الباب الثامن

تطبيقات على القيم العظمى والصغرى

Applied problems in maxima and minima

٨-١ :- عام :- إن أول خطوة فى حل المسائل من هذا النوع هو معرفة أى من المتغيرات ، مطلوب حساب قيمته العظمى أوالصغرى .

أى معرفة المتغير التابع y ، ثم معرفة المتغير المستقل x ثم نكتب معادلة فيما بين y , x وأى متغيرات أخرى فى المسألة يجب ملاشاتها بالتعويض بحيث يبقى لنا المتغير المستقل x فقط والمتغير التابع y .

ثم نفاضل y بالنسبة إلى x ثم نساوى y' بالصفر لإيجاد قيم x الحرجة .

وفى النهاية نحسب أيا من قيم x الحرجة هى نهاية عظمى أم صغرى .

(١) إذا كانت سرعة جسم بالقدم / ثانية تُعطى بالعلاقة :-

$$V(t) = t^2 - 4t + 5 \quad , \quad t \geq 0$$

حيث t الزمن بالثوانى .

فأوجد الزمن اللازم لكى تُصبح السرعة عظمى نسبية أو صغرى نسبية .

الحـــــل :-

نوجد $V'(t)$ ونساويها بالصفر ونحل المعادلة لإيجاد قيم t الحرجة .

$$V'(t) = 2t - 4 = 2(t-2)$$

وعندما $V'(t) = 0$ فإن $t = 2$ وهى القيمة الحرجة للزمن

ولمعرفة ما إذا كانت $t = 2$ هى قيمة عظمى أم صغرى ، نختبر $V'(t)$

عنـــدما $0 \leqq t < 2$ وعندما $t = 2$

وسوف نلاحظ أن $V'(t) < 0$ لقيم $0 \leqq t < 2$

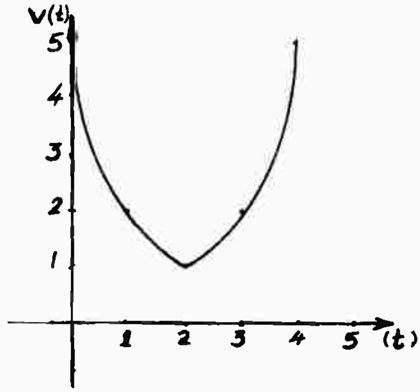
، $V'(t) > 0$ لقيم $t > 2$

مما يعنى أن V لها نهاية صغرى نسبية عندما $t = 2$ ، $V(2) = 1\ ft/s$

والآن ، لنختبر نقطة النهاية أى $t = 0$ وسوف تجد أن $V(0) = 5$

وسوف نجد كذلك أن $V^{`}(0)=-4$ وهى ذات قيمة سـالبة وبالتالى فإن V ، دالة تناقصية عند $t=0$.

ولذلك ، ففى الفترة $t \geqq 0$ فإن $V(0)$ تساوى $5\,ft/s$ وهى قيمة عظمى ، أنظر الرسم شكل (٨-١) .



شكل (٨-١)

(٢) كيف يمكنك التعبير عن رقم معين ، كمجموع رقمين بحيث يكون حاصل ضربهما أكبر ما يمكن .

الحـل :-

لنعتبر : أى رقم معين = a

أحد جزئيه = x

$\therefore$ $(a - x)$ هى الجزء الآخر من الرقم المعين .

وحاصل ضرب رقميه المكونين لجزئيه يساوى :-

$$x(a-x)=xa-x^2=y$$

ولكى يكون حاصل الضرب أكبر ما يمكن نوجد $y^{`}$ ونساويها بالصفر

$$y^{`}=a-2x=0$$

$$\therefore\ x=\frac{a}{2}$$

ولمعرفة ما إذا كانت $x=\frac{a}{2}$ قيمة عظمى أم لا ، سنأخذ قيمة أقل من $\frac{a}{2}$ ولتكن $\frac{a}{4}$ ،
ونأخذ قيمة أخرى أكبر من $\frac{a}{2}$ ولتكن $\frac{3a}{4}$ ثم نحسب قيمة $\frac{dy}{dx}$ عند : $x=\frac{a}{4},\frac{3a}{4}$

فإذا كان هنالك تغير فى الإشارة من (+) إلى (−) ، تكون $x=\frac{a}{2}$ قيمة عظمى :−

$$\frac{dy}{dx}\left(at \quad x=\frac{a}{2}\right)=a-\frac{2a}{4}=\frac{a}{2}(+ve)$$

$$\frac{dy}{dx}\left(at \quad x=\frac{3a}{4}\right)=a-\frac{6a}{4}=-\frac{a}{2}(-ve)$$

وعليه فإن $x=\frac{a}{2}$ هى فعلاً قيمة عظمى وعليه فإن الرقم المعطى يُقسم إلى جزئين تماماً فيكون حاصل ضربهما أكبر ما يمكن .

(٣) إذا اعتبرنا الرقم 100 كمجموع جزئين ، فاوجد قيمة كل من جزئيه بحيث يكون حاصل ضربهما أكبر ما يمكن .

الحـــــل :−

لنعتبر x أحد جزئى الرقم 100

∴ الجزء الآخر $= 100-x$

والآن حاصل ضرب الجزئين = p :−

$$p=x(100-x)=100x-x^2$$

نوجد p' ونساويها بالصفر

$$\therefore p' = 100-2x=0$$

$$\therefore 2x=100 \qquad \therefore x=50$$

وهى القيمة الحرجة الوحيدة .

ومثل المتبع فى المسألة السابقة نتأكد بطريقة y' من أن $x=50$ هى نهاية عظمى ، وعليه فإن حاصل ضرب جزئى الرقم 100 ، يكون أقصى ما يمكن عندما يكون كل من جزئيه متساويين وهو هنا 50 , $50+50=100$, $50\times 50=2500$

(٤) اوجد العدد الذى يزيد عن مربعه بأكبر قيمة ممكنة .

الحـــــل :-

نكتب أولاً المعادلة التى تعبر عن الفرق بـين العـدد ومربعـه وليكـن العـدد = x وليكـن الفرق هو f .

$$\therefore f = x - x^2$$

ثم نوجد f' ونساويها بالصفر ونحل المعادلة للحصول على قيم x الحرجة .

$$\therefore f' = 1 - 2x = 0$$

$$\therefore x = \frac{1}{2}$$

ولتحديد ما إذا كانت هذه القيمة عظمى أم لا نوجد المشتقة الثانية .

$$\therefore f'' = -2 \quad (-ve)$$

مما يعنى أن المشتقة الثانية دائماً سالبة

وهذا يعنى أن $x = \frac{1}{2}$ هى قيمة عظمى

$\therefore$ فالعدد الذى يزيد عن مربعه بأكبر قدر ممكن هو $\frac{1}{2}$ ،

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

(٥) ما هما العددان الموجبان اللذان مجموعهما = 20 وحاصل ضربهمـا أكـبر مـا يمكن .

الحـــــل :-

ليكن أحد العددين x $\therefore$ فالعدد الآخر :- $20 - x$

وحاصل ضربهما p

$$p = x(20 - x)$$
$$= 20x - x^2 \qquad , \quad x > 0 \ , \ 20 - x > 0$$

أى $0 < x < 20$

$$\frac{dp}{dx} = 20 - 2x \ ،$$

$$= 2(10 - x) = 0$$

$$\therefore x = 10$$

وعنـد $x = 10$ توجـد قيمـة حرجـة وللتـأكد مـن أنهـا عظمـى ننظـر إلى $\frac{dy}{dx}$ عندمـا $x < 10$ وعندما $x > 10$

فإذا كان هنالك تغير فى الإشارة من (+) إلى (-) تكون $x = 10$ نهاية عظمى وسوف نجـــــد أن :-

عندما	$x < 10$	$\frac{dp}{dx} > 0 \ (+ve)$
عندما	$x > 10$	$\frac{dp}{dx} < 0 (-ve)$
عندما	$x = 10$	$\frac{dp}{dx} = 0$

وعليـه فـإن $x = 10$ تمثـل نهايـة عظمـى ويمكـن الحصـول علـى نفـس النتيجـة إذا مـا استخدمنا طريقة المشتقة الثانية .

$$\frac{d^2p}{dx^2} = -2 \quad (-ve)$$

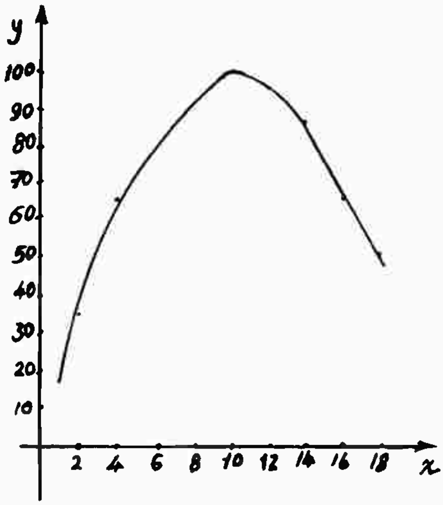
وهى سالبة دائماً مما يعنى وجود نهاية عظمى عند $x = 10$

وإذا نظرنا إلى الرســم شـكل (٨-٢) سـنجد أنـه مقعـر للأسـفل عنـد كـل نقطـة عليـه وللمنحنى قيمة عظمى عندما $x = 10$

وبذلك فإن العددان اللــذان مجموعهمـا = 20 وحـاصل ضربهمـا أكـبر مـا يمكـن همـا 10 , 10 وحاصل ضربهما = 100

ملحـــــوظة :- يمكن التأكد حسابياً من ذلك بتجربة أى عددين كالتالى :-

$2 + 18 = 20$	,	$2 \times 18 = 36$
$4 + 16 = 20$	,	$4 \times 16 = 64$
$6 + 14 = 20$	,	$6 \times 14 = 84$
$7 + 13 = 20$	,	$7 \times 13 = 91$
$8 + 12 = 20$	,	$8 \times 12 = 96$
$9 + 11 = 20$	,	$9 \times 11 = 99$
$10 + 10 = 20$	,	$10 \times 10 = 100$



شكل (٨-٢)

(٦) قُسم العدد 72 إلى جزئين بحيث يكون حاصل ضرب أحدهما فى مكعب الآخر، أكبر ما يمكن ، فما هما العددان .

الحـــــــل :-

لتكن y هى أحد الجزئين

$\therefore$ الجزء الآخر $= (72 - y)$

وحاصل ضربهما p :-

$$p = (72 - y) \times y^3$$
$$= 72y^3 - y^4$$

بعد ذلك نوجد $\frac{dy}{dx}$ ونساويها بالصفر

$$\therefore 216y^2 - 4y^3 = 0$$
$$\therefore 4y^2 (54 - y) = 0$$
$$\therefore y = 0 \quad , \quad y = 54$$

وهى القيمة الحرجة لـ y

وواضح أن $y=0$ لا تعنى شيئاً هنا لأنه إذا كان أحد الجزئين صفراً فالجزء الآخر $=(72-0)=72$ وحاصل ضربهما $=0$ ولا يساوى قيمة عظمى .

أما إذا وضعنا $y=54$

فنوجد $\frac{d^2p}{dy^2}$ لمعرفة ما إذا كانت قيمة y هذه تحقق نهاية عظمى أم لا ،

$$\frac{d^2p}{dy^2}=432y-12y^2$$

وبالتعويض بقيمة $y=54$ سنجد أن :-

$$\frac{d^2p}{dy^2}=-11664=(-ve)$$

وعليه فإنه عندما يكون أحد الجزئين $=54$ ويكون الجزء الآخر مساوياً $18\ (72-54)$

فإنه توجد نهاية عظمى .

