الباب السادس

قواعد التفاضل

٦-١ :- تفاضل المجموع Differentiation of a sun

درسنا فى الأبواب السابقة تفاضل لدوال من حد واحد فيما عدا الدالة :-

$y = mx + b$ وقد علمنا كيفية إيجادها من المبادئ الأولية " طريقة Δ " ، فى هذا الباب سندرس تفاضل دوال عبارة عن مجموع لبضعة دوال " اثنين أو أكثر " فى نفس المتغير x ، مثلاً

وذلك مثل الدالة :- $y = 3x^3 + 2x^2 - 5x$

وفيما يلى طريقة إيجاد تفاضل مثل هذه الدوال .

لنعتبر كل من U , V دالة فى x ولتكن y تُمثل مجموع الدالتين :-

$$Y = U + V$$

وبذلك فإن كل من y , v , u تعتبر دوال فى x ولنفترض أن هنالك تغير فى المتغير المستقل x مقداره Δx ، وينتج عن هذا التغير ، تغير مناظر فى كل من y , u , v وليكن $\Delta y , \Delta u , \Delta v$ على الترتيب

وبذلك تُصبح y عبارة عن $y + \Delta y$

، تُصبح u عبارة عن $u + \Delta u$

، تُصبح v عبارة عن $v + \Delta v$

$\because y = u + v$ ،

$$\therefore y + \Delta y = (u + \Delta u) + (v + \Delta v)$$

وبالطرح :-

$$\therefore \Delta y = \Delta u + \Delta v$$

وبالقسمة على Δx :

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

وهذا صحيح لجميع قيم Δx ولجميع الزيادات المناظرة $\Delta y , \Delta u , \Delta v$

كما وأن نهايتهم متساوية . وعندما $\Delta x \to 0$

$$\therefore \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}\right]$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

وواضح أن نفس التحليل السابق ينطبق على مجموع أى عدد من الدوال وبذلك فإن قاعدة تفاضل الدوال المجموعة فى نفس المتغير تكون كالتالى : -

[[المعامل التفاضلى لمجموع عدد من الدوال يساوى مجموع المعامل التفاضلى لهذه الدوال]] .

أمثلة محلولة

مثال (١) : - أجر التفاضل بالنسبة إلى x للدالة :

$$y = 5x^3 + 4x^2 - 8x + 11$$

الحل : -

طبقاً لقاعدة تفاضل المجموع السابقة ،

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 5 \times 3x^2 + 4 \times 2x - 8$$

$$= 15x^2 + 8x - 8$$

مثال (٢) : - أوجد ميل المماس للمنحنى $y = x^2 - 4x + 15$

عند $x = 3$

وما هو الإحداثى السينى للنقطة التى يكون ميل المماس عندها مساوياً للصفر

الحل : -

$$\because y = x^2 - 4x + 15$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 2x - 4$$

وعندما $x=3$ فإن $\frac{dy}{dx}=2\times3-4=2$

فإذا كان الميل مساوياً للصفر ، أى $\frac{dy}{dx}=0$

$\therefore 2x-4=0 \qquad \therefore 2x=4 \quad , \quad x=2$

أى أن المماس يكون مساوياً للصفر أى موازياً لمحور السينات عندما $x=2$

مثال (٣) إذا كانت العلاقة بين المسافة S والزمن t لجسم متحرك ، كالتالى : -

$$S=40t \; - \; 8t^2$$

فاوجد $\frac{ds}{dt}$ ، ثم أوجد قيمة t عندما $\frac{ds}{dt}=8$

الحـــل : -

$$\because S \;=40t-8t^2$$

$$\therefore \frac{ds}{dt}=40-16t$$

وعندما $\frac{ds}{dt}=8$

$$\therefore 8 \;=40-16t$$

$$\therefore 16t=40-8=32$$

$$\therefore t \;=2$$

مثال (٤) أوجد المشتقة الأولى للدوال التالية : -

$a)y=2x^3-5x^2+6x$

$b)y=3x^4+2x^3-5x^2+7$

$c)y=3x\sqrt{x}+5\sqrt{x}-2$

$d)y=x^{\frac{4}{5}}-3x^{\frac{-3}{4}}+\frac{2}{x}+2x$

$e)y=x-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}$

$f)y=\left(x^{\frac{1}{3}}-3\right)\left(\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{3}{x}\right)$

الحـــل : -

$$a)\frac{dy}{dx} = 6x^2 - 10x + 6$$

$$b)\frac{dy}{dx} = 12x^3 + 6x^2 - 10x$$

$$c)\frac{dy}{dx} = 3\times\frac{3}{2}\sqrt{x} = 5\times\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{9\sqrt{x}}{2} + \frac{5}{2\sqrt{x}}$$

$$d)\frac{dy}{dx} = \frac{4}{5}x^{\frac{-1}{5}} + \frac{9}{4}x^{\frac{-7}{4}} - \frac{2}{x^2} + 2$$

$$e)\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{4}{x^3}$$

$f)$ يتم أولاً فك القوسين ويُصبح المقدار كالتالى :

$$y = 2x^{\frac{1}{3}}.x^{\frac{-1}{2}} + 3x^{\frac{1}{3}}.x^{-1} - 6x^{\frac{-1}{2}} - 9x^{-1}$$

$$= 2x^{\frac{-1}{6}} + 3x^{\frac{-4}{6}} - 6x^{\frac{-3}{6}} - 9x^{-1}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 2\times\frac{-1}{6}x^{\frac{-7}{6}} + 3\times\frac{-4}{6}x^{\frac{-10}{6}} - 6\times\frac{-3}{6}x^{\frac{-9}{6}} - 9\times -1x^{-2}$$

$$= \frac{-1}{3x^{\frac{7}{6}}} - \frac{2}{x^{10/6}} + \frac{3}{x^{9/6}} + \frac{9}{x^2}$$

مثال (٥) : -

إذا كانت $y = f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 3$

فاوجد : - (أ) : $f'(1)\ ,\ f'(0)\times f'(-1)$

(ب) : **قيم** x **التى تجعل** $f'(x) =$ صفر

الحـــل : -

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 6x - 9$$

$$\therefore f'(1) = 3(1)^2 + 6(1) - 9 = 0$$

$$\therefore f'(0) = 3(0)^2 + 6(0) - 9 = -9$$

$$\therefore f'(-1) = 3(-1)^2 + 6(-1) - 9 = -12$$

$$، \quad f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 0$$
$$\therefore x^2 + 2x - 3 = 0$$
$$\therefore (x+3)(x-1) = 0$$
$$\therefore x = 1 \quad , \quad x = -3$$

هى قيم x التى تجعل $f'(x) =$ صفر

مثال (٦) إذا كانت : $y = f(x) = ax^2 + bx + c$

حيث a,b,c **ثوابت**

وكانت $f(1) = 3$ ، $f'(2) = 2$ ، $f'(-1) = 1$

فأوجد قيم a,b,c

الحـــل : -

$$\because y = ax^2 + bx + c$$
$$\therefore y' = 2ax + b$$
$$، f(1) = 3 = a(1)^2 + b(1) + c$$
$$\therefore a + b + c = 3 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots A$$
$$، f'(2) = 2 = 2a(2) + b$$
$$\therefore 4a + b = 2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots B$$
$$، f'(-1) = 2a(-1) + b = 1$$
$$\therefore -2a + b = 1 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots C$$

بطرح (c) من (b)

$$\therefore 6a = 1 \quad , \quad a = \frac{1}{6}$$

بالتعويض فى (c)

$$\therefore -2 \times \frac{1}{6} + b = 1$$
$$\therefore b = \frac{4}{3}$$

بالتعويض عن قيم c , b فى A

$$\therefore \frac{1}{6}+\frac{4}{3}+c=3$$
$$\therefore c=1.5$$

مثال (٧) : أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال التالية : –

$$a)y=5 \quad , \quad b)y=-3x \quad , \quad c)y=x^5 \quad , \quad d)y=\frac{3}{x}$$

الحـــل : –

$$a) \quad \because y=5 \quad \therefore \frac{dy}{dx}=Zero$$
$$b) \quad \because y=-3x \;\therefore \frac{dy}{dx}=-3$$
$$c) \quad \because y=x^5 \;\therefore \frac{dy}{dx}=5x^4$$
$$d) \quad \because y=\frac{3}{x} \;\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{-3}{x^2}$$

مثال (٨) : أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية : –

$$a)y=\frac{-7}{x^2} \quad , \quad b)y=\frac{8}{x^3} \quad , \quad c)y=a\sqrt{x} \quad , \quad d)y=a\sqrt[3]{x}$$

الحـــل : –

$$a) \quad \because y=\frac{-7}{x^2}=-7x^{-2} \quad \therefore \frac{dy}{dx}=-7\times-2x^{-3}=\frac{14}{x^3}$$
$$b) \quad \because y=\frac{8}{x^3}=8x^{-3} \quad \therefore \frac{dy}{dx}=8\times-3x^{-4}=\frac{-24}{x^4}$$
$$c) \quad \because y=a\sqrt{x}=a.x^{\frac{1}{2}} \quad \therefore \frac{dy}{dx}=a.\frac{1}{2}.x^{-\frac{1}{2}}=\frac{a}{2\sqrt{x}}$$
$$d) \quad \because y=a\sqrt[3]{x} \qquad \therefore y=ax^{\frac{1}{3}}$$
$$\therefore \frac{dy}{dx}=a.\frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}=\frac{a}{3x^{\frac{2}{3}}}=\frac{a}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

مثال (٩) : أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال التالية : –

$$a) \quad y=\frac{-a}{b}\sqrt[5]{x^2} \qquad , \qquad b) \quad y=2x^{-3/4}$$

الحـــل : -

$$a)\quad \because y=\frac{-a}{b}\sqrt[5]{x^2}=\frac{-a}{b}x^{\frac{2}{5}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{-a}{b}\times\frac{2}{5}x^{\frac{2}{5}-1}=\frac{-2a}{5b}x^{\frac{-3}{5}}$$

$$=\frac{-2a}{5b}\times\frac{1}{x^{3/5}}=\frac{-2a}{5b}\times\frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}$$

$$b)\quad \because y=2x^{\frac{-3}{4}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=2\times\frac{-3}{4}\times x^{\frac{-3}{4}-1}=\frac{-3}{2}x^{\frac{-7}{4}}=\frac{-3}{2}\times\frac{1}{x^{7/4}}=\frac{-3}{2}\times\frac{1}{\sqrt[4]{x^7}}$$

مثال (١٠) أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية : -

$$a)\quad y=ax^{\frac{1}{5}}\quad,\quad b)\quad y=\frac{a}{\sqrt{x}}$$

الحـــل : -

$$a)\quad \because y=ax^{\frac{1}{5}}\quad\therefore\quad \frac{dy}{dx}=a\times\frac{1}{5}x^{\frac{1}{5}-1}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{a}{5}x^{\frac{-4}{5}}=\frac{a}{5}\times\frac{1}{x^{4/5}}=\frac{a}{5}\times\frac{1}{\sqrt[5]{x^4}}$$

$$b)\quad \because y=\frac{a}{\sqrt{x}}=\frac{a}{x^{\frac{1}{2}}}=a.x^{\frac{-1}{2}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=a\times\frac{-1}{2}x^{\frac{-1}{2}-1}=\frac{-a}{2}x^{\frac{-3}{2}}=\frac{-a}{2}\times\frac{1}{x^{3/2}}=\frac{-a}{2}\times\frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

مثال (١١) أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال التالية :-

$$a)\quad y=9x^{\frac{4}{3}}\quad,\quad b)\quad y=\frac{-5}{\sqrt[3]{x^2}}$$

$$c)\quad y=\frac{10}{\sqrt[5]{x^3}}\quad,\quad d)\quad y=\frac{2}{3}x\sqrt{x}$$

الحـــل : -

$$a)\quad \because y = 9x^{\frac{4}{3}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 9\times\frac{4}{3}\times x^{\frac{4}{3}-1} = 12x^{\frac{1}{3}} = 12\sqrt[3]{x}$$

$$b)\quad \because y = \frac{-5}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{-5}{x^{2/3}} = -5\times x^{\frac{-2}{3}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -5\times\frac{-2}{3}x^{\frac{-2}{3}-1} = \frac{10}{3}x^{\frac{-5}{3}} = \frac{10}{3}\times\frac{1}{x^{5/3}} = \frac{10}{3\sqrt[3]{x^5}}$$

