سقوطاً حراً من وضع السكون تكون طبقاً للعلاقة التالية ، التقريبية :-

$$S = 4.9t^2$$

- وباعتبار الزيادة في الزمن Δt والزيادة المناظرة في المسافة ΔS ، فأوجد بالطرق السابق دراستها في هذا الموضوع ، صيغة رياضية لـ ΔS بدلالة Δt لأى قيمة لـ t .
- ومن ثم أوجد $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ ومنها إحسب معدل السرعة للفترة الزمنية التالية :-

$$(1) 2S \text{ to } 2.2S$$

$$(2) 2S \text{ to } 2.1S$$

$$(3) 2S \text{ to } 2.01S$$

$$(4) 2S \text{ to } 2.001S$$

ومن هذه النتائج استنتج السرعة عند نهاية ثانيتين .

- (٥) فى المنحنى الذى معادلته $y = x^2$ وباستخدام نفس الرموز المتقدمه فى الشرح لهذا الموضوع ، أوجد قيمة $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ عندما تزيد قيمة x من 3 إلى :-

$$3.1 , 3.01 , 3.001 , 3.0001 \text{ على الترتيب}$$

ثم استنتج ميل المماس للمنحنى عند النقطة التى إحداثيها السينى $= 3$

(٦) ارسم المنحنى الذى معادلته $y = x^3$ لقيم x فيما بين $-2, 0$

ثم أوجد صيغة لـ Δy بدلالة Δx , x ثم أوجد صيغة لـ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

ثم أوجد ميل المماس للمنحنى عند النقطة التى فيها $x = 2$ ، أكد صحة الإجابة برسم المماس للمنحنى عند هذه النقطة

(٧) الدالة : $y = \frac{1}{x}$ تمثل قطع زائد ، أوجد صيغة لـ Δy بدلالة Δx , x ثم أوجد

صيغة لـ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ وباعتبار قيم x :- 1.0001 , 1.001 , 1.01 , 1.1

فأوجد النهاية التى تقترب منها $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ عند اقتراب x من الواحد الصحيح

ثم أوجد الميل وزاوية ميل المنحنى عند نقطة $x = 1$ ، وأكد صحة الإجابة برسم المنحنى والمماس له عند هذه النقطة

(٨) أوجد ميل المماس للمنحنيات التالية ، عند $x = 1$:-

a) $y = 3x^2 - 2$

b) $y = 2x^2 + 5$

c) $y = x^3 + 3$

(٩) أوجد ميل المماس للمنحنيات التالية عند $x = 3$:-

a) $y = 2x^2 - 11$

b) $y = 3x^2 + 2$

c) $y = 5x^2 - 7$