(٧) ما هما العددان الموجبان اللذان مجموعهما $=100$ ومربع أحدهما مضروباً فى ضعف مكعب الآخر ، أقصى ما يمكن

الحـــــل :-

نفرض أن أحد العددين هو x

$\therefore$ العدد الآخر يكون $(100-x)$

والآن نكتب المعادلة كالتالى :-

$$p=x^2\times 2\left[(100-x)^3\right]$$

$$\text{،}\ p^{`}=4x(100-x)^3-6x^2(100-x)^2$$

$$=2x(100-x)^2\left[2(100-x)-3x\right]$$

$$=2x(100-x)^2\left[200-5x\right]$$

وبـــوضع $p^{`}=0$

$$\therefore 2x=0 \quad\rightarrow\quad x=0$$

$$\text{،}\ (100-x)^2=0 \quad\rightarrow\quad (100-x)=0 \quad\rightarrow x=100$$

$$\text{،}\ 200-5x=0 \quad\rightarrow\quad x=40$$

∴ قيم x الحرجة هى 40 , 100 , 0

ولما كانت :-

$$p(0)=0 \qquad , \qquad p(100)=0$$

$$p(40)=2(40)^2\left[(100-40)^3\right]$$

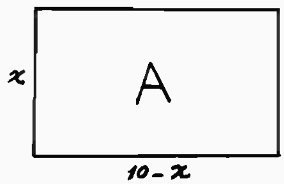
$$=3200\left[60^3\right] > 0$$

∴ فقيمة $x=40$ هى التى تحقق الشرط اللازم وعليه يكون الرقمان هما 60 , 40

(٨) قطعة سلك طولها 20 متر يراد تشكيلها بحيث تكون ذات شكل مستطيل فمـا هى أبعاد هذا المستطيل بحيث يحيط بأكبر مساحة ممكنة .

الحـــــل :-

أنظر الرسم شكل (٨-٣) .



شكل (٨-٣)

إذا اعتبرنا أن عرض المستطيل $= x$

فيكون طوله $\dfrac{20-2x}{2} = (10-x)$

، مساحة المستطيل $A = x(10-x)$

$$\frac{dA}{dx}=10-2x$$

وبــوضع $A^{`}=0$

$$\therefore\quad 2(5-x)=0$$

$$\therefore\quad x=5$$

ولمعرفة ما إذا كانت $x = 5$ تحقق نهاية عظمى أم لا ، نختار قيمة أكبر من x قليلاً ولتكن 6 وقيمة أقل قليلاً ولتكن 4 ونثبت أن A' تغير إشارتها موجب إلى سالب ،

$$A'(4) = 2 \quad , \quad A'(6) = -2$$

$\therefore$ $x = 5$ هى بالتأكيد القيمة التى تحقق الشرط اللازم (أكبر مساحة)

وعليه تكون أبعاد المستطيل $5 \;,\; (10-5) = 5$

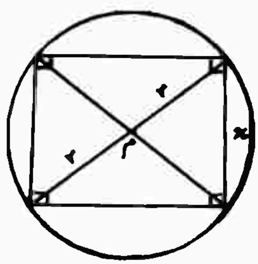
أى أن طوله = عرضه أى أنه يلزم أن يكون الشكل على هيئة مربع طول ضلعه $= 5m.$

ويمكن إثبات أن $x = 5$ هى نهاية عظمى إذا ما أوجدنا A'' فسنجد أنها سالبة مما يؤكد الإجابة السابق الحصول عليها .

(٩) ما هى أكبر مساحة ممكنة لمستطيل يمكن رسمه داخل دائرة نصف قطرها $= r$

الحـــــل :-

أنظر الرسم شكل (٨-٤) .



شكل (٨-٤)

من الرسم يتضح أن قطر المستطيل $= 2r$

، طول ضلع المستطيل (العرض) $= x$

$\therefore$ طول المستطيل $= \sqrt{(2r)^2 - x^2}$

$= \sqrt{4r^2 - x^2}$

ومساحة المستطيل = الطول × العرض $= A$

$$\therefore\ A = x\sqrt{4r^2 - x^2}$$

$$،\ A' = x \cdot \frac{d}{dx}\sqrt{\left(4r^2 - x^2\right)} + \sqrt{\left(4r^2 - x^2\right)} \cdot 1 = 0$$

$$\therefore A' = x \times \frac{1}{2}\left(4r^2 - x^2\right)^{\frac{-1}{2}} \times -2x + \left(4r^2 - x^2\right)^{\frac{1}{2}} = 0$$

وبالإختصار :-

$$\therefore \frac{4r^2 - 2x^2}{\left(4r^2 - x^2\right)^{\frac{1}{2}}} = 0$$

ولما كان المقام $\left(4r^2 - x^2\right)^{\frac{1}{2}}$ لا يمكن أن يساوى الصفر لأنه يمثل طول المستطيل ، لذلك فإن البسط لابد وأن يساوى الصفر :-

$$\therefore 4r^2 - 2x^2 = 0$$

$$\therefore 4r^2 = 2x^2$$

$$\therefore x^2 = 2r^2$$

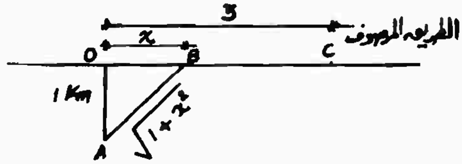
$$\therefore x = r\sqrt{2}$$

وعليه يكون طول المستطيل :-

$$\left(4r^2 - x^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left[4r^2 - \left(r\sqrt{2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \left[4r^2 - 2r^2\right]^{\frac{1}{2}} = \left[2r^2\right]^{\frac{1}{2}} = r\sqrt{2}$$

أى أن طول المستطيل = عرضه = $r\sqrt{2}$ = نصف قطر الدائرة مضروباً فى $\sqrt{2}$ وواضح أنه لابد أن يكون مربعاً طول ضلعه = $r\sqrt{2}$.

(١٠) دراجة عند "A" وعلى بعد "1"km من أقرب نقطة لها على طريق مرصوف "o" ، أنظر الرسم شكل (٨–٥)



شكل (٨–٥)

يريد قائدها أن يتجه إلى "C" على الطريق المرصوف على بعد "3" km من نقطة "O" فإذا كانت سرعته على الطريق غير المرصوف "AO" تعادل "10" km/h في حين أنها تبلغ "20" km/h على الطريق "CO" المرصوف .

فعند أى نقطة "B" على الطريق المرصوف يجب أن يتجه قائد الدراجة حتى يصل إلى "C" فى أقل زمن ممكن .

الحـــــل :-

من الشكل ،

$$AO = 1 \ \ km$$
$$, OB = x \ \ km$$
$$, AB = \sqrt{1+x^2} \ \ km$$
$$, BC = 3 - x \ \ km$$

وعلى الراكب أن يتجه بالدراجة من A إلى B " طريق غير مرصوف أيضاً " ثم من B إلى C عبر طريق مرصوف .

والزمن اللازم لذلك = المسافة ÷ السرعة

$$T = \frac{\sqrt{1+x^2}}{10} + \frac{(3-x)}{20}$$

ولإيجاد قيمة x التى تكون عندها T نهاية صغرى ، نفاضل T بالنسبة إلى x ونساويها بالصفر .

$$\therefore T^{\cdot} = \frac{1}{10} \times \frac{1 \times 2x}{2\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{20}$$

$$= \frac{x}{10\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{20}$$

$$= \frac{2x - \sqrt{1+x^2}}{20\sqrt{1+x^2}} = 0$$

ولما كان المقام موجب دائماً وأكبر من الصفر ، لذلك فالبسط يساوى الصفر

$$\therefore 2x - \sqrt{1+x^2} = 0$$

$$\therefore \sqrt{1+x^2} = 2x$$
$$\therefore 1+x^2 = 4x^2$$
$$\therefore x^2 = \frac{1}{3}$$
$$\therefore \quad x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

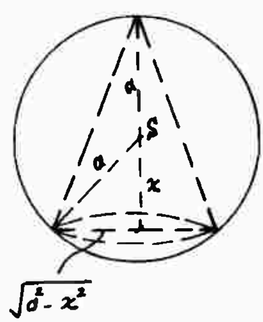
والقيمة السالبة مرفوضة لأنه ليس لها معنى فى هذا النوع من المسائل وعليه فإن قيمة x الحرجة هى $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

وبذلك فإن على قائد الدراجة أن يسير فى اتجاه AB بحيث يقطع OC عند نقطة B على بعد $x = OB = \frac{1}{\sqrt{3}} \cong 0.58 \ km$

(١١) أوجد أبعاد أكبر مخروط دائرى قائم يمكن وضعه فى كرة نصف قطرها (a)

الحـــــل :-

كما هو موضح بالشكل (٨-٦) .



شكل (٨-٦)

نفترض أن x هى المسافة من مركز الكرة s إلى مركز قاعدة المخروط o والتى يبلغ نصف قطر قاعدتها :- $\sqrt{a^2 - x^2}$

وأن ارتفاع المخروط = $a + x$

، ∵ حجم المخروط القائم = $\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × الإرتفاع :-

$$V = \frac{1}{3}\pi\ r^2 h$$

حيث r تمثل نصف قطر قاعدة المخروط $\left(\sqrt{a^2 - x^2}\right)$

، h = ارتفاع المخروط .

$$\therefore V = \frac{\pi}{3}\left(\sqrt{a^2 - x^2}\right)^2 . (a + x)$$

$$\therefore V' = \frac{\pi}{3}\left[a^2 - x^2 - 2x\,(a + x)\right]$$

$$= \frac{\pi}{3}(a + x)(a - 3x)$$

وبوضع $V' = 0$

$$\therefore \frac{\pi}{3}(a + x)(a - 3x) = 0$$

$$\therefore x_1 = -a \qquad , \qquad x_2 = \frac{a}{3}$$

والإجابة $x_1 = -a$ غير ذات معنى لأنه لا توجد مسافة سالبة .

ولمعرفة ما إذا كانت $x = \frac{a}{3}$ تحقق أقصى حجم ممكن من عدمه نوجد V'' :-

$$\therefore V'' = \frac{-2}{3}(a + 3x) = (-ve)$$

أى سالبة .

وهى سالبة دائماً لجميع قيم x الموجبة ، a الموجبة كذلك وعليه فإنه عندما تكون $x = \frac{a}{3}$ أى عندما تكون x مساوية لسدس $\frac{1}{6}$ قطر الكرة يكون حجم المخروط أكبر ما يمكن ويساوى :

$$V = \frac{\pi}{3}\left(a^2 - x^2\right) . (a + x)$$

$$V = \frac{\pi}{3}\left(a^2 - \frac{a^2}{9}\right) . \left(a + \frac{a}{3}\right) = \frac{32}{81}\pi\, a^3$$

(١٢) غلاية إسطوانية الشكل مفتوحة من أعلى وذات حجم ثابت قدره V فإذا كان سطح قاعدة الغلاية يتكلف ضعف السطح الأسطوانى .

فأوجد نسبة الارتفاع إلى نصف القطر بحيث تكون التكلفة أقل ما يمكن .

الحـــــــل :-

نعتبـــــــر :-

$r =$ نصف القطر

$h =$ ارتفاع الغلاية

$2k =$ تكلفة وحدة المساحة من سطح القاعدة

$k =$ تكلفة وحدة المساحة للسطح الأسطوانى

$c =$ التكلفة الكلية

$$c = 2k\pi r^2 + 2k\pi r h$$

ثم نختزل المتغيرات فى الطرف الأيمن لتُصبح واحداً فقط وهو (r)

$$\because V = \pi r^2 h \quad , \quad \therefore h = \frac{V}{\pi r^2}$$

$$\therefore c = 2k\pi r^2 + 2k\frac{V}{r}$$

وبتفاضل c بالنسبة إلى r :-

($V =$ ثابت)

$$\therefore c' = 4k\pi r - \frac{2kV}{r^2}$$

وبوضع $V = \pi r^2 h$ مرة ثانية ،

$$\therefore c' = 4k\pi r - 2k\pi h = 2k\pi(2r - h)$$

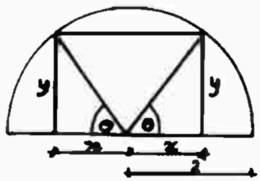
وبوضع $c' = 0$:-

$$\therefore 2r - h = 0 \qquad \therefore h = 2r$$

وبذلك فإنه عندما يصبح الارتفاع ضعف نصف القطر (القطر) فإن التكلفة تكون أقل ما يمكن .