مثال (١٢) : – أوجد المشتقة الأولى للدالة : –

$$y = (x-3)(2x+1)$$

الحـــل : –

نقوم بفك الأقواس فنحصل على حدود مجموعة جبرياً

$$\therefore \quad y = 2x^2 - 5x - 3$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 4x - 5$$

مثال (١٣) أوجد المشتقة الأولى للدالة : –

$$y = 3x^3 - 2x^2 + 3x + 4$$

الحـــل : –

$$\frac{dy}{dx} = 9x^2 - 4x + 3$$

مثال (١٤) أوجد المشتقة الأولى للدالة : –

$$y = x + \frac{3}{\sqrt{x}}$$

الحـــل : –

$$y = x + 3x^{\frac{-1}{2}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 1 + 3\times\frac{-1}{2}x^{\frac{-3}{2}} = 1 + \frac{-3}{2}\times\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} = 1 - \frac{3}{2\sqrt{x^3}}$$

مثال (١٥) : – أوجد المشتقة الأولى للدالة : –

$$y = 3x^2 - \frac{3}{x^2} + 1$$

الحـــل : –

$$y = 3x^2 - 3x^{-2} + 1$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 6x + 6x^{-3} = 6x + \frac{6}{x^3} = 6\left(x + \frac{1}{x^3}\right)$$

مثال (١٦) : – أوجد المشتقة الأولى للدالة : –

$$y = x\left(x^2 - \frac{3}{x^3} + \frac{4}{x^4} + \frac{5}{x^5}\right)$$

الحـــل : –

$$y = x^3 - 3x^{-2} + 4x^{-3} + 5x^{-4}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 3x^2 + 6x^{-3} - 12x^{-4} - 20x^{-5}$$

$$= 3x^2 + \frac{6}{x^3} - \frac{12}{x^4} - \frac{20}{x^5}$$

مثال (١٧) أوجد المشتقة الأولى للدالة : –

$$y = \sqrt[4]{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 4\sqrt[6]{x^5}$$

الحـــل : –

$$y = x^{\frac{1}{4}} - 2x^{\frac{2}{3}} + 4x^{\frac{5}{6}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{4}x^{\frac{-3}{4}} - \frac{4}{3}x^{\frac{-1}{3}} + \frac{10}{3}x^{\frac{-1}{6}}$$

$$= \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}} - \frac{4}{3\sqrt[3]{x}} + \frac{10}{3\sqrt[6]{x}}$$

مثال (١٨) : – أوجد المشتقة الأولى للدالة : –

$$y = \left(2x^2 + 3x - 1\right)\left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x}\right)$$

الحـــل : –

نفك الأقواس بحيث تصبح الدالة عبارة عن حدود بمجموعة جبرياً

$$\therefore y = 2x + 3\frac{-1}{x} + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3}$$

$$= 2x + 3 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 2 - \frac{1}{x^2} - \frac{6}{x^3} + \frac{3}{x^4}$$

مثال (١٩) : - أوجد المشتقة الأولى للدالة : -

$$y = \frac{7}{\sqrt{x}} - \frac{5}{\sqrt{x^3}}$$

الحـــل : -

$$y = 7x^{\frac{-1}{2}} - 5x^{\frac{-3}{2}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -7x^{\frac{-3}{2}} + \frac{15}{2}x^{\frac{-5}{2}}$$

$$= \frac{-7}{x^{3/2}} + \frac{15}{2x^{5/2}} = \frac{-7}{\sqrt{x^3}} + \frac{7.5}{\sqrt{x^5}}$$

مثال (٢٠) : - أوجد المشتقة الأولى للدالة : -

$$y = ax^2 + \frac{b}{x} - c$$

الحـــل : -

$$\frac{dy}{dx} = 2ax - \frac{b}{x^2}$$

Exercise 4

فاضل الدوال التالية فى (x) : -

(١) $y = 6x^3 + 5x^2$

(٢) $y = \frac{3}{x} + 2x$

(٣) $y = 3x^3 + x - 2$

(٤) $y = 8 + \frac{4}{x} - \frac{2}{x^2}$

(٥) $y = 4x^4 + 3x^2 - 2x$

(٦) $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x - \frac{3}{5}$

(٧) $y = x\left(3 - 2x + 2x^2\right)$

(٨) $y = 6\sqrt{x} + \sqrt{10}$

(٩) $y = 5x^2 + \frac{2}{3\sqrt{x}} + 3$

(١٠) $y = \left(\sqrt[3]{x} - \sqrt{x^3}\right)$

(١١) $y = x^4 + x^3 + x^2 + x$

(١٢) $y = \frac{2x^3}{3} + \frac{1}{2}x^2 - 5\sqrt[3]{x^2}$

(١٣) $y = \frac{7}{x^3} - \frac{5}{x^2} + \frac{3}{x} - \frac{1}{2}$

(١٤) $y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2$

(١٥) $y = \frac{\sqrt{x}}{x} - \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x}} + 2x$

أوجد قيمة $\frac{ds}{dt}$ عندما : -

(١٦) $S = ut + \frac{1}{2}at^2$

(١٧) $S = 5t + 8t^2$

(١٨) $S = 2t^2 - 3t + 8$

(١٩) أوجد $\frac{dy}{dx}$ للدالة : – $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

(٢٠) فاضل بالنسبة إلى x : – $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2$

(٢١) فاضل بالنسبة إلى x : – $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

(٢٢) فاضل بالنسبة إلى x : – $(1 + x)^3$

(٢٣) إذا كانت : –

$$y = x^{3n} - nx^3 + 7n$$

فأوجد قيمة $\frac{dy}{dx}$

(٢٤) أوجد قيمة $\frac{dy}{dx}$ عندما :

$$y = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \frac{5}{x}$$

(٢٥) أوجد ميل المماس للمنحنى : $y = 2x^2 - 3x + 1$

عندما $x = 1.5$ ، وعند أى قيمة لـ x يكون الميل مساوياً للصفر

(٢٦) أوجد قيمة x التى يكون ميل المماس للمنحنى : $y = 3(x^2 - 6)$ ، مساوياً للصفر

(٢٧) أوجد ميل المماس للمنحنى : $y = x^3 - 4x^2 - 5x + 6$ عند النقط $x = 1,2,3$

(٢٨) أوجد النقط التى عندها يكون ميل المماس مساوياً الصفر للمنحنى : –

$$y = x + \frac{1}{x}$$

٦ - ٢ تفاضل حاصل الضرب Differentiation of Product

قد يكون من السهل أحياناً ايجاد المعامل التفاضلى لحاصل ضرب بعض الكميات مثل :

$(x+2)^2$ أو $2x(5x-3)$. وذلك بأن نفك حاصل الضرب ويصبح فى صورة مجموع جبرى ، ثم نفاضل كما سبق وأن علمنا .

فمثلاً : $(x+2)^2$ تُصبح : x^2+4x+4 . وهى فى صورة مجموع وكذلك $2x(5x-3)$ تُصبح : $10x^2-6x$. وهى فى صورة مجموع أيضاً .

إلا أنه يصعب أحياناً تحويل الكميات المضروبة إلى مجموعة من الحدود بمجموعة جبرياً .

وذلك مثل المقادير التالية : -

$$x^2 \times \sqrt{1-3x} \quad , \quad x \sin x \quad , \quad \frac{x^3}{2} \times \tan x$$

والمعامل التفاضلى فى مثل هذه الحالات لا يكون مساوياً لحاصل ضرب المعامل التفاضلى لكل حد على حدة .

ولإيجاد قاعدة عامة لجميع حالات الضرب نستعرض معاً ما يلى : -

لنعتبر U,V دوال فى x ، y دالة فى U,V

أى أن $Y=U\times V$ وبذلك فإن y تعتبر كدالة فى x

$\because y=uv$ .... (1)

$\therefore y+\Delta y=(u+\Delta u)(v+\Delta v)$

$\therefore y+\Delta y=uv+u.(\Delta v)+v.(\Delta u)+(\Delta u).(\Delta v)$ .... (2)

وبطرح (1) من (2)

$$\therefore \Delta y=u.(\Delta v)+v.(\Delta u)+(\Delta u).(\Delta v)$$

وبالقسمة على Δx

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x}=u.\frac{\Delta v}{\Delta x}+v.\frac{\Delta u}{\Delta x}+\Delta u.\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

وعندما $\Delta x \to 0$ ، فإن كلاً من $\Delta u,\Delta v,\Delta y$ تقترب كذلك من الصفر

$$\therefore \underset{\Delta x\to 0}{Lt}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\underset{\Delta x\to 0}{Lt}\left(u.\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)+\underset{\Delta x\to 0}{Lt}\left(v.\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)+\underset{\Delta x\to 0}{Lt}\left(\Delta u.\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)$$

وفى النهايات ، فإنه عندما تقترب Δu من الصفر فإن الحد الأخير : $\Delta u . \frac{\Delta v}{\Delta x}$

يقترب أيضاً من الصفر .

وباستخدام رموز التفاضل :

$$\therefore \frac{dy}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

أى أن : -

(تفاضل مقدارين مضروبين فى بعضهما ، يساوى المقدار الأول مضروباً فى تفاضل المقدار الثانى + المقدار الثانى مضروباً فى تفاضل المقدار الأول)

وهذه القاعدة تصلح لأكثر من دالتين " مقدارين " فمثلاً إذا كانت : -

$$Y = U.V.W$$

وكانت كل من U, V, W وبالتبعية Y دوال فى x فإن : -

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{du}{dx} \times VW\right) + \left(\frac{dv}{dx} \times UW\right) + \left(\frac{dw}{dx} \times UV\right)$$

أمثـــــلة محلــولة

مثال (١) :-

أوجد مشتقة الدالة $y = (3x^2 + 1)(5x + 7)$

الحـــــل :-

بتطبيق القاعدة :-

$$\therefore \frac{dy}{dx} = (3x^2 + 1).(5) + (5x + 7).(6x)$$

$$= 15x^2 + 5 + 30x^2 + 42x$$

$$= 45x^2 + 42x + 5$$

مثال (٢) :-

أوجد مشتقة الدالة :- $y = (5x^3 + 2x - 1)(3x^2 - 4)$

الحـــــل :-

$$\frac{dy}{dx}=\left(5x^3+2x-1\right).(6x)+\left(3x^2-4\right).\left(15x^2+2\right)$$
$$=30x^4+12x^2-6x+45x^4+6x^2-60x^2-8$$
$$=75x^4-42x^2-6x-8$$

مثال (٣) :-

فاضل بالنسبة إلى x : $\left(x^2-3x+3\right)\left(2x^2+5\right)$

الحـــــل :- لتكن

$$y=\left(x^2-3x+3\right)\left(2x^2+5\right)$$
$$\therefore\frac{dy}{dx}=\left[\frac{d}{dx}\left(x^2-3x+3\right)\times\left(2x^2+5\right)\right]+\left[\frac{d}{dx}\left(2x^2+5\right)\times\left(x^2-3x+3\right)\right]$$
$$=\left[(2x-3)\left(2x^2+5\right)\right]+\left[(4x)(2x-3)\right]$$

ويمكن اختصار الناتج إذا رغبنا فى ذلك .

مثال (٤) :-

فاضل بالنسبة إلى x : $y=\left(x^2-2\right)(3x-1)\left(x^3+2x^2+1\right)$

الحـــــل :-

$$\frac{dy}{dx}=\left[\frac{d}{dx}\left(x^2-2\right).(3x-1).\left(x^3+2x^2+1\right)\right]$$
$$+\left[\frac{d}{dx}(3x-1).\left(x^2-2\right).\left(x^3+2x^2+1\right)\right]$$
$$+\left[\frac{d}{dx}\left(x^3+2x^2+1\right).\left(x^2-2\right).(3x-1)\right]$$
$$=2x(3x-1)\left(x^3+2x^2+1\right)+3\left(x^2-2\right)\left(x^3+2x^2+1\right)+$$
$$+\left(3x^2+4x\right)(2x)(3)$$

ويمكن اختصار النتيجة إذا رغبنا فى ذلك .