(١٣) فى الشكل (٨-٧) ، نصف دائرة قطرها = 4 ، مطلوب أن نرسم بها مستطيل بحيث يكون ذو أكبر مساحة ممكنة ، فما هى أبعاده ؟

الحـــــــل :-



شكل [٨ - ٧]

المساحة (من الشكل)

$$A = 2x \,.\, y$$

$$,\ x = 2\cos\theta$$

$$,\ y = 2\sin\theta \therefore A = 2\,.\,x\,.\,y = 2\,.\,2\cos\theta\,.\,2\sin\theta = 8\sin\theta\cos\theta$$

$$\because \sin\theta\ \cos\theta = \frac{\sin 2\theta}{2}$$

$$\because A = 4\sin 2\theta$$

وسوف نوجد قيمة θ المناظرة لأكبر مساحة للمستطيل وذلك بإيجاد $A^{`}$ بالنسبة لـــ θ ومساواتها بالصفر ثم نوجد قيم θ :

$$A^{`} = \frac{dA}{d\theta} = 4\times\cos 2\theta\times 2 = 8\cos 2\theta$$

$$A^{`} = 8\cos 2\theta = 0$$

$$\therefore \cos 2\theta = 0 \qquad \therefore 2\theta = \frac{\pi}{2} \qquad \therefore \theta = \frac{\pi}{4}$$

ثم نوجد $A^{``}$ لمعرفة ما إذا كانت $\theta = \frac{\pi}{4}$ تحقق أقصى مساحة أم لا :-

$$A^{``} = 8\times -\sin 2\theta\times 2 = -16\sin 2\theta$$

فعند وضع $\theta = \frac{\pi}{4}$ أو $2\theta = \frac{\pi}{2}$ نجد أن $-ve = A^{``} = (-16)$

$\therefore$ عند $\theta = \frac{\pi}{4}$ تكون هنالك نهاية عظمى .

والمساحة $A =$

$$A = 4\sin 2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4\ units$$

(١٤) أوجد أبعاد المستطيل الذى مساحته A وحدة مربعة وطـول قطـره أقصـى مـا يمكن .

الحـــــل :-

أنظر الرسم شكل (٨-٨)

إذا اعتبرنا عرض المستطيل $= x$

وإذا اعتبرنا طول المستطيل $= y$

وإذا اعتبرنا قطر المستطيل $= z$

$$\therefore A = x\,y \qquad \therefore y = \frac{A}{x}$$

$$،\ z^2 = x^2 + y^2$$

$$\therefore z^2 = x^2 + \frac{A^2}{x^2}$$

وبالتفاضل بالنسبة إلى x

$$\therefore 2z\,\frac{dz}{dx} = 2x - \frac{2A^2}{x^3}$$

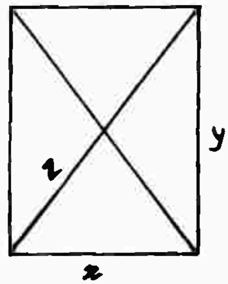
وبوضع $\frac{dz}{dx} = 0$ $\therefore$ الطرف الأيسر = صفر

$$\therefore 2x - \frac{2A^2}{x^3} = 0$$

$$\therefore x^4 = A^2$$

$$\therefore x^2 = A = x\,y \qquad \therefore x = y$$

وعليه فإن المستطيل يكون مربع .



شكل (٨-٨)

(١٥) أوجد عددين موجبين مجموعهما 24 وبحيث يكون :

أ - حاصل ضربهما أكبر ما يمكن

ب- مجموع مكعبيهما أصغر ما يمكن

الحـــــل :-

أولاً : نفرض أن العددين هما (x) , $(24 - x)$

نفرض أن حاصل ضربهما = y

$$\therefore y = x(24 - x) = 24x - x^2$$

$$، \; y' = 24 - 2x = 2(12 - x)$$

بوضع $y' = 0$

$$\therefore 12 - x = 0 \qquad \therefore x = 12$$

وهذه النقطة الحرجة الوحيدة لهذه الدالة .

ثم نوجد قيم الدالة y عند النقطة الحرجة وعند طرفى الفترة أى عند : 24 , 0 , 12

$$\therefore y_{(12)} = 24 \times 12 - (12)^2 = 288 - 144 = 144$$

$$، \; y(0) = 0$$

$$، \; y_{(24)} = 24 \times 24 - (24)^2 = 0 \qquad also$$

وعليه فإن أكبر قيمة لحاصل الضرب هى : $y = 144$

عندما $x = 12$

أى عندما يكون العددان $12 , 12$

ثانياً :- كما سبق فإن فرضنا أن العددين هما x , $24-x$ ومجموع مكعبيهما $= y$

$$\therefore y = (24-x)^3 + x^3$$

$$، y' = 3x^2 + 3(24-x)^2 \times -1$$

$$= 3x^2 - 3\left(576 - 48x + x^2\right)$$

$$= 3x^2 - 1728 + 144x - 3x^2$$

$$= 144x - 1728 = 144(x-12)$$

وبوضع $y' = 0$

$$\therefore 144(x-12) = 0$$

$$\therefore x = 12$$

وهى النقطة الحرجة الوحيدة لهذه الدالة .

وكما سبق فى أولاً ، نوجد قيم الدالة y عند $12,0,24$

$$\therefore y_{(12)} = (24-12)^3 + 12^3 = 1728 + 1728 = 3456$$

$$، y_{(0)} = (24)^3 + 0 = 13824$$

$$، y_{(24)} = 0 + 24^3 = 13824$$

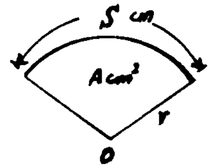
وواضح أن أصغر قيمة لمجموع المكعبين هى 3456 ونحصل عليها عندما $x = 12$ أى عندما يكون العددان هما $12 , 12$

كما أن أكبر قيمة لمجموع المكعبين تكون هى 13824 (أحد العددين صفر) .

(١٦) قطاع دائرى طول محيطه $= 64\ cm$. أوجد طول نصف قطر دائرته عندما تكون مساحة سطحه أكبر ما يمكن .

الحـــــل :-

أنظر الرسم شكل (٨ - ٩) .



شكل (٨ - ٩)

نفترض أن نصف قطر دائرة القطاع $= r$ ومركزه $= O$

، طول قوسه $= S\ cm$ ومساحته $= A\ cm^2$

(1) .... $A = \frac{1}{2} S.r$ ،

، ∵ محيط القطاع $= 64\ cm$ $\therefore S + 2r = 64$

(2) .... $\therefore S = 64 - 2r$

وبالتعويض فى المعادلة (1) عن قيمة S من المعادلة (2) : -

$$\therefore A = \frac{1}{2} r(64 - 2r)$$

$$= 32r - r^2$$

$$\frac{dA}{dr} = A' = 32 - 2r = 2(16 - r)$$ ،

وبوضع $A' = 0$ للحصول على القيم الحرجة

$\therefore 2(16 - r) = 0 \qquad \therefore r = 16$

∴ $r = 16$ هى النقطة الحرجة الوحيدة لهذه الدالة

وبإيجاد A''

$\therefore A'' = -2 \quad = -ve$

أى أنه عند $r = 16$ توجد نهاية عظمى لمساحة القطاع وتساوى $256cm^2$

أو بطريقة أخرى نوجد قيم الدالة A عند النقطة الحرجة $r=16$ وعند حدود الفترة r وهى $[0,32]$

$$A_{(16)} = 32\times16-(16)^2$$
$$= 512-256 \qquad = 256\ cm^2$$
$$،A_{(0)} = 0$$
$$،A_{(32)} = 32\times32-(32)^2 = 0$$

∴ أكبر قيمة لمساحة سطح القطاع : –

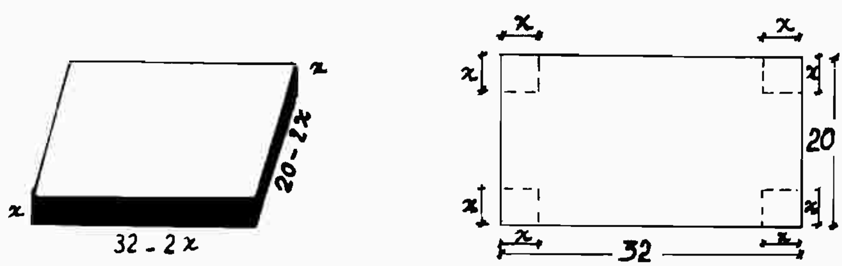
$$A_{\cdot} = 256\ \ cm^2$$

وذلك عندما $S=32\ cm ، r=16\ cm$

(١٧) قطعة صفيح معدنية على شكل مستطيل أبعـــــاده $20,32\ cm$ ، قطعت من أركانها الأربعة ، أربعة مربعات متساوية المساحة ثم تم ثنى الحواف لتكون صنـدوق على شكل متوازى مستطيلات مفتوح من الأعلى

والمطلوب حساب طـول ضلـع المربـع المقطـوع مـن الأجنـاب وبحيـث يكـون حجـم الصندوق أكبر ما يمكن .

الحــــــــل :– انظر الرسم شكل (٨ – ١٠) .



شكل (٨ – ١٠)

نفترض أن طول ضلع المربع الصغير المقطوع من الأجناب = $x\ cm$ ،

حجم الصندوق = $V \quad cm^3$

وإرتفاع الصندوق = $x \quad cm$

، أبعاد قاعدتيه = $(32-2\,x)\,,(20-2\,x)$

، حجم الصندوق = مساحة القاعدة × الإرتفاع = V

$\therefore V=(20-2x)\;(32-2x)\times x$ .... (١)

وطرفى الفترة المحصورة فيها x هى $[0,10]$

ثم نوجد $V^{\backslash}=\dfrac{dV}{dx}$ ونساويها بالصفر للحصول على قيم x الحرجة

$$,\because V\;=4x^3-104x^2+640x$$
$$\therefore V^{\backslash}=12x^2-208x+640$$
$$=4\left(3x^2-52x+160\right)$$

وبوضع $V^{\backslash}=0$

$$\therefore\left(3x^2-52x+160\right)=0$$
$$\therefore(3x-40)(x-4)\quad=0$$
$$\therefore x=4$$

والجواب الآخر مرفوض لأن $x=\dfrac{40}{30}$ لا تقع بداخل الفترة $[0,10]$

$\therefore$ هنالك قيمة حرجة وحيدة عندما $x=4$ وهى فى الفترة $[0,10]$

وبإيجاد قيم V عند $4,0,10$

$$\therefore V_{(4)}=4(4)^3-104(4)^2+640(4)$$
$$=256-1664+2560$$
$$=1152\quad cm^3$$

$$،V_{(0)}\;=\;0\;,\quad V_{(10)}=4(10)^3-104(10)^2+640(10)$$
$$=4000-10400+6400=0$$

$\therefore$ أكبر قيمة للحجم عند $(x=4)\;=\;1152\;cm^3$

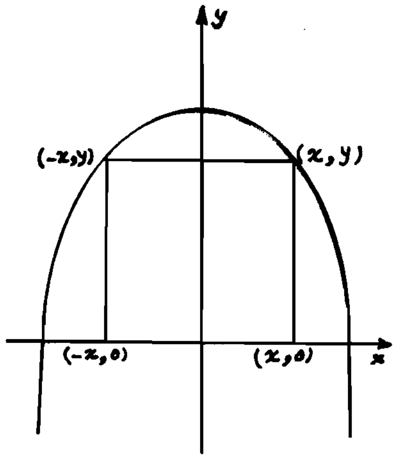
ويمكننا بإيجاد $V^{\backslash\backslash}$ إثبات أن $x\;=\;4$ تحقق نهاية عظمى ،

$$V'' = 24x - 208$$
$$= 24 \times 4 - 208 = 96 - 208 = -112 \ (-ve)$$

وهى سالبة مما يؤكد وجود نهاية عظمى للحجم عند $x = 4$

(١٨) مستطيل يقع رأسان من رؤسه على المحور الأفقى $x'Ox$ وفى جهتيه بينما يقع الرأسان الآخران على محيط قطع مكافئ معادلته $y = 9 - x^2$ ، أوجد أبعاد أكبر مستطيل يمكن رسمه بحيث يحقق الشرط المطلوب (أكبر مساحة) .