مثال (٥) :-

أوجد مشتقة الدالة : $y=\left(x^2+2\right)^3\left(x^3-4\right)^2$

الحـــــل :-

يمكن بالطبع حل هذه المسألة بفك الأقواس بحيث تُصبح y دالة كثيرة الحدود فى x إلا أن هذه عملية طويلة .

وأفضل طريقة لحل هذه المسألة هو مراعاة أنها عبارة عن حاصل ضرب قوسين وبالتالى يمكن حلها باستخدام النظرية :-

$$\frac{d}{dx}uv = u.\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

واختصاراً تكتب كالتالى :-

$$d\,u\,v = u\,d\,v + v\,d\,u$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \left(x^2+2\right)^3.\frac{d}{dx}\left(x^3-4\right)^2 + \left(x^3-4\right)^2.\frac{d}{dx}\left(x^2+2\right)^3$$

$$،\ \frac{d}{dx}\left(x^3-4\right)^2 = 2\left(x^3-4\right)\times\frac{d}{dx}\left(x^3-4\right)$$

$$= 2\left(x^3-4\right)\times\left(3x^2\right) = 6x^2\left(x^3-4\right) \qquad \ldots\ldots\ldots\ (1)$$

$$،\ \frac{d}{dx}\left(x^2+2\right)^3 = 3\left(x^2+2\right)^2\times\frac{d}{dx}\left(x^2+2\right)$$

$$= 3\left(x^2+2\right)^2\times 2x = 6x\left(x^2+2\right)^2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ (2)$$

وبالتعويض بـ (1) ، (2) فى المعادلة $\frac{dy}{dx}$:-

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \left(x^2+2\right)^3.\left(6x^2\right).\left(x^3-4\right) + \left(x^3-4\right)^2.(6x).\left(x^2+2\right)^2$$

$$= 6x\left(x^2+2\right)^2\left(x^3-4\right)\left[x\left(x^2+2\right)+\left(x^3-4\right)\right]$$

$$= 6x\left(x^2+2\right)^2\left(x^3-4\right)\left(2x^3+2x-4\right)$$

مثال (٦) :-

إذا كانت $y = \left(x^3-5\right).\sqrt{2x^2+3}$

فاوجد $\frac{dy}{dx}$

الحـــل :-

$$\frac{dy}{dx}=\left(x^3-5\right).\frac{d}{dx}\sqrt{2x^2+3}+\sqrt{2x^2+3}\;.\frac{d}{dx}\left(x^3-5\right)$$

$$،\frac{d}{dx}\sqrt{2x^2+3}=\frac{d}{dx}\left(2x^2+3\right)^{1/2}=\frac{1}{2}\left(2x^2+3\right)^{\frac{-1}{2}}.\frac{d}{dx}\left(2x^2+3\right)$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2x^2+3}}\times 4x=\frac{2x}{\sqrt{2x^2+3}}$$

$$\therefore\frac{dy}{dx}=\left(x^3-5\right).\frac{2x}{\sqrt{2x^2+3}}+\sqrt{2x^2+3}\;.\;3x^2$$

$$=\sqrt{2x^2+3}\;.\;\frac{8x^4+9x^2-10x}{2x^2+3}$$

مثال (٧) :-

إذا كانت : $f(x)=(x+2)^3\,(3x-1)^{\frac{5}{3}}$

فأوجد $f`(x)$

الحـــل :-

نستخدم قاعدة حاصل الضرب وذلك بوضع :

$$u=(x+2)^3 \qquad , \qquad v=(3x-1)^{\frac{5}{3}}$$

$$\therefore\; y=u\;.\;v$$

$$,\frac{dy}{dx}=u\;.\;\frac{dv}{dx}+v\;.\;\frac{du}{dx}$$

$$,\frac{du}{dx}=3(x+2)^2\;.(1)$$

$$,\frac{dv}{dx}=\frac{5}{3}(3x-1)^{\frac{2}{3}}\;.\;(3)$$

$$\therefore\frac{dy}{dx}=(x+2)^3\times 5\sqrt[3]{(3x-1)^2}+\sqrt[3]{(3x-1)^5}\;.\;3(x+2)^2$$

$$=(x+2)^2\,(3x-1)^{\frac{2}{3}}\;.\;5\left[(x+2)+3(3x-1)\right]$$

$$=(x+2)^2\;.\;(3x-1)^{\frac{2}{3}}\;.\;(14x+7)$$

مثال (٨) :-

أوجد المشتقة الأولى للدالة :- $y=(x+2)(x^2+1)(x-7)$

الحـــــل :-

$$\because \; y=u\,.\,v\,.\,w$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}.\,v\,.\,w+\frac{dv}{dx}.\,u\,.\,w+\frac{dw}{dx}.\,u\,.\,v$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=(1)(x^2+1)(x-7)+(2x)(x+2)(x-7)+(1)(x+2)(x^2+1)$$

$$=x^3-7x^2+x-7+2x^3-14x^2+4x^2-28x+x^3+x+2x^2+2$$

$$=4x^3-15x^2-26x-5$$

مثال (٩) :-

أوجد مشتقة الدالة :- $x=\frac{y}{a}\,.\,\sqrt{3by-y^2}$

الحـــــل :-

$$\frac{dx}{dy}=\frac{y}{a}\,.\,\frac{d}{dy}(3by-y^2)^{\frac{1}{2}}+(3by-y^2)^{\frac{1}{2}}.\frac{d}{dy}\,.\,\frac{y}{a}$$

$$=\frac{y}{a}\,.\frac{d}{dy}(3by-y^2)^{\frac{1}{2}}+\frac{(3by-y^2)^{\frac{1}{2}}}{a}$$

ثم نضـــع : $V=(3by-y^2)$

$$\therefore \frac{dv}{dy}=(3b-2y)$$

ثم نضـــع : $U=(3by-y^2)^{\frac{1}{2}}$ ومنهـــا

$$\therefore U = V^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \frac{du}{dv}=\frac{1}{2}v^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{v}}=\frac{1}{2\sqrt{3by-y^2}}$$

$$\text{،}\;\frac{dx}{dy}=\frac{y}{a}\,.\,\frac{du}{dy}+\frac{u}{a}$$

$$\therefore \frac{du}{dy} = \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{3by - y^2}} \cdot (3b - 2y)$$

$$\therefore \frac{dx}{dy} = \frac{y}{a} \cdot \frac{(3b - 2y)}{2\sqrt{3by - y^2}} + \frac{\sqrt{3by - y^2}}{a}$$

$$\therefore \frac{dx}{dy} = \frac{3by - 2y^2 + 3by - y^2}{a\left(3by - y^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{6by - 3y^2}{a\sqrt{3by - y^2}}$$

وهذه الطريقة طويلة ومعقدة ومن الأفضل وضعها فى الصورة :-

$$x = \frac{y}{a}\left(3by - y^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

ونعتبر : $U = \frac{y}{a} \quad , \quad V = \left(3by - y^2\right)^{\frac{1}{2}}$

ثم نستخدم قاعدة حاصل الضرب : $X = U \times V$

$$\therefore \frac{dX}{dY} = U.\frac{d\,V}{dY} + V.\frac{d\,U}{dY}$$

وسنصل لنفس الجواب .

Exercise "5"

فاضل الدوال التالية بقانون حاصل ضرب الدوال " وليس المجموع " .

(١) .... $(2x+1)(5x+2)$

(٢) .... $(x^2+2)\left(\frac{x}{2}+1\right)$

(٣) .... $(2x-3)(x^2+3x)$

(٤) .... $(x^2+2)(3x^2-1)$

(٥) .... $(x^2-2x)(3x^2-x)$

(٦) .... $(x^2+x-1)(x+1)$

(٧) .... $(x^2-x+1)(x-1)$

(٨) .... $(x^2+3x-2)(x^2-3)$

(٩) .... $(x^2-2)(x^2+2)$

(١٠) .... $(x^2-x+1)(x^2+x-1)$

(١١) .... $(x-5)(x^2+5x+4)$

(١٢) .... $(2x^2-3)(3x^2+2x-1)$

(١٣) .... $(x+1)(x-1)(x^2-1)$

(١٤) .... $(x+1)(2x+1)(3x+3)$

(١٥) .... $(ax^2+bx+c)(ux+5v)$

(١٦) .... $\sqrt{x}\ (2x+1)(x^2-2x+3)$

(١٧) .... $2\sqrt[3]{x^2}\ (\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)$

(١٨) .... $\sqrt[3]{x}\ .\ \sqrt[4]{x^3}\ .\ \sqrt[5]{x^2}$

(١٩) .... $ab\ x^2 \times c\sqrt{x^3}$

٦-٣ :- تفـاضل القسمة Differentiation of a quotient

علمنا فيما سبق كيفية إيجاد المعامل التفاضلى للقسمة البسيطة مثل تفاضل $\frac{1}{x}$ وذلك من المبادئ الأولية ، أى بطريقة Δ

إلا أن هذه الطريقة لا تُفيد فى الحالات الأصعب والمعقدة عن هذا المثال البسيط $\left(\frac{1}{x}\right)$

وسنقوم باستنباط قاعدة عامة لتفاضل قسمة دالتين كما يلى :-

نعتبر : $y = u \div v$

$$\therefore y + \Delta y = (u + \Delta u) \div (v + \Delta v)$$

وبالطرح :-

$$\therefore \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v}$$

$$= \frac{v(u + \Delta u) - u(v + \Delta v)}{v(v + \Delta v)}$$

وبالقسمة على Δx

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v\,(v + \Delta v)}$$

فإذا ما آلت Δx إلى الصفر $(\Delta x \to 0)$ فإنه وبالتبعية ، تؤول كل من Δu , Δv , Δy للصفر كذلك .

$$\therefore \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \frac{\lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}\right) - \lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}\right)}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} v(v + \Delta v)}$$

وذلك من قواعد النهايات

وبذلك تؤول نهايات البسط إلى :-

$$v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}$$

وتكون نهاية المقام v^2 حيث أن : $\Delta v \to 0$ أيضاً .

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

أى أن تفاضل قسمة دالتين :-

$$\left[\frac{\text{المقام} \times \text{تفاضل البسط} - \text{البسط} \times \text{تفاضل المقام}}{\text{مربع المقام}}\right]$$

أمثلـــــة محلولة :-

مثال (١) :-

فاضل بالنسبة إلى x : $\left(\dfrac{2x}{2x-1}\right)$

وذلك باستخدام قاعدة تفاضل قسمة دالتين السابقة :-

الحـــــل :-

$$\frac{dy}{dx}=\frac{v\,.\,\dfrac{du}{dx}-u\,.\,\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$$

حيث $u=2x$, $v=(2x-1)$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{[(2x-1)\,.\,(2)-(2x)\,.\,(2)]}{(2x-1)^2}$$

$$=\frac{4x-2-4x}{(2x-1)^2}=\frac{-2}{(2x-1)^2}$$

مثال (٢) :-

فاضل بالنسبة إلى x : $y=\dfrac{(x^3+1)}{(x^3-1)}$

باستخدام القاعدة السابقة

الحـــــل :-

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(x^3-1)\times(3x^2)-(x^3+1)\times(3x^2)}{(x^3-1)^2}$$

$$=\frac{3x^5-3x^2-3x^5+3x^2}{(x^3-1)^2}=\frac{-6x^5}{(x^3-1)^2}$$

مثال (٣) :-

أوجد المشتقة الأولى للدالة : $y=\dfrac{x^2+2}{x^2-2} \quad , \quad x^2 \neq 2$

الحـــــل :-

$$\because y=\frac{u}{v} \quad \therefore \frac{dy}{dx}=\frac{v\,.\,\dfrac{du}{dx}-u\,.\,\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\left(x^2-2\right)(2x)-\left(x^2+2\right)(2x)}{\left(x^2-2\right)^2}$$

$$=\frac{2x^3-4x-2x^3-4x}{\left(x^2-2\right)^2}=\frac{-8x}{\left(x^2-2\right)^2}$$

مثال (٤) :-

أوجد المعامل التفاضلى الأول بالنسبة إلى x للدالة : $y=\dfrac{x}{x+1}$

الحـــــل :-

$$\because y=\frac{x}{x+1}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{[(1+x)\times 1]-[(x)\times 1]}{(x+1)^2}=\frac{1}{(x+1)^2}$$

مثال (٥) :-

أوجد المشتقة الأولى للدالة : $y=\dfrac{x^2}{\sqrt{x}}$

الحـــــل :-

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\left[\sqrt{x}\,.\,(2x)\right]-\left[\left(x^2\right).\left(\dfrac{-1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)\right]}{x}$$

$$=2\sqrt{x}+\frac{x}{2\sqrt{x}}=2\sqrt{x}+\frac{1}{2}\sqrt{x}=2.5\sqrt{x}$$

مثال (٦) :-

أوجد المشتقة الأولى للدالة :
$$y=\frac{4x^3-7x^2-2}{3x+5}$$

الحـــــل :-

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\left[(3x+5)(12x^2-14x)\right]-\left[(4x^3-7x^2-2)(3)\right]}{(3x+5)^2}$$
$$=\frac{36x^3-42x^2+60x^2-70x-12x^3+21x^2+6}{(3x+5)^2}$$
$$=\frac{24x^3+39x^2-70x+6}{(3x+5)^2}$$

مثال (٧) :-

أوجد المشتقة الأولى للدالة :
$$y=\frac{1}{x^5}$$

الحـــــل :-

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(x^5\times 0)-(1)\times(5x^4)}{(x^5)^2}$$
$$=\frac{0-5x^4}{x^{10}}=\frac{-5}{x^6}$$

مثال (٨) :-

أوجد تفاضل الدالة :
$$f(t)=\frac{t}{\sqrt{t^2-1}}$$

الحـــــل :-

$$f(t)=\frac{t}{(t^2-1)^{\frac{1}{2}}}$$

وباستخدام قاعدة القسمة :-

$$\therefore f\ (t)=\frac{(t^2-1)^{\frac{1}{2}}.(1)-(t)\times\left[\frac{1}{2}(t^2-1)^{\frac{-1}{2}}\times 2t\right]}{(t^2-1)}$$

ويمكن اختصار هذا الكسر بعدة طرق إلا أن أسهل طريقة هى بضرب كـل مـن البسـط والمقام فى $(t^2-1)^{\frac{1}{2}}$

$$\therefore f`(t)=\frac{(t^2-1)-t^2\,(t^2-1)^0}{(t^2-1)^{\frac{3}{2}}}=\frac{-1}{(t^2-1)^{3/2}}$$

حيث : $(t^2-1)^0=0$

مثال (٩) :-

أوجد مشتقة الدالة : $y=\dfrac{x\,(x-1)}{x^2+3x-2}$

الحـــــــل :-

$$y=\frac{x^2-x}{x^2+3x-2}$$

$$\therefore\frac{dy}{dx}=\frac{(x^2+3x-2)(2x-1)-(x^2-x)(2x+3)}{(x^2+3x-2)^2}$$

$$=\frac{2x^3+6x^2-4x-x^2-3x+2-2x^3-3x^2+2x^2+3x}{(x^2+3x-2)^2}$$

$$=\frac{4x^2-4x+2}{(x^2+3x-2)^2}$$

مثال (١٠) :- أوجد مشتقة الدالة : -

$$y=\frac{(x^2+2)\sqrt{x^2-2}}{2x+3}$$

الحـــــــل :- باستخدام قاعدة القسمة : -

$$y^{\backslash}=\frac{(2x+3)\left[(x^2+2)\left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2-2}}\right)+\left(\sqrt{x^2-2}\right)(2x)\right]}{(2x+3)^2}-\frac{(x^2+2)(\sqrt{x^2-2}).(2)}{(2x+3)^2}=$$

$$=\frac{(2x+3)[x^3+2x+2x^3-4x]}{(2x+3)^2.\sqrt{x^2-2}}-\frac{(x^2+2)(x^2-2)}{(2x+3)^2.\sqrt{x^2-2}}=$$

$$=\frac{(2x+3)(3x^3-2x)}{(2x+3)^2\sqrt{x^2-2}}-\frac{(x^2+2)(x^2-2)}{(2x+3)^2.\sqrt{x^2-2}}=$$

$$=\frac{6x^4-4x^2+9x^3-6x-x^4+2x^2-2x^2+4}{(2x+3)^2.\sqrt{x^2-2}}=$$

$$=\frac{5x^4+9x^3-4x^2-6x+4}{(2x+3)^2\sqrt{x^2-2}}$$

مثال (١١) أوجد تفاضل الدالة : - $y=\left(\frac{3x+2}{2x-1}\right)^4$

الحـــــل :-

$$y^{\backslash}=4\left(\frac{3x+2}{2x-1}\right)^3\left[\frac{(2x-1).(3)-(3x+2)(2)}{(2x-1)^2}\right]$$

$$=4\left(\frac{3x+2}{2x-1}\right)^2\frac{6x-3-6x-4}{(2x-1)^3}$$

$$=\frac{4(3x+2)^3}{(2x-1)^5}\times(-7)\qquad=\frac{-28(3x+2)^3}{(2x-1)^5}$$

مثال (١٢) : - أوجد تفاضل الدالة : -

$$y=\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}$$

الحـــــل :-

نضع الدالة فى أبسط صورة لها بالضرب فى المرافق : -

$$\therefore y=\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}\times\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}=\frac{(x+2)-2\sqrt{x}\sqrt{x+2}+x}{(x+2)-x}$$

$$=\frac{2x+2-2\sqrt{x^2+2x}}{2}=x+1-\sqrt{x^2+2x}$$

$$\therefore\frac{dy}{dx}=1+0-\frac{1}{2\sqrt{x^2+2x}}\times(2x+2)=1-\frac{(x+1)}{\sqrt{x^2+2x}}$$

مثال (١٣) : - أوجد تفاضل الدالة : - $y=\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}$

الحـــــل :-

$$y = \left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{\frac{-1}{2}} \times \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)$$

$$، \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right) = \frac{(x^2-1)(2x)-(x^2+1)(2x)}{(x^2-1)^2} = \frac{2x^3-2x-2x^3-2x}{(x^2-1)^2} =$$

$$= \frac{-4x}{(x^2-1)^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}} \times \frac{-4x}{(x^2-1)^2} = \frac{-2x}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}} \times (x^2-1)^{\frac{3}{2}}}$$

مثال : - (١٤) : - أوجد تفاضل الدالة : -

$$y = \sqrt{2 - \frac{2}{x^2+2}}$$

الحـــــل :-

نضع $V = x^2 + 2$

، نضع $U = 2 - \dfrac{2}{x^2+2}$

$$\therefore V = x^2 + 2$$

$$, \ U = 2 - \frac{2}{V}$$

$$\therefore Y = \sqrt{u}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{u}}\times\frac{+2}{v^2}\times 2x$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2-\frac{2}{x^2+2}}}\times\frac{2}{\left(x^2+2\right)^2}\times 2x=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\frac{2x^2+4-2}{x^2+2}}}\times\frac{2x}{\left(x^2+2\right)^2}=\frac{\sqrt{x^2+2}}{\sqrt{2x^2+2}}\times\frac{2x}{\left(x^2+2\right)^2}=$$

$$=\frac{2x}{\left(2x^2+2\right)^{\frac{1}{2}}\left(x^2+2\right)^{3/2}}$$

Exercise "6"

فاضل الدوال التالية فى x : -

(١) $\dfrac{2}{(3x-1)}$

(٢) $\dfrac{1}{\left(1-2x^2\right)}$

(٣) $\dfrac{x}{(x-4)}$

(٤) $\dfrac{(x-1)}{(x+2)}$

(٥) $\dfrac{(3x-1)}{(2x+3)}$

(٦) $\dfrac{(x+b)}{(x-b)}$

(٧) $\dfrac{(x-b)}{(x+b)}$

(٨) $\dfrac{x^2}{(x-3)}$

(٩) $\dfrac{x^2}{\left(x^2-3\right)}$

(١٠) $\dfrac{\sqrt{x}}{(x-1)}$

(١١) $\dfrac{(x-1)}{\sqrt{x}}$

(١٢) $\dfrac{\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)}$

(١٣) $\dfrac{\left(x^3-1\right)}{\left(x^3+1\right)}$

(١٤) $\dfrac{\left(x^2-x+1\right)}{\left(x^2+x+1\right)}$

(١٥) $\dfrac{\left(2x^2-x+1\right)}{\left(3x^2+x-1\right)}$

(١٦) $\dfrac{\left(1+x+x^2\right)}{x}$

(١٧) $\dfrac{3x^2}{\left(b^2-x^2\right)}$

(١٨) $\dfrac{(3x-2)}{(2-3x)}$

(١٩) $\dfrac{x(x-1)}{(x+2)}$

(٢٠) $\dfrac{x^{\frac{1}{2}}+2}{x^{3/2}}$

٦ - ٤ : - تفاضل دالة الدالة : - Function of a Function

لكى نتفهم معنى دالة الدالة ، سنعتبر الدالـة المثلثيـة $\sin^2 x$ أى $(\sin x)^2$ وهـذه الدالـة وهى مربع الدالة $\sin x$ أى دالة فى $\sin x$ بالضبط تماماً مثل x^2 دالـة فـى x ، الدالـة v^2 دالة فى v إلا أن $\sin x$ هى نفسها دالة فى x .

وبذلك فإن $\sin^2 x$ دالة فى $\sin x$ ، $\sin x$ نفسها دالة فى x ومنها $\sin^2 x$ دالة فـى دالة x .

وبالمثل فإن $\sqrt{x^2+3x}$ دالـة فـى x مثلمـا $\sqrt{x}$ دالـة فـى x كمـا وأن x^2+3x هـى نفسها دالة فى x .

وقد رأينا أن $\sin^2 x$ دالة فى دالة x إلا أن الأمر يختلف فى حالة $\sin^2 \sqrt{x}$.

حيث أن $\sin^2 \sqrt{x}$ دالة فى $\sin \sqrt{x}$ وهى بدورها دالة فى $\sqrt{x}$ ، $\sqrt{x}$ دالة فى x .

أى أن $\sin^2 \sqrt{x}$: (دالة فى دالة دالة x) .

كما وأن $\sin^2 \sqrt{3x}$ دالة فى $\sin \sqrt{3x}$ وهى دالة فى $\sqrt{3x}$ ، $\sqrt{3x}$ دالة فـى $3x$ ، $3x$ دالة فى x .

أى أن $\sin^2 \sqrt{3x}$ (دالة فى دالة دالة دالة x) .

وسوف نكتفى بضرب هذه الأمثلة عن الـدوال المثلثيـة حيـث سنوردها فيمـا يلـى مـن مواضيع .

إلا أنه للوصول إلى قاعدة عامة لتفاضل دالة الدالة ، فسوف نعتبر الدالة $(x^2-3)^5$

ولنعتبر
$$u=(x^2-3)$$
$$\therefore y=u^5$$
$$,\frac{dy}{du}=5u^4$$

إلا أن المطلوب هو $\frac{dy}{dx}$ ولذلك فإننا نلجأ للطريقة التالية : -

سنعتبر أن x تزداد بمقدار ضئيل للغايه ويساوى Δx

، سنعتبر أن u تزداد بمقدار مناظر ضئيل للغايه ويساوى Δu

، سنعتبر أن y تزداد بمقدار مناظر ضئيل للغايه ويساوى Δy

وبذلك فإن : -

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\times\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

فإذا أصبحت $\Delta x \to 0$ فإن كلاً من Δy , Δu ستؤول للصفر كذلك

وبذلك فإن كل من المقادير التالية ستقترب من نهاية محددة وهى : -

$$\frac{\Delta y}{\Delta x},\frac{\Delta y}{\Delta u},\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\therefore \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta u}\times\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\times\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}$$

وفى مثالنا السابق $y=u^5$

$$\therefore \frac{dy}{du}=5u^4 \quad , \quad \because u=\left(x^2-3\right) \quad \therefore \frac{du}{dx}=2x$$

وحيث أن :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=5u^4\times 2x = 10x\left(x^2-3\right)^4$$

أمثلة محلولة : -

مثال (١) : - فاضل المقدار : $y=\sqrt{2-x^2}$

الحـــــل :-

$$y=\left(2-x^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

ونعتبر $u=\left(2-x^2\right)$

$$\therefore \frac{du}{dx}=-2x$$

وحيث أن : $u=\left(2-x^2\right)$

$$\therefore y = u^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \frac{dy}{du} = \frac{1}{2} u^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{2\sqrt{2-x^2}}$$

$$\because \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{2-x^2}} \times -2x = \frac{-x}{\sqrt{2-x^2}}$$