الحـــــل :- انظر الرسم شكل (٨ - ١١) .



شكل (٨ - ١١)

واضح أن القطع المكافئ متماثل حول محور الصادات OY كما وأن قيمة y لا تتغير سواء كانت x موجبة أم سالبة

وعليه فإنه إذا كانت إحداثيات أحد الرؤوس الواقعة على المنحنى هى (x, y) فإن إحداثيات الرأس الأخرى هى $(-x, y)$

وعليه فإن إحداثيات الرؤوس الأربعة هى : -

$$(-x, 0) \ , \ (x, 0) \ , \ (-x, y) \ , \ (x, y)$$

كما هو موضح بالشكل .

ومساحة المستطيل = A فرضاً ، ويجب أن نعبر عنها بدلالة x فقط أو y فقط ثم نحسب قيمة x أو y عندما : -

$$\frac{dA}{dx}=0 \quad or \quad when \quad \frac{dA}{dy}=0$$

$\because\ A = 2x.y=2x(9-x^2)=2(9x-x^3)$ .... (1)

$$\therefore \frac{dA}{dx}=2(9-3x^2)$$

وعندما $A^{`}=0$

$\therefore 9-3x^2=0 \qquad \therefore x^2=3 \qquad \therefore x=\pm\sqrt{3}$

ثم نوجد $A^{``}$ عند قيمتى x

، $A^{``}=-12x$

وسنجد أن $0 > A^{``}$ عند $x=+\sqrt{3}$ ، أى نهاية عظمى .

وبالتعويض فى المعادلة (1) عن قيمة x للحصول على أكبر مساحة : -

$\therefore A=2(9\sqrt{3}-3\sqrt{3})=12\sqrt{3}$ وحدة مربعة

وبعداه هما $x=\sqrt{3}$ ، 6

$as:, y=9-(\sqrt{3})^2=6$

(١٩) حقل مستطيل الشكل يقع على ضفة نهر يراد إحاطته بسور من جميع الجوانب باستثناء الجانب الواقع على النهر . فإذا كانت تكلفة السور 10 جنيهات لكل متر طولى لجانبيه المتعامدين على النهر ، بينما يتكلف المتر الطولى للسور الواقع على الضلع الموازى للنهر من الجهة الأخرى 15 جنيهاً .

فما هى أبعاد قطعة الأرض التى تحقق أكبر مساحة ممكنة وبتكلفة تبلغ 22500 جنيهاً.

الحـــــل :- لتكن $x\ mt$ هى عرض قطعة الأرض

، لتكن $y\ mt$ هى طول قطعة الأرض الموازية للنهر

، مساحة الحقل بالمتر المربع هى A

$$\therefore A = x.y(m^2) \qquad .... (1)$$

وتكلفة السور لعرض المستطيل = $10x$ جنيهاً

$\therefore$ تكلفة السور لكلٍ من عرضى المستطيل = $20\ x$ جنيهاً

وبالمثل تكون تكلفة السور للضلع الثالث للمستطيل (الطول) = $15y$ جنيهاً .

$$\therefore 20x + 15\ y = 22500 \qquad .... (2)$$

ويجب هنا أن نعبــر عن A بدلالة متغير واحد سواء x أو y حيث نوجــــد قيمة y بدلالة x من (2) ونعوض بها فى (1)

ومن المعادلة (2) : -

$$15\ y = 22500 - 20x \qquad \therefore y = 1500 - \frac{4}{3}x$$

وبالتعويض بقيمة y هذه فى المعادلة (1)

$$\therefore A = x\left(1500 - \frac{4}{3}x\right)$$

$$= 1500x - \frac{4}{3}x^2$$

ثم نوجد $A`$ ونساويها بالصفر للحصول على القيم الحرجة .

$$\therefore A` = 1500 - \frac{8}{3}x = 0$$

$$\therefore \frac{8}{3}x = 1500 \quad \therefore x = \frac{4500}{8} = 562.5\ \ mt$$

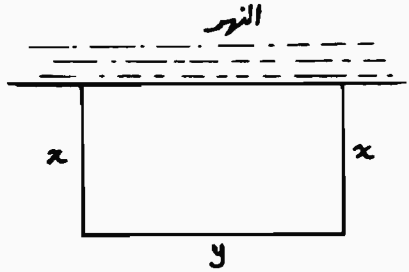
ثم نوجد قيمة y بالتعويض عن قيمة x هذه :

$$y = 1500 - \frac{4}{3} \times 562.5 \quad = 750\ \ mt.$$

وعليه فإن المساحة العظمى التى تحقق الشرط المذكور (تكلفة = 22500) : -

$$A = x.y = 562.5 \times 750 = 421875\ m^2 \cong 4.22\ \ km^2$$

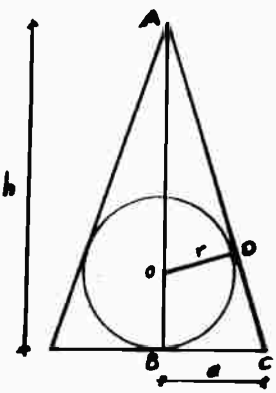
وبطول = $750\ mt$ وعرض = $562.5\ mt$



شكل (٨ – ١٢)

(٢٠) المطلوب حساب أبعاد مخروط دائرى قائم يحتوى بداخله كرة نصف قطرها r بحيث يكون حجمه أقل ما يمكن .

الحـــــل :– انظر الرسم شكل (٨ – ١٣) .



شكل (٨ – ١٣)

حجم المخروط = V

.... (1) $V = \frac{1}{3}\pi\ a^2h$,

وللتعبير عن الحجم بدلالة متغير واحد ، فإنه يلزم إيجاد علاقة بين كل من h, a :

ولدينا : $\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{DO}$

$$i.e. \frac{\sqrt{h^2+a^2}}{a}=\frac{h-r}{r} \qquad \text{..........} \; (2)$$

وبتربيع كل من الطرفين

$$\therefore \frac{h^2+a^2}{a^2}=\frac{h^2-2hr+r^2}{r^2}$$

$$\therefore r^2\left(h^2+a^2\right)=a^2\left(h^2-2hr+r^2\right) \qquad \text{..........} \; (3)$$

$$\therefore a^2=\frac{r^2h}{h-2r} \qquad \text{..........} \; (4)$$

وبالتعويض عن قيمة $\left(a^2\right)$ فى المعادلة (1)

$$\therefore V=\frac{1}{3}\frac{\pi\ h^2r^2}{(h-2r)} \qquad \text{..........} \; (5)$$

ولإيجاد أبعاد المخروط يلزم إيجاد V' بالنسبة إلى h

$$\therefore V'=\frac{dv}{dh}=\frac{\pi\ r^2h}{3}\left[\frac{h-4r}{(h-2r)^2}\right] \qquad \text{..........} \; (6)$$

وبوضع $V'=0$ ، نحصل على :

$h=0 \quad , \quad h=4r$

وكل من الدالـــــة (V) وتفاضلها V' تكون لا نهائية عندما $h=2r$] انظر المعادلتين 5،6 [

ولذلك فإنه لا يمكننا أخذ القيمة $h=2r$ ، كما لا يمكننا اعتبار القيمة $h=0$ لأنها غير ذات معنى . والقيمة الحرجة الوحيدة المقبولة هى $h=4r$

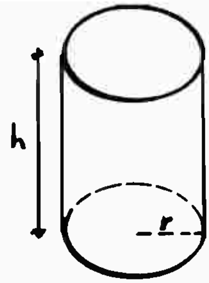
فإذا ما عوضنا بها فى $\frac{dV}{dh}$ سنجد أنها سالبة عندما $h<4r$ وموجبة عندما $h>4r$

وعليه فإن $h=4r$ تجعل الحجم أصغر ما يمكن ،

وعليه تكون أبعاد المخروط هى $h=4a \, , \, a=r\sqrt{2}$

(٢١) احسب أبعاد علبة اسطوانية الشكل مفتوحة من أعلى وذات حجم محدد بحيث يتم صنعها بأقل كمية معدن .

الحـــــل :- انظر الرسم شكل (٨ - ١٤) .



شكل (٨ - ١٤)

يجب أن نلاحظ فى هذه المسألة أن الحجم ثابت بينما مساحة السطح أقل ما يمكن .

ولنعتبر الحجم = V

، مساحة السطح = A

، نصف قطر القاعدة = r

، الارتفاع = h

$$\therefore A = \pi r^2 + 2\pi rh \qquad \text{.......... (1)}$$

فى حين أن كلاً من r , h تربطهما العلاقة :

$$V = \pi r^2 h = \text{constant} \qquad \text{.......... (2)}$$

ومن الأسهل هنا أن نختزل h : -

$$\therefore h = \frac{V}{\pi r^2} \qquad \text{.......... (3)}$$

وبالتعويض فى المعادلة (1) عن قيمة h من (3)

$$\therefore A = \pi r^2 + \frac{2V}{r} \qquad \text{.......... (4)}$$

ولما كان المطلوب أن تكون A نهاية صغرى ، لذلك نوجد $\frac{dA}{dr}$ ونساويها بالصفر ونحل المعادلة لإيجاد قيم r الحرجة .

$$\therefore \frac{dA}{dr} = 2\pi r - \frac{2V}{r^2}$$

وبالتعويض عن قيمة V من (2) : -

$$\therefore \frac{dA}{dr} = 2\pi r - \frac{2}{r^2} \times \pi r^2 h$$
$$= 2\pi r - 2\pi h = 2\pi (r - h)$$

وبوضع $\frac{dA}{dr}=0$ $\therefore (r-h)=0 \qquad \therefore r=h$

وهى القيمة الحرجة لـ r .

ولمعرفة ما إذا كانت قيمة r هذه تحقق نهاية صغرى للمساحة أم لا ، نستخدم طريقة المشتقة الأولى $\frac{dA}{dr}$ ونوجد قيمتها عندما $r<h$ وعندما $r>h$.

وسوف نجد أنه عندما $r<h$ فإن $\frac{dA}{dr}$ تكون سالبة بينما عندما $r>h$ فإن $\frac{dA}{dr}$ تكون موجبة .

وعليه فإن $\frac{dA}{dr}$ تُغير إشارتها من سالب إلى موجب .

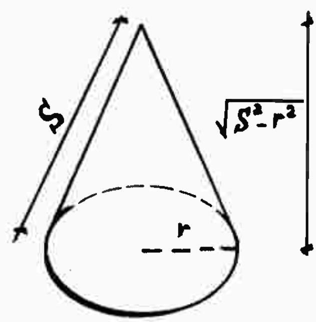
$\therefore r=h$ تحقق النهاية الصغرى

$\therefore$ تكون مساحة السطح أصغر ما يمكن عند ثبوت الحجم عندما يكون ارتفاع الاسطوانة مساوياً لنصف قطرها .

(٢٢) احسب نصف قطر فتحة وعاء مخروطى مفتوح من جهة القاعدة معلوم طول راسمه بحيث يكون ذو أكبر حجم ممكن .

الحـــــل :- انظر الرسم شكل (٨ - ١٥) .

حجم المخروط = $\frac{1}{3}$ × القاعدة × الارتفاع .



شكل (٨ - ١٥)

$$\therefore V = \frac{1}{3}\pi \ r^2\sqrt{S^2 - r^2}$$

وفى هذه المسألة مطلوب أن تكون V ذات أكبر حجم ممكن .

ويلزم إيجاد $\frac{dV}{dr}$ ثم نساويها بالصفر ونوجد قيم r الحرجة .

$$\therefore \frac{dV}{dr} = \left[\frac{\pi \ r^2}{3}.\frac{1}{2}\left(s^2 - r^2\right)^{\frac{-1}{2}}.(-2r)\right] + \left[\left(S^2 - r^2\right)^{\frac{1}{2}}.\frac{2\pi \ r}{3}\right]$$

$$\therefore \frac{dV}{dr} = -\frac{\pi \ r^3}{3\left(S^2 - r^2\right)^{\frac{1}{2}}} + \frac{2\pi \ r}{3}\left(S^2 - r^2\right)^{\frac{1}{2}} = 0$$

$$\therefore \frac{2\pi r\left(S^2 - r^2\right) - \pi \ r^3}{3\left(s^2 - r^2\right)^{\frac{1}{2}}} = 0$$

$$\therefore 2\pi \ r\left(s^2 - r^2\right) - \pi \ r^3 = 0$$

$$\therefore 2\pi \ rs^2 - 3\pi \ r^3 = 0$$

$$\therefore 2\pi \ s^2 = 3\pi \ r^2$$

$$\therefore r = \pm s\sqrt{\frac{2}{3}}$$

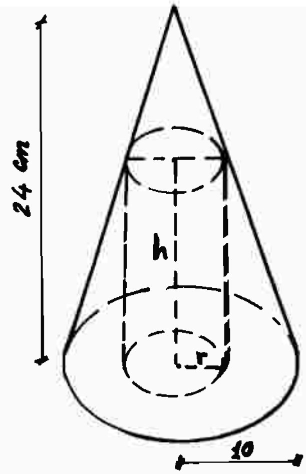
وبالطبع فإن القيمة السالبة مرفوضة .

وعليه فإن $r = S\sqrt{\frac{2}{3}}$ تحقق أكبر حجم .

(٢٣) أوجد أبعاد أكبر إسطوانة دائرية قائمة يمكن وضعها بداخل مخروط دائرى قائم نصف قطر قاعدته = $10 \ cm$ وإرتفاعه $24 \ cm$

الحـــل :-

انظر الرسم شكل (٨ - ١٦) .



شكل (٨ – ١٦)

لنعتبر : نصف قطر قاعدة الإسطوانة = $r \quad cm$

، ارتفاع الاسطوانة = $h \quad cm$

، حجم الاسطوانة = $V \quad cm^3$

ويوضح الشكل (a) الاسطوانة بداخل المخروط بينما يوضح الشكل (b) مقطع طولى في اتجاه محور المخروط والاسطوانة .

ويمكن تمثيل العلاقة بين كل من الحجم V ، r ، h كالتالى

$$V = \pi \ r^2 h \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

ويجب البحث عن معادلة أخرى تجمع بين كل من r , h حتى يُصبح لدينا معادلتين في كل من r , h حتى يمكننا أن نستعيض عن أحدهما بدلالة الآخر وبذلك نحصل على معادلة بين V , r فقط أو V , h فقط .

ومن الشكل (b) نجد أن : –

$$\frac{24-h}{r} = \frac{24}{10}$$

$$\therefore 240 - 10h = 24r$$

$$\therefore h = \frac{240-24r}{10} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

وبالتعويض في المعادلة (1) عن قيمة h من (2)

$$\therefore V = \frac{\pi\ r^2(240-24r)}{10} = \frac{\pi}{10}\left(240r^2 - 24r^3\right) \qquad \text{..........} \quad (3)$$

$$،\ \frac{dV}{dr} = V' = \frac{\pi}{10}\left(480r - 72r^2\right) = 0$$

$$\therefore 24r(20-3r) = 0$$

$$\therefore r = 0 \quad , \quad r = \frac{20}{3}$$

ثم نوجد قيم الدالة V عند القيم الحرجة لـ r وعند طرفي الفترة $[0, 10]$

$$،\ V_{(0)} = 0$$

$$,\ V_{\left(\frac{20}{3}\right)} \cong 1185\,\pi \ \ cm^3$$

$$،\ V_{(10)} = 0$$

وعليه فإن أقصى قيمة للحجم تكون عندما $r = \frac{20}{3}$

وتكون h مساوية لـ :

$$h = \frac{240 - 24 \times \frac{20}{3}}{10} = \frac{240-160}{10} = 8 \ \ cm.$$

وعليه فإن حجم أكبر إسطوانة يمكن وضعها داخل المخروط المُعطى هو :

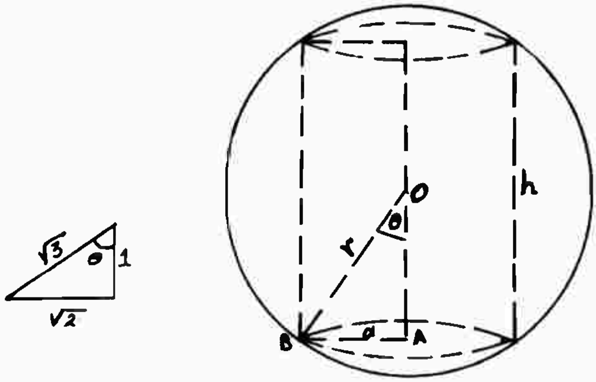
$1185 \ \ cm^3$.

وهى تتحقق بنصف قطر قاعدة = $\frac{20}{3}$ وارتفاع = $8 \ \ cm$

(٢٤) ما هو أكبر حجم لاسطوانة دائرية قائمة يمكن وضعها داخل كرة نصف قطرها = r .

الحـــــل :-

انظر الرسم شكل (٨ - ١٧) .



شكل (٨ – ١٧)

لتكن زاوية θ هـى الزاويـة BOA عنـد مركـز الكـرة بـين نصـف القطـر BO ونصـف الإرتفاع OA

ومن المثلث القائم الزاوية OAB :

$$a = r\sin\theta \qquad , \qquad h = 2r\cos\theta$$

$$\therefore V = \pi\, a^2 h = \pi\,.\, r^2 \sin^2\theta\,.\, 2r\cos\theta$$

$$= 2\pi r^3 \sin^2\theta\,\cos\theta$$

وحيث أن : $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

$$\therefore V = 2\pi r^3 \cos\theta\left(1 - \cos^2\theta\right)$$

$$= 2\pi r^3 \left(\cos\theta - \cos^3\theta\right)$$

ثم نوجد $\frac{dV}{d\theta}$ ونساويها بالصفر ونحل المعادلة لإيجاد قيم θ الحرجة

$$\therefore \frac{dV}{d\theta} = -2\pi r^3 \sin\theta\left(1 - 3\cos^2\theta\right)$$

فإذا ما وضعنا هذا المقدار = صفر فإنه إما :-

$$\sin\theta = 0 \qquad or \qquad \left(1 - 3\cos^2\theta\right) = 0$$

، $\sin\theta = 0$ عندما : $\theta = 0\ ,\ \pi$ والحالتين مرفوضتين لأن ذلك غير منطقى

إما إذا كانت :-

$$1-3\cos^2\theta = 0 \qquad \therefore \cos^2\theta = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \theta = \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}$$

وهى الزاوية التى تعطى أكبر حجم .

ومن الشكل (b) نجد أن :

$$\sin\theta = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

ثم نوجد قيم a , h كما يلى :

$$a = r\sin\theta = \frac{r}{3}\sqrt{6}$$

$$h = 2r\cos\theta = 2r\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2r}{3}\sqrt{3}$$

وبالتعويض مرة ثانية فى معادلة الحجم V

$$V = \pi a^2 h = \frac{\pi r^2}{9}(6)\,.\,\frac{2}{3}r\sqrt{3} = \pi r^3\frac{4}{9}\sqrt{3}$$

(٢٥) إذا كان مجموع حجمى كرة ومكعب ، ثابت ، فبين أن مجموع مساحة سطحيهما تكون أكبر ما يمكن عندما يكون قطر الكرة مساوياً لطول ضلع المكعب

الحـــل :-

حجم الكرة = $\frac{4}{3}\pi r^3$

حجم المكعب = S^3

مساحة سطح الكرة = $4\pi r^2$

مساحة سطح المكعب = $6S^2$

والحجم الكلى = ثابت = $\frac{4}{3}\pi r^3 + S^3 = k$

والمطلوب هو أن يكون الحجم الكلى ، نهاية عظمى .

إلا أن معادلة الحجم الكلى ، تحتوى على متغيرين وهما s , r .

والمطلوب هو معادلة فى متغير واحد .

$$\because \frac{4}{3}\pi\ r^3 + S^3 = k \text{ ،}$$

$$\therefore \frac{4}{3}\pi\ r^3 = k - S^3 \qquad \ldots\ldots\ldots\ (1)$$

$$\therefore r^3 = \frac{3\left(k - S^3\right)}{4\pi}$$

$$\therefore r = \left[\frac{3\left(k - S^3\right)}{4\pi}\right]^{\frac{1}{3}}$$

، مساحة السطح الكلى :-

$$y = 4\pi\ r^2 + 6S^2$$

وبالتعويض فى هذه المعادلة عن قيمة r :-

$$\therefore y = 4\pi\left[\frac{3\left(k - S^3\right)}{4\pi}\right]^{\frac{2}{3}} + 6S^2$$

$$= (4\pi)^{\frac{1}{3}} \cdot (3)^{\frac{2}{3}} \cdot \left(k - S^3\right)^{\frac{2}{3}} + 6S^2$$

ولجعل y نهاية عظمى ، نوجد $\frac{dy}{ds}$ ونساويها بالصفر ثم نوجد قيم S الحرجة :-

$$\frac{dy}{ds} = (4\pi)^{\frac{1}{3}} \cdot (3)^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{2}{3}\left(k - S^3\right)^{-\frac{1}{3}} \cdot \left(-3S^2\right) + 12S$$

$$= \frac{(3)^{\frac{2}{3}} \times (4\pi)^{\frac{1}{3}} \times \left(-6S^2\right)}{3\left(k - S^3\right)^{\frac{1}{3}}} + 12S$$

وبمساواة $\frac{dy}{ds}$ بالصفر :-

$$\therefore \frac{(3)^{\frac{2}{3}} \times (4\pi)^{\frac{1}{3}}\left(-6S^2\right) + 12S\left[3\left(k - S^3\right)^{\frac{1}{3}}\right]}{3\left(k - S^3\right)^{\frac{1}{3}}} = 0$$

$$\therefore (3)^{\frac{2}{3}} \times (4\pi)^{\frac{1}{3}} \times \left(-6S^2\right) = 36\ S\left(k - S^3\right)^{\frac{1}{3}}$$

وبتكعيب كل من الطرفين : -

$$\therefore 3^2 \times (4\pi) \times (-6)^3 S^6 = (-36)^3 (S)^3 \left(k - S^3\right)$$

$$\therefore 36\pi\ (-216) S^6 = -46656\, S^3 \left(k - S^3\right)$$

$$\therefore -7776\pi\ S^6 \quad = -46656\, S^3 \left(k - S^3\right)$$

$$\therefore k - S^3 \qquad = \frac{\pi\ S^6}{6S^3} = \frac{\pi}{6}\ S^3 \qquad \ldots\ldots\ldots\ (2)$$

وهنا لن نقوم بحل المعادلة فى S ولكن نُعوض من (1) فى المعادلة (2)

$$\therefore \frac{\pi}{6}\ S^3 = \frac{4}{3}\pi\ r^3$$

$$\therefore S^3 \quad = 8r^3$$

$$\therefore S \quad = 2r$$

وعليه فإن مساحة السطح الكلية تكون أكبر ما يمكن عندما يكون القطر $(2r)$ للكرة مساوياً لطول ضلع المكعب S .

(٢٦) يراد عمل خزان سعة ٤م^٣ ، بقاعدة مربعة وبأجناب رأسية متعامدة على القاعدة ، فما هو أنسب شكل اقتصادى (أقل مساحة) ، لتحقيق ذلك .