مثال (٢) : – أوجد مشتقة الدالة :

$$y = \left(2x^3 - 3x^2 + 1\right)^6$$

الحـــــــل :-

نضع $u = \left(2x^3 - 3x^2 + 1\right)$

$$\therefore y = u^6 \quad , \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$$\because u = 2x^3 - 3x^2 + 1$$

$$\therefore \frac{du}{dx} = 6x^2 - 6x$$

$$\because y = u^5 \qquad \therefore \frac{dy}{du} = 5u^4 = 5\left(2x^3 - 3x^2 + 1\right)^4$$

$$\because \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \qquad = 5\left(2x^3 - 3x^2 + 1\right)^4 \left(6x^2 - 6x\right)$$

$$= 30x\left(2x^3 - 3x^2 + 1\right)^4 (x-1)$$

مثال (٣) أوجد مشتقة الدالة : – $y = \left(x^2 + 2\right)^3$

الحـــــــل :-

يمكن حل المسألة بطريقتين ، الطريقة الأولى بفك القوس ذو القوة 3

$$\therefore y = x^6 + 6x^4 + 12x^2 + 8$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 6x^5 + 24x^3 + 24x$$

والطريقة الثانية هى طريقة دالة الدالة :

نضع $u=\left(x^2+2\right)$.

$$\therefore y=u^3 \text{ ،} \qquad \therefore \frac{dy}{du}=3u^2$$

$$,\because u=\left(x^2+2\right) \ \therefore \frac{du}{dx}=2x$$

$$\text{،}\because \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\left(3u^2\right)\times(2x) \qquad =6x\left(u^2\right)=6x\left(x^2+2\right)^2=6x\left(x^4+4x^2+4\right)$$

$$=6x^5+24x^3+24x$$

وهى بالطبع نفس الإجابه السابق الحصول عليها بالطريقة الأولى

مثال (٤) : – أوجد $\leftarrow \frac{dx}{dy}$ **للدالة : –**

$$y=\sqrt{\left(\frac{3}{x}-2\right)}$$

الحـــــل :–

نضع $u=\frac{3}{x}-2$ ومنها : $\frac{du}{dx}=\frac{-3}{x^2}$

$$\therefore y=u^{\frac{1}{2}} \qquad \therefore \frac{dy}{du}=\frac{1}{2}u^{\frac{-1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{\frac{3-2x}{x}}}$$

$$\text{،}\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\frac{3-2x}{x}}}\times\frac{-3}{x^2}=\frac{-3}{2x^2}\times\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{3-2x}}$$

$$\therefore \frac{dx}{dy}=\frac{-2x^2\sqrt{3-2x}}{3\sqrt{x}}$$

وهى عبارة عن مقلوب $\frac{dy}{dx}$.

ويمكن الحل بالطريقة التالية : –

$$\because y=\sqrt{\frac{3}{x}-2} \qquad \therefore y^2=\frac{3}{x}-2$$

$$\therefore \frac{3}{x}=y^2+2 \qquad \therefore x=\frac{3}{y^2+2}$$

$$\therefore \frac{dx}{dy}=\frac{(y^2+2)(0)-3(2y)}{(y^2+2)^2}=\frac{-6y}{(y^2+2)^2}=\frac{-6\left(\frac{3}{x}-2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left[\left(\frac{3}{x}-2\right)+2\right]^2}=\frac{-6\left(\frac{3}{x}-2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{3}{x}\right)^2}$$

$$=\frac{-6x^2}{9}\left(\frac{3-2x}{x}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{-2x^2}{3}\times\frac{\sqrt{3-2x}}{\sqrt{x}}$$

مثال (٥) : – إذا كانت $y=\dfrac{x}{x^2+1}$ **فأوجد** y_2 ، y_3

الحـــــل :–

وهى تعنى التفاضل للتفاضل أو التفاضل الثانى $y_2=y''=\dfrac{d^2y}{dx^2}$

وهى تعنى التفاضل الثالث . $y_3=y'''=\dfrac{d^3y}{dx^3}$ ،

وباستخدام قاعدة القسمة : –

$$y_1=\frac{dy}{dx}=\frac{(x^2+1)(1)-x(2x)}{(x^2+1)^2}=\frac{(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$$

$$، y_2=\frac{(x^2+1)^2(-2x)-(1-x^2)\times 2(x^2+1)(2x)}{(x^2+1)^4}=\frac{(2x^3-6x)}{(1+x^2)^3}$$

$$، y_3=\frac{(1+x^2)^3(6x^2-6)-(2x^3-6x)\times 3(1+x^2)^2(2x)}{(1+x^2)^6}=\frac{-6x^4+36x^2-6}{(x^2+1)^4}$$

مثال (٦) : – أوجد $\dfrac{dy}{dx}$ **للدالة** : – $y=(3x^2+5x)^3$

الحـــــــل :-

نضع $u = (3x^2 + 5x)$

$$\therefore \frac{du}{dx} = 6x + 5$$

$$، \; y = u^3 \qquad \therefore \frac{dy}{du} = 3u^2 = 3(3x^2 + 5x)^2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= 3(3x^2 + 5x)^2 \; (6x + 5)$$

ويمكن التفاضل مباشرة كالتالى : -

$$\because y = (3x^2 + 5x)^3$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 3(3x^2 + 5x)^{3-1} - \frac{d}{dx}(3x^2 + 5x) = 3(3x^2 + 5x)^2 \times (6x + 5)$$

مثال (٧) : - أوجد $\frac{dy}{dx}$ **للدالة : -**

$$y = (4x^2 + 5x - 1)^4 + (3x^3 + 2x - 3)^6$$

الحـــــــل :-

بطريقة دالة الدالة : نضع $y = u^4 + v^6$

حيث $u = (4x^2 + 5x - 1)$،

$$\therefore \frac{du}{dx} = (8x + 5)$$

$v = (3x^3 + 2x - 3)$،

$$\therefore \frac{dv}{dx} = (9x^2 + 2)$$

$$، \; \frac{dy}{du} = 4u^3 \quad , \quad \frac{dy}{dv} = 6v^5$$

$$، \; \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 4u^3 \cdot (8x + 5) + 6v^5 \cdot (9x^2 + 2)$$

$$= 4(4x^2+5x-1)^3\ (8x+5)+6(3x^3+2x-3)^5\,(9x^2+2)$$

مثال (٨) : - أوجد $\frac{dy}{dx}$ للدالة $y=(x+1)^3$

الحـــــل :-

بالطريقة المباشرة ، نفك القوس :

$$\therefore y = x^3+3x^2+3x+1$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 3x^2+6x+3$$

وبطريقة دالة الدالة : -

نضع $y=u^3$ حيث $u=x+1$

$$\therefore \frac{dy}{du} = 3u^2 \quad , \quad \frac{du}{dx}=1$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 3u^2 \cdot 1 = 3(x+1)^2$$

مثال (٩) : - أوجد $\frac{dy}{dx}$ للدالة : $y=\frac{1}{\sqrt{3x^5-2x^3}}$

الحـــــل :-

نضع $u=3x^5-2x^3$

$$\therefore y = \frac{1}{\sqrt{u}} \quad , \quad \frac{dy}{du} = \frac{-1}{2\ u^{3/2}} = \frac{-1}{2\sqrt{(3x^5-2x^3)^3}}$$

$$, \frac{dy}{dx} = 15x^4-6x^2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{-1}{2\sqrt{(3x^5-2x^3)^3}} \times (15x^4-6x^2)$$

مثال (١٠) أوجد المشتقة الأولى للدالة : -

$$y=(x^2-2x+3)^3$$

الحـــــل :-

نضع $u=(x^2-2x+3)$

$$\therefore \frac{du}{dx} = (2x-2) = 2(x-1)$$

$$y = u^3 \quad \therefore \frac{dy}{du} = 3u^2 \qquad = 3\left(x^2 - 2x + 3\right)^2 \quad ،$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= 3\left(x^2 - 2x + 3\right)^2 \; . \; 2(x-1)$$

$$= 6(x-1)\left(x^2 - 2x + 3\right)^2$$

وبمزيد من التدريب فإن الطالب يمكنه إجراء عملية التفاضل بسهولة وبدون الحاجة إلى فرض قيمة U

والمثال السابق يعتبر نموذج للطالب لكى يبدأ فى إجراء التفاضل بدون اللجوء لفرض قيمة لـ U

إلا أننا يمكن مما سبق أن نستنتج التالى : -

[تفاضل أى مقدار جبرى مرفوع لأس = الأس مضروباً فى المقدار الجبرى مرفوعاً (للأس -١) ومضروباً فى تفاضل المقدار الجبرى] .

وبذلك فإن المثال السابق يمكن حله مباشرة كالتالى :

$$\frac{dy}{dx} = 3\left(x^2 - 2x + 3\right)^2 \times (2x-2)$$

$$= 6(x-1)\left(x^2 - 2x + 3\right)^2$$

مثال (١١) : - أوجد المشتقة الأولى للدالة : -

$$y = \left(3x^2 - 2x + 5\right)^{3/2}$$

الحـــــل :- يمكن الحل بدون فرض قيمة U ويكون الحل كالتالى : -

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}\left(3x^2 - 2x + 5\right)^{\frac{3}{2}} \times d.c.of\left(3x^2 - 2x + 5\right)$$

، $d.c.$ هى اختصار لكلمة المعامل التفاضلى : - differential coefficient

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}\left(3x^2 - 2x + 5\right)^{\frac{1}{2}} \times (6x-2)$$

$$= 3(3x-1)\left(3x^2-2x+5\right)^{\frac{1}{2}}$$

مثال (١٢) : - أوجد المشتقة الأولى للدالة : -

$$y = \left(x^2+2\right)\times\sqrt[3]{\left(x^2-3\right)}$$

الحــــــل :- واضح أن y عبارة عن حاصل ضرب مقدارين أو دالتين لذلـك سنلجأ للقاعدة

$$\therefore \frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \left(x^2+2\right)\times\left(d.c.of\sqrt[3]{\left(x^2-3\right)}\right)+$$

$$+\left(\sqrt[3]{\left(x^2-3\right)}\right)\times\left[d\ .\ c\ .of\left(x^2+2\right)\right] \qquad \dots\dots\dots\dots (1)$$

ونعلم مما سبق أن $\sqrt[3]{x^2-3}$ هو دالة فى $\left(x^2-3\right)$

، $\left(x^2-3\right)$ دالة فى x أى أن $\sqrt[3]{x^2-3}$ هو دالة الدالة .

ومن الأفضل هنا إجراء تفاضلها منفصلاً ثم التعويض عنها بعد ذلك .

$$، \frac{d}{dx}\sqrt{\left(x^2-3\right)} = \frac{d}{dx}\left(x^2-3\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\left(x^2-3\right)^{\frac{-2}{3}} \times (2x) = \frac{2x}{3\left(x^2-3\right)^{\frac{2}{3}}}$$

وبالتعويض فى (1) عن هذه القيمة : -

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \left(x^2+2\right)\times\frac{2x}{3\left(x^2-3\right)^{\frac{3}{2}}} + \left(x^2-3\right)^{\frac{1}{3}}\times 2x$$

$$= \frac{2x\left(x^2+2\right)}{3\sqrt[3]{\left(x^2-3\right)^2}} + 2x\sqrt[3]{\left(x^2-3\right)}$$

ويمكن اختصار هذه النتيجة لتصبح :-

$$\frac{2x\left(x^2+2\right)\left(x^2-3\right)^{\frac{1}{3}}}{3\left(x^2-3\right)} + \frac{2x\left(x^2-3\right)^{\frac{4}{3}}}{\left(x^2-3\right)}\times\frac{3}{3}$$

$$= \frac{2x\left(x^2-3\right)^{\frac{1}{3}}\left[x^2+2+3\left(x^2-3\right)\right]}{3\left(x^2-3\right)} = \frac{2x\sqrt{(x^2-3)}(4x^2-7)}{3(x^2-3)}$$

مثال (١٣) :-

أوجد المشتقة الأولى لهذه الدالة : $y = \frac{\sqrt{1+3x}}{4x}$

الحـــــل :-

هذا المقدار على صورة دالة كسرية $\left(\frac{u}{v}\right)$ حيث :-

$u = 1+3x \qquad , \qquad v = 4x$

$$\therefore \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \, . \, \frac{du}{dx} - u \, . \, \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{4x[d \, . \, c \; of\,(1+3x)] - [(1+3x) \times d \, . \, c \; oF\,(4x)]}{(4x)^2}$$

وقد عرفنا أن $\sqrt{1+3x}$ هو دالة فى الدالة

$$\therefore \frac{d}{dx}(1+3x)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(1+3x)^{-\frac{1}{2}} \times 3 = \frac{3}{2\sqrt{1+3x}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\left[4x \times \frac{3}{2\sqrt{1+3x}}\right] - \left[\sqrt{1+3x} \times 4\right]}{16x^2} = \frac{\frac{6x}{\sqrt{1+3x}} - 4\sqrt{1+3x}}{16x^2}$$

$$= \frac{6x - 4(1+3x)}{16x^2 \; \sqrt{1+3x}} = \frac{-6x-4}{16x^2 \; \sqrt{1+3x}} = -\frac{2+3x}{8x^2 \; \sqrt{1+3x}}$$

٦-٥ :- تفاضل الدالة الضمنية :-

Differentiation of implicit functions

علمنا من تعريف الدوال أن الدالة الضمنية هى الدالة التى تتضمن حدودها كل من x , y ولا يمكن فصل أى منهما عن الآخر

أى أنه لا يمكن وضع الحدود المشتملة على y فى طرف والحدود المحتوية على x فى الطرف الآخر .