الحــــل :- لتكن : -

طول أحد ضلعى القاعدة $= x$

ارتفاع الصندوق $= h$

حجم الصندوق (الخزان) $= V$

المساحة الكلية للخزان $= A$

$$,\ V \quad = hx^2 = 4\ \ m^3$$

$$\therefore h \quad = \frac{4}{x^2}\ \ m$$

مساحة القاعدة $= x^2$,

مساحة كل وجه من أوجه الخزان $= hx$

$$, \quad A = x^2 + 4hx = x^2 + \frac{16}{x}$$

والمطلوب هو أن تكون A' نهاية صغرى "لأقل تكلفة" ، نوجد A' ونساويها بالصفر لإيجاد قيم x الحرجة : -

$$A' = 2x - \frac{16}{x^2} = 0$$

$$\therefore \quad 2x = \frac{16}{x^2} \qquad \therefore x^3 = 8 \qquad \therefore x = 2$$

وعندما $x < 2$ نجد أن $A' < 0$ وعندما $x > 2$ نجد أن $A' > 0$ وعليه فإن $x = 2$ تحقق الشرط المطلوب

والمساحة =

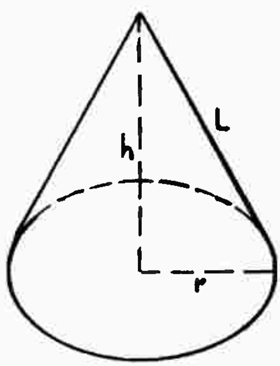
$$A = x^2 + 4hx = x^2 + \frac{16}{x} = 4 + \frac{16}{2} = 12 \quad m^2$$

وعليه فإن الأبعاد المناسبة هى :

$$x = 2 \quad m \quad , \quad h = 1 \quad m$$

(٢٧) يراد تصنيع وعاء مخروط الشكل بأقل تكلفة خامات ممكنة ، بحيث يسع حجماً يعادل 150 لتراً ، فما هى أبعاد هذا المخروط الدائرى القائم التى تحقق هذا الشرط .

الحـــــل :- انظر الرسم شكل (٨ - ١٨) .



شكل (٨ - ١٨)

نفترض أن نصف قطر قاعدة المخروط الدائرية $= r$ ، إرتفـاعـه $= h$

، طول الحرف الجانبى (الراسم) $= L$

، حجم المخروط $= V$

، المساحة الجانبية للمخروط $= A$

$$\therefore A = \pi \; rL$$

$$, \; V = \frac{1}{3}\pi \, r^2 h \;\; = 150$$

ومن هندسة الشكل :

$$\therefore h^2 + r^2 = L^2$$

وباعتبار r هو المتغير المستقل فى العلاقات السابقة : -

$$\therefore A' = \pi \;\; rL' + \pi \;\; L \qquad \text{.......... (1)}$$

$$, V' = \frac{1}{3}\pi \;\; r^2 h' + \frac{2}{3}\pi \;\; rh = 0 \qquad \text{.......... (2)}$$

$$, 2hh' + 2r = 2LL' \qquad \text{.......... (3)}$$

والمطلوب فى المعادلة (1) أن نجعل A أقل ما يمكن ومن المعادلة (3) : -

$$\therefore L' = \frac{r + hh'}{L} \qquad \text{.......... (4)}$$

ومن المعادلة الثانية (2)

$$\therefore h' = \frac{-2h}{r} \qquad \text{.......... (5)}$$

وبالتعويض من (5) فى (4)

$$\therefore L' = \frac{r + h\left(\frac{-2h}{r}\right)}{r}$$

$$\therefore L' = \frac{r^2 - 2h^2}{rL}$$

$$\therefore A' = \pi \;\; r\left(\frac{r^2 - 2h^2}{rL}\right) + \pi \;\; L = 0$$

$$\therefore \frac{r^2 - 2h^2}{L} + L = 0$$

$$\therefore r^2 - 2h^2 + L^2 = 0$$

$$\because L^2 = r^2 + h^2 \quad \therefore h = \pm r\sqrt{2}$$ ،

وسوف نعتبر قيمة h الموجبة فقط ،

$$V = \frac{1}{3}\pi\ r^2 h = \frac{1}{3}\pi\ r^2 \times r\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}\ \pi\ \ r^3}{3} = 150$$ ،

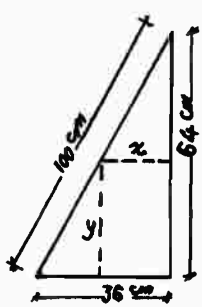
$$\therefore r^3 = \left(\frac{450}{\sqrt{2}\pi}\right) \quad \therefore r = \left(\frac{450}{2^{\frac{1}{2}}.\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$h = \sqrt{2}r = \sqrt{2}\left(\frac{450}{2^{\frac{1}{2}}.\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}}\left(\frac{450}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{900}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$$ ،

$$L = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{\left(\frac{450}{\sqrt{2}\pi}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{900}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}}}$$ ،

(٢٨) قطعة أرض على شكل مثلث قائم الزاوية أبعاده $36,64,100\ mt$ **كما بشكل (٨-١٩) ويراد حساب أكبر مستطيل يمكن صنعه بداخل هذه الأرض ، بحيث يكون أحد رؤوس المستطيل على الوتر .**

الحـــــل :-



شكل (٨-١٩)

لتكن أبعاد المستطيل هى x , y كما بالشكل ومساحته A، $A = xy$ ، وللتعبير عن A بدلالة متغير واحد فقط (أياً من x أو y) ، يجب أن نبحث عن علاقة أخرى تجمع بين كل من y و x ومنها يمكننا إيجاد قيمة متغير بدلالة الآخر

ومن هندسة الشكل (التشابه) ، نجد أن :-

$$\frac{x}{36} = \frac{64-y}{64}$$

$$\therefore 16(x) = 9(64-y) = 576-9y$$

$$\therefore 9y = 576-16x$$

$$\therefore y = \frac{576-16x}{9}$$

$$\therefore A = xy = \frac{1}{9}\left(576x-16x^2\right) = \frac{16}{9}\left(36x-x^2\right)$$

$$,0 \le x \le 36$$

$$، \frac{dA}{dx} = A^{`} = 64 - \frac{32}{9}x = 0$$

$$\therefore \frac{32}{9}x = 64$$

$$\therefore x = \frac{9 \times 64}{32} = 18$$

وهى تحقق أكبر مساحة وذلك لأنه باستخدام طريقة المشتقة الثانية : -

أى سالبة $A^{``} = \frac{-32}{9} < 0 \quad -ve$

$$، \because x = 18$$

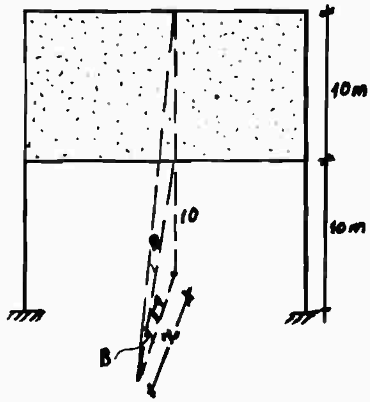
$$\therefore y = \frac{576-16(18)}{9} = \frac{576-288}{9} = \frac{288}{9} = 32\ m.$$

والمساحة A =

$$A = x.y = 18 \times 32 = 576 \quad m^2$$

(٢٩) لوحة إعلانات ودعاية ارتفاعها $10\ m$ وترتفع قاعدتها السفلية عن الأرض بمقدار $10\ m$ كذلك ، والمطلوب تحديد نقطة على الخط الأفقى فى مقابلة اللوحة (على الأرض) بحيث تكون عندها زاوية الرؤية أكبر ما يمكن

الحـــــل :- انظر الرسم شكل (٨ - ٢٠) .



شكل (٨ - ٢٠)

لتكن θ هى الزاوية المطلوبة (زاوية الرؤية) .

$$\therefore \tan B = \frac{10+10}{x} = \frac{20}{x}$$

$$, \tan A = \frac{10}{x} \qquad , \tan\theta = \tan(B-A)$$

$$\because \tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1+\tan A \tan B}$$

$$\therefore \tan\theta = \tan(B-A) = \frac{\tan B - \tan A}{1+\tan B \tan A}$$

$$= \frac{\frac{20}{x} - \frac{10}{x}}{1+\frac{20}{x}\times\frac{10}{x}} = \frac{\frac{10}{x}}{1+\frac{200}{x^2}} = \frac{\frac{10}{x}}{\left(\frac{x^2+200}{x^2}\right)}$$

$$\therefore \tan\theta = \frac{10x}{(x^2+200)}$$

$$, \frac{d}{dx}\tan\theta = \frac{d}{dx}\frac{10x}{(x^2+200)}$$

$$\because \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{V}\right)=\frac{V\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\frac{10x}{\left(x^2+200\right)}=\frac{\left(x^2+200\right)\times 10-10x\times 2x}{\left(x^2+200\right)^2}$$

$$=\frac{2000-10x^2}{\left(x^2+200\right)^2}$$

وبوضع $\frac{d}{dx}\tan\theta$ تساوى الصفر

$$\therefore \frac{2000-10x^2}{\left(x^2+200\right)^2}=0$$

$$\therefore 2000-10x^2=0 \qquad \therefore x^2=200$$

$$\therefore x=\pm 10\sqrt{2}$$

والإجابه السالبة مرفوضة

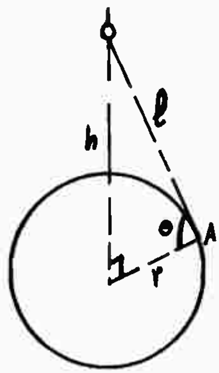
$$\therefore x=10\sqrt{2}=14.14 \quad mt.$$

وهى المسافة الواجب أن يقف المشاهد عندها بحيث تكون زاوية الرؤية أكبر ما يمكن .

(٣٠) يُعلق مصباح كهربائى فوق مركز منضدة دائرية ، فعلى أى ارتفاع يجب تثبيت هذا المصباح بحيث نحصل على أسطع إضاءة عند حواف المنضدة .

علماً بأن قوة الإضاءة (I) عند المصباح تتناسب مع جيب الزاوية التى يصنعها الشعاع الضوئى مع حافة المنضدة مقسوماً على مربع المسافة من مركز الضوء للحافة (اعتبر مصدر الضوء ، نقطة وليس جسماً) .

الحـــــل :- انظر الرسم شكل (٨ - ٢١) .



شكل (٨ - ٢١)

من المعطيات فى المسألة : -

قوة الإضاءة عند $A = k\dfrac{\sin\theta}{L^2} = \dfrac{\sin\theta}{L^2} \propto I$

$$,L \quad =\sqrt{h^2+r^2}$$

$$,\sin\theta \;=\frac{h}{\sqrt{h^2+r^2}}$$

$$\therefore I=k.\frac{h}{\sqrt{h^2+r^2}}.\frac{1}{\left(h^2+r^2\right)}=k\frac{h}{\left(h^2+r^2\right)^{3/2}}$$

وللحصول على أقصى إضاءة I نوجد $\dfrac{dI}{dh}$ ونساويها بالصفر للحصول على قيم h الحرجة .

$$\therefore\frac{dI}{dh}=k\left[\frac{\left(h^2+r^2\right)^{\frac{3}{2}}\times1-h\times\frac{3}{2}\times\left(h^2+r^2\right)^{\frac{1}{2}}\times2h}{\left(h^2+r^2\right)^3}\right]$$

$$=k\left[\frac{\left(h^2+r^2\right)^{\frac{3}{2}}-3h^2\left(h^2+r^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(h^2+r^2\right)^3}\right]$$

$$= \frac{k\left(h^2+r^2\right)^{\frac{1}{2}}\left[\left(h^2+r^2\right)-3h^2\right]}{\left(h^2+r^2\right)^3} = k\frac{\left(r^2-2h^2\right)}{\left(h^2+r^2\right)^{\frac{5}{2}}}$$

وبوضع $\frac{dI}{dh}=0$ ، فإن المقام لا يساوى أبداً الصفر

وبوضع البسط = الصفر

$$\therefore r^2-2h^2=0$$

$$\therefore h^2=\frac{r^2}{2} \qquad \therefore h=\frac{r}{\sqrt{2}}=\frac{r\sqrt{2}}{2}$$

وللتأكد من أن قيمة h هذه تعطى أقصى إضاءة ، نستخدم طريقة المشتقة الثانية : -

$$\therefore \frac{d^2I}{dh^2}=k\left[\frac{\left(h^2+r^2\right)^{\frac{5}{2}}\times(-4h)-\left(r^2-2h^2\right)^{\frac{5}{2}}\left(h^2+r^2\right)^{\frac{3}{2}}(2h)}{\left[\left(h^2+r^2\right)^{\frac{5}{2}}\right]^2}\right]$$

وبأخذ $k\left(h^2+r^2\right)^{\frac{3}{2}}$ والاختصار :

$$\therefore \frac{d^2I}{dh^2}=\frac{k\left(6h^3-9hr^2\right)}{\left(h^2+r^2\right)^{\frac{7}{2}}}$$

وبالتعويض عن $h=\frac{r\sqrt{2}}{2}$ فى $\frac{d^2I}{dh^2}$ نحصل على قيمة سالبة .

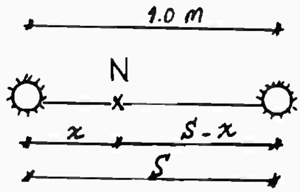
وعليه فإن الارتفاع المناسب للحصول على أقوى إضاءة عند حافة المنضدة عندما تكون

$$h=\frac{r\sqrt{2}}{2}$$

(٣١) مصباحان صغيران شدتهما a,b يبعدان عن بعضهما بمقدار 1 متر فإذا كانت شدة الإضاءة عند أى نقطة والناتجة من مصدر ضوئى تتناسب مباشرة مع شدة المصدر وعكسياً مع مربع المسافة من المصدر .

فاوجد مكان النقطة ذات الأقل إضاءة على الخط الواصل بين مصدرى الضوء .

الحـــــل :- انظر الرسم شكل (٨ - ٢٢) .



شكل (٨ - ٢٢)

للتبسيط سنعتبر المصباحان فى صورة نقطة ضوئية ولتكـــــن A هى مصدر الضوء ذو الشدة a ، B هى المصدر ذو الشدة b ، N نقطة على AB ، x بعد النقطـــة N عن A ، $(S-x)$ بعد النقطة N عن B حيث S بُعد النقطتان A,B

ومن تعريف شدة الإضاءة عند نقطة ، فإن شدة الإضاءة عند نقطة A تساوى $\dfrac{ka}{x^2}$

وعند B تساوى $\dfrac{kb}{(S-x)^2}$ حيث k ثابت التناسب

فإذا اعتبرنا أن I هى شدة الإضاءة عند N

$$\therefore I=\frac{ka}{x^2}+\frac{kb}{(S-x)^2} \qquad \dots\dots\dots\dots (1)$$

ومن الواضح أن قيمة I عند أى نقطة تزيد كلما اقتربنا من المصدر الضوئى وتقل كلما بعدنا عنه .

وعليه فإنه عندما تكون N قريبة من أيٍ من المصدرين ، فإنها فى ذات الوقت ستكون بعيدة عن المصدر الآخر وعندما تكون (N) قريبة من A فـإن أحـد الكسـرين سيكون صغيراً (لكبر المقام) فى المعادلة (1) بينمـا الكسـر الآخـر يكـون كبيراً وحيـث أن I تتناقص بالبعد عن أيٍ من المصدرين ، لذلك فإننا نتوقع أن يكون هنالك نقطة ذات أقل إضاءة على الخط AB ولإيجاد النهاية الصغرى للإضاءة (مكانها) فإنه يلزم إيجـاد $\dfrac{dI}{dx}$ ثم نساويها بالصفر ونحل للحصول على قيم x الحرجة .

$$\therefore \frac{dI}{dx} = k\left(\frac{-2a}{x^3} + \frac{2b}{(S-x)^3}\right) = 0$$

$$\therefore \frac{b}{(S-x)^3} = \frac{a}{x^3}$$

$$\therefore bx^3 = a\,(S-x)^3$$

$$\therefore \sqrt[3]{b}\,(x) = \sqrt[3]{a}\,(S-x)$$

$$\therefore \sqrt[3]{b}\,(x) + \sqrt[3]{a}\,(x) = \sqrt[3]{a}\,(S)$$

$$\therefore x\left(\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{a}\right) = \sqrt[3]{a}\,(S)$$

$$\therefore x = \frac{\sqrt[3]{a}\;S}{\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{a}}$$

$$،\; S - x = S - \frac{\sqrt[3]{a}\;S}{\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{a}} = \frac{S\,\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}$$

والآن يمكننا إيجاد النسبة بين (x) , $(S-x)$

$$\therefore \frac{S\,\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}} \;:\; \frac{S\,\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}$$

$$= \; S\,\sqrt[3]{a} \;:\; S\,\sqrt[3]{b}$$

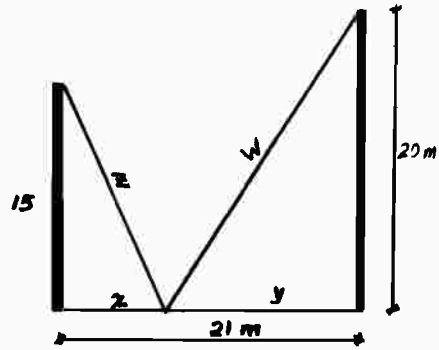
$\therefore$ النسبة التى تحقق أقل إضاءة عند N هى :-

$$\sqrt[3]{a} \;:\; \sqrt[3]{b}\,.$$

(٣٢) قضيبان موضوعان رأسياً فوق الأرض وارتفاعهما $15\,.\,20\,m$ يراد تثبيتهما جيداً بسلك يتصل بقمة كل منهما وبوتد من الأسفل يقع بين القضيبين ، وعلى الأرض حدد المكان المناسب الذى يجب تثبيت الوتد به بالنسبة لأحد القضيبين ، علماً بأن القضيبين يبعدان $21\,m$ عن بعضهما وبحيث تكون كمية السلك اللازمة أقل ما يمكن .

الحـــل :-

أنظر الرسم شكل (٨-٢٣) .



شكل [٨ – ٢٣]

نفترض أن الطول الكلى للسلك = L

والمطلوب أن تكون L أقل ما يمكن

$$\therefore L = Z + W \qquad , \qquad x + y = 21\ m$$

$$، \ x^2 + (15)^2 = Z^2 \qquad , \qquad y^2 + (20)^2 = W^2$$

والمطلوب الآن أن تكون L دالة فى أحد المتغيرات ولا يهم هنا اختيار المتغير سواء كـان Z أو W أو Y أو x .

وليكن المتغير المستقل هو x

$$\therefore L = L(x)\ ,\ Z = Z(x)\ ,\ W = W(x)\ ,\ Y = Y(x)$$

$$، \because L = Z + W$$

$$\therefore L` = Z` + W`$$

وبتفاضل كل من الدوال السابقة بالنسبة إلى x :-

$$\therefore 1 + y` = 0 \qquad , \qquad 2x = 2zz`$$

$$,\ 2yy` = 2ww`$$

ومنهـــا

$$\therefore Z` = \frac{2x}{2z} = \frac{x}{z}$$

$$,\ W` = \frac{2yy`}{2w} = \frac{yy`}{w}$$

، حيث أن $1 + y' = 0$

$$\therefore W' = \frac{-y}{w} \qquad \therefore y' = -1$$

وبالتعويض فى المعادلة :-

$$L' = z' + w'$$

$$\therefore L' = \frac{x}{z} - \frac{y}{w}$$

وبوضع $L' = 0$:-

$$\therefore \frac{x}{z} = \frac{y}{w} \qquad or \qquad \frac{x}{y} = \frac{z}{w}$$

$$\because y = 21 - x \ ،$$

$$, \quad z = \sqrt{x^2 + 225}$$

$$, \quad w = \sqrt{y^2 + 400}$$

$$\therefore \frac{x}{y} = \frac{z}{w} \qquad i.e. \quad \frac{x}{21-x} = \frac{\sqrt{x^2+225}}{\sqrt{y^2+400}}$$

$$\therefore \frac{x^2}{(21-x)^2} = \frac{x^2+225}{y^2+400} = \frac{x^2+225}{(21-x)^2+400}$$

وبالاختصار :-

$$\therefore x^2 + 54x - 567 = 0$$

$$\therefore (x-9)\,(x+63) = 0$$

$$\therefore x = 9 \quad , \quad -63$$

والإجابة السالبة مرفوضة حيث أنها عديمة المعنى .

وعليه فإن $x = 9$ هى القيمة الحرجة الوحيدة .

وللتأكد من أنها تحقق الشرط المطلوب (أقل طول سلك لازم)

، نوجد قيم L' حول $x = 9$ ونُثبت أنها تتغير من سالبة إلى موجبة وحيث أن x تتغير فى الفترة المحدودة $(0 , 21)$

$\therefore$ نوجد قيم L' عند حدى الفترة 0 وعند 21

$\because L' = \frac{x}{z} - \frac{y}{w}$

$\therefore L' = 0 - \frac{21}{w}$ وهى سالبة .

وعندما $x = 21$

$\therefore L' = \frac{21}{z} - 0$ وهى موجبة .

$\therefore$ L' تغير إشارتها من سالب إلى موجب

$\therefore$ فعندما يكون الوتد على بعد $x = 9\ m$ من القضيب المنخفض $(15\ m)$ تكون كمية السلك أقل ما يمكن .

(٣٣) عند التخطيط لأحد المطاعم وُجد أنه إذا كان عـدد المقاعد يكفى لعدد بين 40 , 80 شخصاً فإن الربح الإسبوعى يكون بما يعادل 8 جنيهاً للمقعد أما إذا ازداد عدد المقاعد أكثر من 80 فإن الربح الإسبوعى لكل مقعد يتناقص بمقدار 4 قروش مضروبة فى عدد المقاعد الزائدة عن 80 ،

فما هو عدد المقاعد المناسب لتحقيق أقصى ربح إسبوعى .

الحـــــل :- نعتبر أن عدد المقاعد فى المطعم = x

، الربح الإسبوعى الكلى بالجنيه = p

وواضح أن p تعتمد على x وهى عبارة عن حاصل ضرب x فى ربح المقعد الواحد

وعندما $40 \le x \le 80$ فإن : $p = 8x$

وعندما تزيد x عن 80 $(x > 80)$ فإن ربح المقعد الواحد يساوى :

$[8 - 0.04(x - 80)]$

حيث $(x - 80)$ هى عدد المقاعد الزائدة عن 80

$$\therefore p = x\,[8 - 0.04\,(x - 80)]$$
$$= 11.2\,x - 0.04\,x^2$$

$$\therefore p(x) = \begin{cases} 8x \ldots\ldots\ldots\ldots if \quad 40 \le x \le 80 \\ 11.2\,x - 0.04\,x^2 \ldots\ldots\ldots if \quad 80 \le x \le 280 \end{cases}$$

وكيفية الحصول على الرقم 280 تأتى من ملاحظة أن :-

$$11.2\ x - 0.04\ x^2 = 0$$

عندما تكون $x = 280$ (بحل المعادلة)

وعندما تكون $x > 280$ فإن :

تكون سالبة . $11.2\ x - 0.04\ x^2 < 0$

وباعتبار قيمة x تنحصر فيما بين [280 , 40] وهى الفترة المغلقة

سنجد أن الدالة p متصلة عند $x = 80$ وذلك للآتى :-

$$p = 8x = 8 \times 80 = 640$$

$$،p = \left(11.2\ x - 0.04\ x^2\right) = \left[11.2 \times 80 - 0.04 \times (80)^2\right] = 640$$

وهى نفس النتيجة

مما يدل على أن نهاية المقدار $p(x)$ عندما تؤول x إلى 80

$$\lim_{x \to 80} p(x) = 640$$

، $p(x)$ دالة متصلة فى الفترة المغلقة [280 , 40]

والمطلوب أن تكون $p(x)$ ذات أقصى قيمة لها لذلك نوجد p' ونساويها بالصفر ونحل المعادلة للحصول على قيم x الحرجة .