ومثال ذلك ، الدوال التالية :-

$$x^3 - 3x^2y + 5y^3 - 7 = 0$$

$$x \; Log \; y + y^2 = 4xy \text{،}$$

وفى هذه الحالة فإنه يلزم أن نفاضل حداً بعد حد فى جميع حدود المعادلة على أن لا ننسى أنه عند التفاضل بالنسبة إلى y ، أنها ذاتها (أى y) دالة الدالة فى x

مثال (١) :-

أوجد $\frac{dy}{dx}$ من المعادلة التالية : $\quad x^2 - y^2 + 3x = 5y$

الحــــل :-

بالتفاضل :-

$$\therefore 2x - 2y\frac{dy}{dx} + 3 = 5\frac{dy}{dx}$$

وبتجميع الحدود المشتملة على $\frac{dy}{dx}$

$$\therefore 2y\frac{dy}{dx} + 5\frac{dy}{dx} = 2x + 3$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}(2y + 5) = 2x + 3$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2x + 3}{2y + 5}$$

وواضح أن $\frac{dy}{dx}$ بدلالة كل من x , y وبمعرفة قيم x , y فإن القيمة العددية للمقدار $\frac{dy}{dx}$ ، يمكن حسابها :-

والمثال التالى يوضح ذلك :-

مثال (٢) :-

أوجد ميل المماس للمنحنى : $x^2+3xy+y^2=6$ **عند النقطة** $(3\,,-3)$

الحـــــل :-

نقوم بإجراء التفاضل كما بالمثال السابق ويجب أن لا نغفل عن أن xy عبارة عن حاصل ضرب

وبالتفاضل :

$$\therefore 2x+\left(3y+3x\frac{dy}{dx}\right)+2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}\ (3x+2y)=-(2x+3y)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{-(2x+3y)}{(3x+2y)}$$

وعند النقطة $(3\,,-3)$ أى عندما $x=3$, $y=-3$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{-(2\times 3+3\times -3)}{(3\times 3+2\times -3)}=\frac{-(-3)}{(3)}=1$$

$\therefore$ ميل المماس للمنحنى =١ وهو يصنع زاوية 45° مع الإتجاه الموجب لمحور السينات $(X-axis)$

Exercise "7"

احسب التفاضلات التالية :-

$(3x+2)^2 \ , (1-3x)^4 \ , (2x+5)^{\frac{1}{2}}$ .... (١)

$\dfrac{1}{(1-3x)} , (2-3x)^2 \ , \sqrt{1-2x}$ .... (٢)

$\left(x^2-3\right)^5 , \left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}} \ , \sqrt{2x^2-5}$ .... (٣)

$\dfrac{1}{\left(1-3x^2\right)} , \sqrt{1-3x^2} \ , x\sqrt{1-2x^2}$ .... (٤)

$\dfrac{1}{(4-x)} , \dfrac{1}{\sqrt{(4-x)}} , \dfrac{1}{(4-x)^2}$ .... (٥)

$\dfrac{1}{\left(x^2-1\right)} , \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}} , \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ .... (٦)

$\dfrac{1}{\sqrt{\left(1-x^2\right)}} , \sqrt{\dfrac{x}{(1-x)}} , \sqrt{\dfrac{(1-x)}{(1+x)}}$ .... (٧)

$x \times \sqrt{\dfrac{(1-x)}{(1+x)}} \ , \sqrt[3]{\left(x^3+1\right)}$ .... (٨)

$\sqrt{c^2+x^2} \ , \dfrac{1}{\sqrt{c^2+x^2}}$ .... (٩)

$\sqrt{1-x+2x^2} \ , \left(1-3x^2\right)^n$ .... (١٠)

$\dfrac{x^2}{\sqrt{c^2-x^2}} \ , \left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3$ .... (١١)

$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \ , \dfrac{\sqrt{1+4x}}{x}$ .... (١٢)

$\dfrac{2x}{\sqrt{1+x^2}} \ , \dfrac{\sqrt{\left(1+x^2\right)}}{2x}$ .... (١٣)

$x^2 \times \sqrt{2-x} \ , \dfrac{1}{\sqrt{3x^2-5x+2}}$ .... (١٤)

$\frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x}$, $x\sqrt{(3x+2)}$ .... (١٥)

أوجد $\frac{dy}{dx}$ من المعادلات الضمنية التالية :–

$2x^2+5xy+7y^2=7$ .... (١٦)

$\left(x^2+y^2\right)^2-\left(x^2-y^2\right)=0$ .... (١٧)

$x^3+y^3=3xy$ .... (١٨)

$x^n+y^n=a^n$ .... (١٩)

(٢٠) أوجد الميل عند النقطة $(1\ ,\ 1)$ الذى يصنعه مماس المنحنى

$x^2+y^2-3x+4y-3=0$

٦-٦ :- التفاضل المتتالى : **Successive differentiation**

اتضح لنا مما سبق أن العامل التفاضلى لدالة ما فى x عبارة عن دالة فى x كذلك ما لم تكن الدالة الأصلية دالة خطية من الدرجة الأولى فمثلا لو أن :

$$y = 5x^4$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 20x^3$$

وواضح أن $20x^3$ هى دالة فى x كذلك والأخيرة يمكن تفاضلها بالنسبة إلى x

$$\frac{d}{dx}\left(20x^3\right) = 60x^2 ،$$

ويُطلق على $60x^2$ لهذه الدالة $\left(y = 5x^4\right)$ بالمعامل التفاضلى الثانى أو المشتقة الثانية للدالة الأصلية، ويعبر عنها كالتالى : -

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

ويستخدم الرمز $\frac{d^2y}{dx^2}$ للتعبير عن المعامل التفاضلى الثانى ويجب مراعاة أن (2) فى الرمز $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ ، فى كل من البسط والمقام ليستا أُساً ولكنها تعنى أن الدالة الأصلية y قد تم تفاضلها مرتين وفى كل مرة منهما ، بالنسبة إلى x

وبذلك فإن $\frac{d^2y}{dx^2}$ تقيس المعدل الذى تتغير به $\frac{dy}{dx}$ بالنسبة إلى x ، تماماً مثلما تُعبر $\frac{dy}{dx}$ عن معدل تغير y بالنسبة إلى x

والمعامل التفاضلى الثانى ، هو دالة فى x ، إذا لم تكن $\frac{dy}{dx}$ دالة خطية أو ثابت

كما أنه يمكننا أن نفاضل $\frac{d^2y}{dx^2}$ بالنسبة إلى x ويُعرف الناتج بالمعامل التفاضلى الثالث لـ y بالنسبة إلى x ويرمز لها بالرمز $\frac{d^3y}{dx^3}$. وبذلك فإنه يمكننا الإستمرار فى عمليات تفاضل متتالية إلى أن يُصبح أحد معاملات التفاضل ، رقماً ثابتاً

وبذلك فإنه فى مثالنا السابق :

$$\frac{d^2y}{dx^2}=60x^2 \ , \ \frac{d^3y}{dx^3}=120x \ , \ \frac{d^4y}{dx^4}=120$$

أى أنه لا يمكننا إيجاد أكثر من المعامل التفاضلى الرابع للمثال المذكور .

فإذا اعتبرنا أن $y=x^n$

فإنه بالتفاضل المتتالى بالنسبة إلى x نحصل على :-

$$\frac{dy}{dx}=nx^{n-1}$$

$$،\frac{d^2y}{dx^2}=n(n-1)x^{n-2}$$

$$،\frac{d^3y}{dx^3}=n(n-1)(n-2)x^{n-3}$$

فإذا كانت n عدد صحيح موجب فإن هذه العملية يُمكن أن تستمر حتى نصل إلى $(n-n)$ ، مساوية لقوة x

ويصبح المعامل التفاضلى $n(n-1)(n-2)....3.2.1$

أى يُصبح عبارة عن مضروب n " Factorial n أو $\underline{n|}$ " ويكون التفاضل التالى هو الصفر .

أما إذا كانت n عدداً ليس صحيحاً موجباً فإن العملية يمكنها أن تستمر بدون نهاية .

ويتضح ذلك من المثال التالى : -

$$y=x^3-5x^2+2x-4$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=3x^2-10x+2$$

$$, \frac{d^2y}{dx^2}=6x-10$$

$$, \frac{d^3y}{dx^3}=6$$

$$, \frac{d^4y}{dx^4}=0$$

٦ – ٧ : – الرموز البديلة للمعاملات التفاضلية

Alternative notation For differential Coefficients

يُطلق كذلك على المعاملات التفاضلية المتتالية بالمشتقات أو بالدوال المشتقة للدالة الأصلية

ويمكن التعبير بالرموز التالية : –

(١) عند استخدام رمز الدالة : $f(x)$ or $\Phi(x)$ ، فإذا كانت $f(x)$ أو $\Phi(x)$ ترمز لدالة فى x

ترمز للمعامل التفاضلى الأول $\therefore f^{\cdot}(x)$ or $\Phi^{\cdot}(x)$

ترمز للمعامل التفاضلى الثانى ، $f^{\cdot\cdot}(x)$ or $\Phi^{\cdot\cdot}(x)$

ترمز للمعامل التفاضلى الثالث ، $f^{\cdot\cdot\cdot}(x)$ or $\Phi^{\cdot\cdot\cdot}(x)$

ترمز للمعامل التفاضلى الرابع ، $f^{IV}(x)$ or $\Phi^{IV}(x)$

..... وهكذا .

(٢) عند إستخدام y كرمز للدالة فى x

$\therefore y_1 =$ المعامل التفاضلى الأول

، $y_2 =$ المعامل التفاضلى الثانى

، $y_3 =$ المعامل التفاضلى الثالث

..... وهكذا .

أو قد نستخدم الرموز $y^{\cdot}, y^{\cdot\cdot}, y^{\cdot\cdot\cdot}, y^{IV}$ ، أحياناً .

٦ –٨ : – منحنيات الاشتقاق **Derived curves**

اتضح لنا مما سبق أن التفاضل المتتالى لدالة فى x ينتج عنه مجموعة من المشتقات ، كل منها دالة فى x

ويمكننا تمثيل هذه المشتقات بمنحنياتها حيث تنشأ منها علاقات محددة .

ولنعتبر الدالة : – $y = x^2 - 4x + 3$

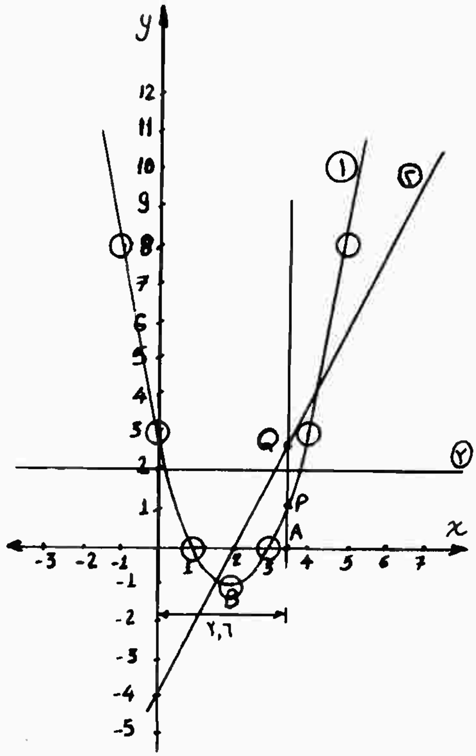
$\therefore y_1 = 2x - 4 \quad , \quad y_2 = 2$

ويوضح الشكل (٦-١) المنحنيات التالية : -

$1)\ y = x^2 - 4x + 3$

$2)\ y_1 = 2x - 4$

$3)\ y_2 = 2$



شكل (٦ - ١)

ويمكن ملاحظة العلاقات التالية بين المنحنى الأصلى ومشتقتيه : -

(١) تعطى y_1 وهى دالة المشتقة الأولى ، معدل زيادة y بالنسبة إلى x ، وقيمتها عند أى قيمة نختارها لـ x ، تساوى الميل عند النقطة المناظرة على المنحنى

فإذا أخذنا أى نقطة ولتكن A على المحور OX بحيث أن $x = 3.6$ ثم نرسم الخط الرأسى المار بـ A فيقطع المنحنى فى P ويقطع الخط المستقيم $[y_1 = 2x - 4]$ فى Q وبذلك فإن قيمة الإحداثى الرأسى QA تكون مساوية لميل المنحنى عند P ، وواضح من الرسم أنها حوالى 3.2 وحدة .

وبالحساب والتعويض عن قيمة $x = 3.6$ فى المعادلة $[y_1 = 2x - 4]$

فإن المعامل التفاضلى الأول يساوى : -

$(2 \times 3.6 - 4) = 7.2$

(٢) والرسم الذى يمثله y_2 أو التفاضل الثانى $y_2 = 2$ عبارة عن خط مستقيم موازياً لـ OX حيث تكون قيمة الإحداثى الصادى لأى نقطة عليه ثابته وهو يوضح أن ميل $y_1 = 2x - 4$ ، رقم ثابت يساوى 2

(٣) وعند أسفل نقطة على المنحنى وهى نقطة B [المنحنى : $y = (x^2 - 4x + 3)$] فإن الإحداثى الصادى (الرأسى) عند النقطة المرادفة لـ B علـى المنحنـى الممثل للتفاضل الأول $y_1 = 2x - 4$ تكون مساوية للصفر حيث أن $y_1 = 2x - 4$ يقطع محور ox عند هذه النقطة .

وبذلك فإن ميل الدالة الأصلية يساوى الصفر عندما $x = 2$ والمماس المرسوم للمنحنى عند B يكون موازياً لمحور السينات ox

(٤) لقيم x الأقل من 2 فإن الدالة $x^2 - 4x + 3$ تتناقص بينما قيم الدوال المشتقة تكون سالبة

ولقيم x الأكبر من 2 فإن الدالة $x^2 - 4x + 3$ تتزايد وتكون الدالة $2x - 4$ موجبة .

مسائل متنوعة محلولة : -

(١) أوجد $\frac{dy}{dx}$ **إذا كانت :**

$$y = \frac{(x^2 + 2x)^5}{(x^4 + 3x - 1)^2}$$

الحـــــــل :-

يمكن حل هذه المسألة كحاصل قسمة أو كحاصل ضرب كالتالى : -

$$y = (x^2 + 2x)^5 \times (x^4 + 3x - 1)^{-2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = (x^2 + 2x)^5 \times -2(x^4 + 3x - 1)^{-3} + (x^4 + 3x - 1)^{-2} \times 5 \times (x^2 + 2x)^4 \times (2x + 2)$$

ويمكن إختصار هذه الإجابة إلى أبسط صورة .

(٢) أوجد مشتقة الدالة : -

$$y = (x^3 - 6)^5$$

بالنسبة إلى x

الحـــــــل :-

$$\frac{dy}{dx}=5\left(x^3-6\right)^4\times\frac{d}{dx}\left(x^3-6\right)=5\left(x^3-6\right)^4\times3x^2=15x^2\left(x^3-6\right)^4$$

ويمكن الحصول على نفس النتيجة إذا ما فككنا القوس المرفوع للأس 5 وأوجدنا المشتقة المطلوبة كحاصل جمع جبرى للحدود .

(٣) أوجد مشتقة الدالة : -

$$y=\left(3x^2+2x\right)^{12}$$

الحـــــــل :-

$$\frac{dy}{dx}=12\left(3x^2+2x\right)^{11}\cdot\frac{d}{dx}\left(3x^2+2x\right)=12\left(3x^2+2x\right)^{11}\times(6x+2).$$

(٤) أوجد مشتقة الدالة : -

$$u=\sqrt[4]{\frac{1}{y^5}}=y^{\frac{-5}{4}}$$

الحـــــــل :-

نضع الدالة فى الصورة الأسية بدلاً من الصورة الجذرية

$$\therefore u=y^{\frac{-5}{4}}$$

$$\therefore\frac{du}{dy}=\frac{-5}{4}y^{\frac{-5}{4}-1}=\frac{-5}{4}y^{\frac{-9}{4}}=\frac{-5}{4}\sqrt[4]{\frac{1}{y^9}}$$

(٥) أوجد $f`(x)$ للدالة : $f(x)=3\sqrt[6]{x^5}$

الحـــــــل :-

$$f(x)=3x^{\frac{5}{6}}$$

$$\therefore f`(x)=3\times\frac{5}{6}\times x^{\frac{5}{6}-1}=\frac{5}{2}x^{\frac{-1}{6}}=\frac{5}{2}\sqrt[6]{\frac{1}{y}}$$

(٦) أوجد مشتقة الدالة : -

$$y=\frac{ax^n-5}{b}$$

الحـــــل :-

$$y=\frac{a}{b}x^{n}-\frac{5}{b}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{an}{b}x^{n-1}-0=\frac{an}{b}x^{n-1}.$$

ويمكن الحصول على نفس النتيجة بكتابة :

$$y=\frac{1}{b}\left(ax^{n}-5\right)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{b}-nax^{n-1}=\frac{an}{b}x^{n-1}$$

(٧) **أوجد مشتقة الدالة : -**

$$y=\sqrt[a]{\frac{1}{x^{b}}}$$

الحـــــل :- يمكن كتابة y هكذا :

$$y=x^{\frac{-b}{a}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{-b}{a}x^{\frac{-b}{a}-1}=\frac{-b}{a}x^{-\left(\frac{b+a}{a}\right)}$$

(٨) **أوجد مشتقة الدالة : -**

$$y=\sqrt{3x^{3}-5x+2}$$

الحـــــل :- يمكن كتابة الدالة y هكذا : -

$$y=\left(3x^{3}-5x+2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left(3x^{3}-5x+2\right)^{-\frac{1}{2}}.\frac{d}{dx}\left(3x^{3}-5x+2\right)$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3x^{3}-5x+2}}\times\left(9x^{2}-5\right)=\frac{9x^{2}-5}{2\sqrt{3x^{3}-5x+2}}$$

(٩) **أوجد مشتقة الدالة :** $y=\sqrt{2x^{3}+3x}$

الحـــــل :-

نضع $u=2x^{3}+3x$

$$\therefore y = u^{\frac{1}{2}}$$

$$, \because u = 2x^3 + 3x \qquad \therefore \frac{du}{dx} = 6x^2 + 3$$

$$، \because y = u^{\frac{1}{2}} \qquad \therefore \frac{dy}{du} = \frac{1}{2} u^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2x^3 + 3x}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{2x^3 + 3x}} \times \left(6x^2 + 3\right)$$

ويمكن الحصول على الإجابه بسهولة وذلك بتربيع كل من الطرفين ثم نوجد مشتقة كل طرف بالنسبة إلى x :

$$\because y = \sqrt{2x^3 + 3x}$$

$$\therefore y^2 = 2x^3 + 3x$$

$$\therefore 2y \frac{dy}{dx} = 6x^2 + 3$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\left(6x^2 + 3\right)}{2y} = \frac{\left(6x^2 + 3\right)}{2\sqrt{2x^3 + 3x}}$$

(١٠) أوجد مشتقة الدالة : – $S = \sqrt[3]{(6-t)}$

الحـــــل :– نُحول الجذر إلى أُس كسرى

$$\therefore S = (6-t)^{\frac{1}{3}}$$

$$، \frac{ds}{dt} = \frac{1}{3}(6-t)^{\frac{-2}{3}} \cdot \frac{d}{dt}(6-t)$$

$$= \frac{1}{3}(6-t)^{\frac{-2}{3}} \cdot (-1) = \frac{-1}{3\sqrt[3]{(6-t)^2}}$$

(١١) إذا كانت $f(t) = \sqrt[3]{2t^3 + 4t - 3}$

فأوجد $f^{`}(t)$

الحـــــل :–

$$f^{`}(t) = \frac{df}{dt}$$

، نقوم بتحويل الجذر إلى أُس كسرى

$$\therefore f(t) = \left(2t^3 + 4t - 3\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\therefore f`(t) = \frac{1}{3}\left(2t^3 + 4t - 3\right)^{\frac{-2}{3}} \cdot \frac{d}{dt}\left(2t^3 + 4t - 3\right)$$

$$= \frac{1}{3\sqrt[3]{\left(2t^3 + 4t - 3\right)^2}} \times \left(6t^2 + 4\right)$$

(١٢) أوجد المشتقة الأولى للدالة :

$$y = \frac{1}{2x^3 - 3x^2 + 5x + 6}$$

الحـــــل :-

$$y = \left(2x^3 - 3x^2 + 5x + 6\right)^{-1}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -1\left(2x^3 - 3x^2 + 5x + 6\right)^{-2}\left(6x^2 - 6x + 5\right)$$

$$= \frac{-6x^2 + 6x - 5}{\left(2x^3 - 3x^2 + 5x + 6\right)^2}$$

(١٣) إذا كانت : $y = x^3 - 3\sqrt{2x^2 + 5}$

فأوجد $\frac{dy}{dx}$

الحـــــل :-

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x^3\right) - 3\frac{d}{dx}\sqrt{2x^2 + 5}$$

$$= 3x^2 - 3 \times \frac{2x\sqrt{2x^2 + 5}}{2x^2 + 5} = 3x^2 - \frac{6x\sqrt{2x^2 + 5}}{2x^2 + 5}$$

حيث : -

$$\frac{d}{dx}\sqrt{2x^2 + 5} = \frac{d}{dx}\left(2x^2 + 5\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2x^2 + 5}} \times 4x = \frac{2x}{\sqrt{2x^2 + 5}}$$

(١٤) أوجد مشتقة الدالة : -

$$y = 2 + \frac{3}{\sqrt{x}} + 3\sqrt{x} - \frac{2}{x\sqrt{x}}$$

الحـــــل :- يمكن كتابة الدالة فى الصورة الأسية كالتالى :-

$$y=2+3x^{\frac{-1}{2}}+3x^{\frac{1}{2}}-2x^{\frac{-3}{2}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{-3}{2}x^{\frac{-3}{2}}+\frac{3}{2}x^{\frac{-1}{2}}+3x^{\frac{-5}{2}}=\frac{-3}{2\sqrt{x^3}}+\frac{3}{2\sqrt{x}}+\frac{3}{\sqrt{x^5}}$$

(١٥) أوجد المشتقة السابعة للدالة : $y=x^7$

الحـــــل :-

المشتقة الأولى : $7x^6$

المشتقة الثانية : $7\times 6x^5$

المشتقة الثالثة : $7\times 6\times 5\ x^4$

المشتقة الرابعة : $7\times 6\times 5\times 4\ x^3$

المشتقة الخامسة : $840\times 3\ x^2$

المشتقة السادسة : $2520\times 2\ x$

المشتقة السابعة : 5040

وواضح أن المشتقة الثامنة = صفر ولذلك فإن الدالة $y=x^7$ ، لها ثمانية مشتقات .

(١٦) أوجد مشتقة الدالة : $y=(x^2-5x)(3x+2)$

الحـــــل :-

نستخدم النظرية : - $d(u.v)=u.dv+v.du.$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=(x^2-5x)(3)+(3x+2)(2x-5)$$

$$=3x^2-15x+6x^2-15x+4x-10$$

$$=9x^2-26x-10$$

(١٧) أوجد تفاضل الدالة : - $y=\dfrac{x^3}{\sqrt[3]{2x^2-1}}$

الحـــــل :-

نحول الصورة الجذرية إلى صورة أُسية وهى تسمح لنا بتطبيق النظرية كالتالى : -

$$\therefore y=x^3(2x^2-1)^{\frac{-1}{3}}$$

وهى عبارة عن حاصل ضرب مقدارين

$$u = x^3 \;,\; V = \left(2x^2 - 1\right)^{\frac{-1}{3}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

$$= x^3 . \frac{-1}{3}\left(2x^2 - 1\right)^{\frac{-4}{3}} .4x + \left(2x^2 - 1\right)^{\frac{-1}{3}} .3x^2$$

$$= x^2\left(2x^2 - 1\right)^{\frac{-4}{3}}\left[\frac{-4x^2 + 9\left(2x^2 - 1\right)}{3}\right]$$

$$= \frac{x^2}{3}\left(2x^2 - 1\right)^{\frac{-4}{3}}\left[14x^2 - 9\right]$$

$$= \frac{x^2\left[14x^2 - 9\right]}{3\sqrt[3]{\left(2x^2 - 1\right)}}$$

(١٨) أوجد تفاضل الدالة :

$$x = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}$$

الحـــــــل :-

يمكن حل هذه المسألة بكتابتها فى الصورة :

$$x = \left(1 + y^2\right)^{\frac{-1}{2}}$$

ثم نضع $u = 1 + y^2$

$$\therefore \; x = u^{\frac{-1}{2}}$$

$$\therefore \frac{dx}{du} = \frac{-1}{2}u^{\frac{-3}{2}}$$

$$\because u = 1 + y^2 \qquad \therefore \frac{du}{dy} = 2y$$

$$\frac{dx}{dy}=\frac{dx}{du}\cdot\frac{du}{dy}=\frac{-1}{2}u^{\frac{-3}{2}}\cdot 2y$$ ،

$$=\frac{-1}{2}\left(1+y^2\right)^{\frac{-3}{2}}\cdot 2y$$

$$=\frac{-y}{\sqrt{\left(1+y^2\right)^3}}$$

ويمكن حل هذه المسألة بتربيع الطرفين حيث نحصل على دالة ضمنية فى كل من x , y

$$\because x=\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$$

$$\therefore x^2=\frac{1}{1+y^2}$$

$$\therefore x^2+x^2y^2=1$$

ثم نجرى التفاضل كالمعتاد بالنسبة إلى x ولا ننسى أن y دالة فى x وأن $x \,.\, y$ مقدارين مضروبين فى بعضهما وكذلك $x^2 . y^2$:

$$\therefore 2x+\left[x^2\left(2y\frac{dy}{dx}\right)+y^2.(2x)\right]=0$$

$$\therefore 2x+2x^2y\frac{dy}{dx}+2xy^2=0$$

$$\therefore 2x^2y\frac{dy}{dx}=-2x-2xy^2=-2x\left(1+y^2\right)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{-2x\left(1+y^2\right)}{2x^2y}\qquad=\frac{-\left(1+y^2\right)}{xy}$$

$$\therefore \frac{dx}{dy}=\frac{-xy}{\left(1+y^2\right)}\quad=\frac{-1}{\left(1+y^2\right)^{\frac{1}{2}}}\times\frac{y}{\left(1+y^2\right)}$$

$$=\frac{-y}{\left(1+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{-y}{\sqrt{\left(1+y^2\right)^3}}$$

(١٩) أوجد تفاضل الدالة : –

$$y=\frac{9x^2}{3x-2}-(x-3)(3x-1)$$

الحــــــل :- فى هذه المسألة ، نستخدم قاعدة القسمة للحد الأول وحـاصل الضـرب للحد الثانى ، هكذا : -

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(3x-2)(18x)-9x^2(3)}{(3x-2)^2}-[(x-3)(3)+(3x-1)(1)]$$

$$=\frac{54x^2-36x-27x^2}{(3x-2)^2}-(3x-9+3x-1)$$

$$=\frac{27x^2-36x}{(3x-2)^2}-(6x-10)$$

وبتوحيد المقامات : -

$$=\frac{27x^2-36x-(6x-10)(3x-2)^2}{(3x-2)^2}$$

ويمكن إختصار هذه النتيجة .

(٢٠) أوجد $\frac{dy}{dx}$ **للدالة** : $y=\left[\sqrt{x-2}+\frac{2}{\sqrt{x-2}}\right]^5$

الحــــــل :-

$$\frac{dy}{dx}=5\left[\sqrt{(x-2)}+\frac{2}{\sqrt{(x-2)}}\right]^4\times d.c.of\left[\sqrt{x-2}+\frac{2}{\sqrt{x-2}}\right]$$

$$،d.c.of\left[\sqrt{x-2}+\frac{2}{\sqrt{x-2}}\right]=\frac{1}{2\sqrt{x-2}}\times 1-\frac{1}{\sqrt{(x-2)^3}}\Bigg]$$

$$\therefore\frac{dy}{dx}=5\left[\frac{\sqrt{x-2}.\sqrt{x-2}+2}{\sqrt{x-2}}\right]^4\left[\frac{(x-2)-2}{2(x-2)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

$$=5\left[\frac{x-2+2}{\sqrt{x-2}}\right]^4\left[\frac{x-4}{2(x-2)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

$$=\frac{5\,x^4}{2\,(x-2)^2}\,\frac{(x-4)}{(x-2)^{\frac{3}{2}}}\quad=\frac{5x^4(x-4)}{2(x-2)^{\frac{7}{2}}}$$

(٢١) أوجد المشتقة الأولى للدالة : -

$$f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$$

الحـــــل :- نضع الدالة فى الصورة الأسية كالتالى : -

$$y=\left\{x+\left[x+(x)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

وهنا يلزم إجراء عملية تفاضل متسلسل (بالتتابع) chain rule

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left\{x+\left[x+(x)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}\right\}^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{d}{dx}\left\{x+\left[x+(x)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{x+\left[x+(x)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{-1}{2}}\times\left\{1+\frac{1}{2}\left[x+(x)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{-1}{2}}\times\frac{d}{dx}\left[x+(x)^{\frac{1}{2}}\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{x+\left[x+(x)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{-1}{2}}\times\left\{1+\frac{1}{2}\left[x+(x)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{-1}{2}}\times\left[1+\frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}\right]\right\}$$

$$=\left[\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{(x)}}}}\right]\left[1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\times\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right]$$

(٢٢) إذا كانت $y=\left(x^2+2x+1\right)^3$

وكانت : - $x=3t^2+2t-1$

فأوجد $\dfrac{dy}{dt}$

الحـــــل :-

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$$

، $$\frac{dy}{dx}=3\left(x^2+2x+1\right)^2.(2x+2)=6(x+1)\left(x^2+2x+1\right)^2$$

$$\text{،}\quad \frac{dx}{dt}=6t+2=2(3t+1)$$

$$\therefore \frac{dy}{dt}=6(x+1)\left(x^2+2x+1\right)^2\times 2(3t+1)$$

$$=12(x+1)\left(x^2+2x+1\right)^2(3t+1)$$

(٢٣) أوجد المشتقة النونية للدالة : –

$$y=\frac{1}{2x+3}$$

الحـــــــل :–

$$y=(2x+3)^{-1}$$

والمشتقة الأولى : – $y^{`}=-1(2x+3)^{-2}\times 2=-2(2x+3)^{-2}$

والمشتقة الثانية : – $y^{``}=4(2x+3)^{-3}\times 2=8(2x+3)^{-3}$

والمشتقة الثالثة : – $y^{```}=-24(2x+3)^{-4}\times 2=-48(2x+3)^{-4}$

والمشتقة الرابعة : – $y^{IV}=192(2x+3)^{-5}\times 2=384(2x+3)^{-5}$

ولإيجاد المشتقة النونية يُلاحظ مايلى :–

(١) أن المشتقات تبادلية الإشارة أى أنها مرة موجبة والأخرى سالبة وأن ترتيب المشتقات (الأولى ، والثالثة ، والخامسة ، ....) عندما يكون فردياً فإن قيمة المشتقة تكون سالبة . وعندما يكون ترتيبها زوجياً فإن قيمة المشتقة موجبة

وبذلك فإنه يمكن التعبير عن الخاصية السابقة للمشتقة النونية بأنها $(-1)^n$ فمثلاً عندما $n=3$ وهى فردية فإن الإشارة تُصبح سالبة : $(-1)^3=-1$

(٢) معامل المشتقة كالتالى (بإهمال الإشارات) :

$2 , 8 , 48 , 384 , ...$

المشتقة الأولى [عندما $n=1$] : $2=2^1\ .\ 1\,!=2^n\times n\,!$

المشتقة الثانية [عندما $n=2$] : $8=2^2\ .\ 2\,!=2^n\times n\,!$

المشتقة الثالثة [عندما $n=3$] : $48=2^3\ .\ 3\,!=2^n\times n\,!$

المشتقة الرابعة [عندما $n=4$] : $384=2^4\ .\ 4\,!=2^n\times n\,!$

(٣) عند أخذ قوة أو أس المقدار $(2x+3)$ فى الإعتبار :-

المشتقة الأولى ، $n=1$: $\quad (2x+3)^{-2} = \dfrac{1}{(2x+3)^2} = \dfrac{1}{(2x+3)^{n+1}}$

المشتقة الثانية ، $n=2$: $\quad (2x+3)^{-3} = \dfrac{1}{(2x+3)^3} = \dfrac{1}{(2x+3)^{n+1}}$

المشتقة الثالثة ، $n=3$: $\quad (2x+3)^{-4} = \dfrac{1}{(2x+3)^4} = \dfrac{1}{(2x+3)^{n+1}}$

المشتقة الرابعة ، $n=4$: $\quad (2x+3)^{-5} = \dfrac{1}{(2x+3)^5} = \dfrac{1}{(2x+3)^{n+1}}$

ومما سبق سنجد أن المشتقة النونية للمقدار $\dfrac{1}{2x+3}$ هى :-

$$f^n(x) = (-1)^n \cdot \frac{2^n \cdot n!}{(2x+3)^{n+1}}$$

مثـــــال :-

المشتقة الثالثة للمقدار ذاته تساوى :

$$f^3(x) = (-1)^3 \cdot \frac{2^3 \cdot 3!}{(2x+3)^{3+1}} = \frac{-1\times 8\times(3\times 2\times 1)}{(2x+3)^4}$$

$$= \frac{-48}{(2x+3)^4}$$

Exercise "8"

اكتب المشتقة الأولى والثانية والثالثة للدوال الآتية فى x :

(١) .... $x^2\ (2x-3)$

(٢) .... x^{2a}

(٣) .... $3x^4-4x^3+2x^2-7x+2$

(٤) .... $2x^5-3x^3+4x-1$

(٥) .... $\dfrac{1}{x}$

(٦) .... $\sqrt{x}$

(٧) .... $\sqrt{2x+1}$

(٨) .... $\dfrac{1}{x^2}$

(٩) أوجد المعامل التفاضلى من الرتبة "n" للمقدار $\dfrac{1}{a^2-x^2}$

ملحوظة : $\dfrac{1}{a^2-x^2}=\dfrac{1}{2a}\left[\dfrac{1}{a+x}+\dfrac{1}{a-x}\right]$

(١٠) إذا كانت :- $f(x)=6x^2-5x+3$

فأوجد $f'(0)$ وما هى قيمة x التى تجعل $f'(0)=0$ وما هى النقطة المناظرة على المنحنى $f(x)$.

(١١) أوجد قيمة x التى يكون عندها ميل المنحنى :

$$f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}+6x+1$$

مساوياً للصفر وما هى قيمة x التى يكون عندها ميل $f'(x)$ مساوياً للصفر وما هى قيمة $f'(x)$ المناظرة .

(١٢) إذا كانت : $f(x)=x^3-5x^2+7$

فأوجد $f'(1)$ ، $f''(2)$ وعند أى قيمة لـ x تتلاشى قيمة $f'(x)$.