وفى هذه المسألة يجب علينا أن نلاحظ p' عند حدود الفترة أى عند :

40 , 80 , 280

أى عندما $4 < x < 80$

، عندما $x = 80$

، عندما $80 < x < 280$

فعندما تكون $40 < x < 80$ فإن : $p'(x) = 8$

وعندما تكون $80 < x < 280$ فإن : $p'(x) = 11.2 - 0.08\ x$

كما أن $p'(80) =$ صفر

وبوضع $p'(x) = 0$

$$\therefore 11.2 - 0.08x = 0$$

$$\therefore x = \frac{11.2}{0.08} = 140$$

وعليه فإن القيم الحرجة لـ x هى 140 , 80

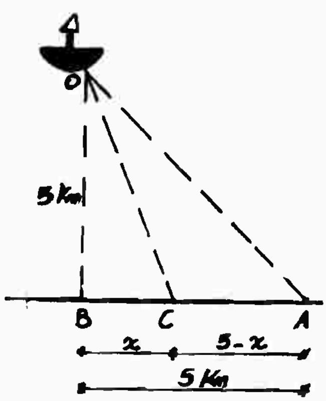
وبحساب قيم الدالة $p(x)$ عند النقطتين الحرجتين (140 , 80) وعند طرفى الفترة [280 , 40] سنجد الآتى :-

$$p(40) = 320$$
$$p(80) = 640$$
$$p(140) = 784$$
$$p(280) = 0$$

وعليه فإنه عندما يكون عدد المقاعد 140 مقعداً يتحقق أعلى عائد إسبوعى (p) وقدره 784 جنيهاً .

(٣٤) يبحر رجل فى زورق على بعد 5 كيلو متر من أقرب نقطة على الشاطئ المقابل له ، يريد أن يصل إلى نقطة على الشاطئ تبعد بمقدار 5 كيلو متر عن النقطة الأولى فى أقصر وقت ممكن فإذا كان بإمكانه أن يجدف بالزورق بسرعة $4\ km/hr$ فى حين أنه يستطيع أن يجرى بسرعة $6\ km/hr$ على رمال الشاطئ ، حدد فى أى نقطة على الشاطئ عليه أن يُبحر لها ويكمل باقى المسافة عدواً .

الحـــــل :- أنظر الرسم شكل (٨-٢٤) .



شكل (٨-٢٤)

نعتبر امتداد الشاطئ هو BA وأن أقرب مسافة للقارب على الشاطئ هى B وأن القارب عند O على بعد $5\ km$ وأن النقطة المراد أن يصل لها فى النهاية هى A وأن C هى النقطـــة الواجب أن يُبحر لها بالزورق وعلى بعد x من B، على بعد $(5-x)$ من A ومسافة التجديف (الإبحار) هى OC بينما المسافة التى سيجريها بعد الهبوط من القارب عند C هى CA

ومن المثلث القائم الزاوية CBO يمكن إيجاد مسافة التجديف :-

$$\overline{OC} = \sqrt{\overline{OB}^2 + \overline{BC}^2} = \sqrt{x^2 + 25}$$

وتستغرق هذه المسافة منه زمناً قدره (باعتبار السرعة $4\ km/hr$) :-

$$T_1 = \frac{\text{المسافة}}{\text{السرعة}} = \frac{\sqrt{x^2+25}}{4} \qquad \ldots\ldots\ldots\ (١)$$

أما المسافة CA فيقطعها عدواً بسرعة $6\ km/hr$ فى زمن قدره :-

$$T_2 = \frac{(5-x)}{6} \qquad \ldots\ldots\ldots\ (٢)$$

وبذلك يصبح الزمن الكلى للرحلة T :

$$T = T_1 + T_2 = \frac{\sqrt{(x^2+25)}}{4} + \frac{(5-x)}{6} \qquad \ldots\ldots\ldots\ (٣)$$

وهى علاقة بين زمن الوصول من o إلى A عبر c ، بين المسافة x ولكى يكون الزمن أقل ما يمكن :-

$$\therefore \frac{dT}{dx} = \left[\frac{1}{4} \times \frac{1}{2}\left(x^2+25\right)^{-\frac{1}{2}} \times 2x\right] + \left[\frac{1}{6}(-1)\right]$$

$$= \frac{2x}{8\left(x^2+25\right)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{6}$$

وبوضع $\frac{dT}{dx} = 0$

$$\therefore T' = \frac{dT}{dx} = \frac{x}{2\sqrt{x^2+25}} - \frac{1}{3} = 0$$

$$\therefore \frac{x}{\sqrt{x^2+25}} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \frac{x^2}{x^2+25} = \frac{4}{9}$$

$$\therefore 5x^2 = 100$$

$$\therefore x^2 = 20$$

$$\therefore x = \pm 2\sqrt{5}$$

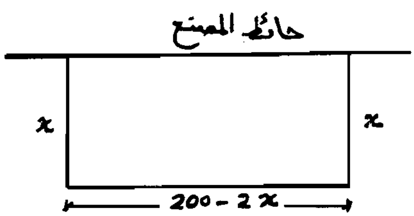
والقيمة السالبة مرفوضة $\therefore x = +2\sqrt{5} = 4.472 \quad km$

ويلاحظ أن القيمة السالبة لـ x تعنى أن عليه الإبحار إلى اليسار من نقطة o بمسافة 4.472 وهى بالطبع لا تحقق الزمن الأدنى

وبذلك فإن عليه أن يبحر لنقطة c بالقرب من نقطة A وتبعد عن A بمقدار $(5-4.472)$ أى بمسافة تعادل $0.527 \quad km$

(٣٥) يمكن صنع سور طوله $200\ m$ من الألواح الخشبية المتوفرة والمطلوب إحاطة فناء مستطيل الشكل بهذا السياج (السور) بحيث تكون مساحة الفناء أكبر ما يمكن مستخدمين عند ذلك جدار مصنع مجاور لقطعة الأرض (الفناء) بمثابة أحد أجناب الفناء .

الحـــــل :- انظر الرسم شكل (٨ - ٢٥) .



هنا شكل (٨ - ٢٥)

نرمز لأحد أضلاع الفناء بالرمز x

عندئذ يكون الضلع الآخر للفناء مساوياً $200-2x$

ومساحته تكون $A=x(200-2x)$

$\therefore A=-2x^2+200x$

ولكى تكون A قيمة عظمى نوجد $\frac{dA}{dx}$ ونساويها بالصفرونوجد قيم x الحرجة .

$\therefore \frac{dA}{dx}=-4x+200=0$

$\therefore 4x=200 \qquad \therefore x=50 \quad m$.

وبذلك فإن طول ضلع الفناء العمودى على جدار المصنع يجب أن يكون طوله $50 \ m$

وبذلك فإن الضلع الموازى للجدار يكون طوله : -

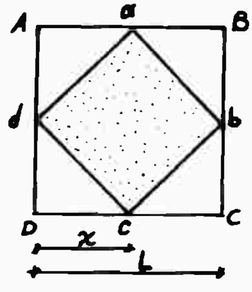
$200-2x=200-2\times 50=200-100=100 \ m$.

أى أن الفناء يكون على شكل مستطيل طوله $100 \ m$ وعرضه $50 \ m$ أو على شكل نصف مربع طول ضلعه = $100 \ m$

والمساحة حينئذ تبلغ : $A=-2(50)^2+200(50)=-5000+10000=5000 \ m^2$

(٣٦) لدينا المربع $ABCD$ ؛ شكل (٨ - ٢٦) رُسمت ابتداء من رؤوسه الأجزاء المتساوية Aa , Bb , Cc , Dd ووصلت النقط a , b , c , d بمستقيمات ، فعند أى قيمة للمستقيم Aa يكون المربع $abcd$ أصغر ما يمكن ؟

الحـــــل :-



شكل (٨ - ٢٦)

إذا اعتبرنا $Aa = x$

فإنه من الواضح أن $aB = L - x$ [حيث L طول ضلع المربع الخارجى]

ومن نظرية فيثاغورث :

$$\overline{ab}^2 = x^2 + (L-x)^2$$
$$= 2x^2 - 2Lx + L^2$$

ولكن مساحة المربع $abcd$ تساوى $\overline{ab}^2$ مما يعنى أن المساحة : -

$$S = 2x^2 - 2Lx + L^2$$

وبتفاضل S بالنسبة إلى x نوجد $S^{`}$ ونساويها بالصفر

$$\therefore S^{`} = 4x - 2L \quad = 0$$
$$\therefore x \quad = \frac{L}{2}$$

أى أنه لتحقيق الشرط اللازم فإنه يجب رسم النقاط a , b , c , d فى منتصفات أضلاع المربع الأساسى $ABCD$.

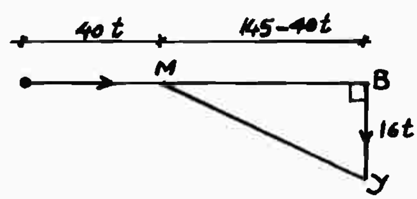
(٣٧) من النقطتين A, B تُبحر فى نفس الوقت فى الاتجاهين المبينين على الرسم بسهمين ، سفينة ويخت وكانت سرعتاهما تساويان على الترتيب

$V_m = 40\ km/hr$ ، $V_y = 16\ km/hr$.

فكم من الوقت ينقضى حتى يُصبح البعد بينهما أقصر ما يمكن باعتبار أن

$AB = 145\ km$.

الحـــل :-



شكل (٨-٢٧)

نرمز بالحرفين M , y إلى وضعى اليخت والسفينة

حيث M (motorship) أى السفينة ، y أى اليخت (yacht) ونرمز بالرمز t إلى عدد الساعات التى تمر بعد إبحارهما من النقطتين A , B وبذلك فإن :-

$$AM = 40\ t\ km$$
$$,\ BY = 16\ t\ km$$

ومن نظرية فيثاغورث :-

$$\therefore MY = \sqrt{\overline{BM}^2 + \overline{BY}^2} = \sqrt{(145 - 40\ t)^2 + (16\ t)^2}$$
$$MY = \sqrt{1856\ t^2 - 11600\ t + 21025}$$

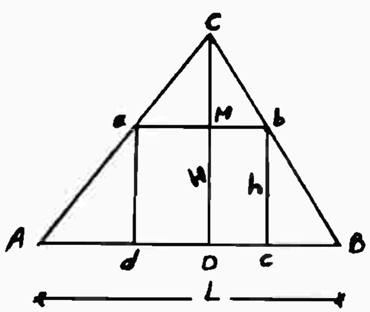
والمطلوب هو جعل MY أصغر ما يمكن .

ولكى تكون MY أصغر ما يمكن يجب أن يكون ما تحت الجذر أصغر ما يمكن .

$$\therefore \frac{d}{dt}(1856 t^2 - 11600 t + 21025) = 3712 t - 11600 = 0$$
$$\therefore t = \frac{11600}{3712} = 3\frac{1}{8} = 3.125\ hr$$

(٣٨) فى المثلث ABC الموضح بشكل (٨-٢٨) ، مد المستقيم ab موازياً للقاعدة AB بحيث تُصبح مساحة المستطيل abcd أكبر ما يمكن

الحـــل :-



شكل (٨-٢٨)

نفترض أن :-
$$AB = L$$
$$, ab = M$$
$$, bc = h$$

ونرمز بالحرف H إلى إرتفاع المثلث ABC وهو CD المقام على القاعدة AB

ومن تشابه المثلثين abc , ABC ينتج التناسب التالى :-

$$\frac{M}{L} = \frac{H-h}{H}$$
$$\therefore M = \frac{L}{H}(H-h)$$

، حيث أن مساحة المستطيل الداخلى abcd تساوى :-

$$S = hM$$
$$\therefore S = \frac{L}{H} h(H-h) = Lh - \frac{L}{H} h^2$$

ثم نوجد $\frac{ds}{dh}$ أى $S^{`}$ ونساويها بالصفر للحصول على قيم h الحرجة :

$$\therefore S' = L - \frac{2Lh}{H} = 0$$
$$\therefore \frac{2Lh}{H} = L \quad \therefore 2h = H \quad \therefore h = \frac{H}{2}$$

وبالتالى فإن أقصى مساحة تكون عندما يكون ارتفاع المستطيل بما يعادل نصف ارتفاع المثلث .

ومما يؤكد صحة الإجابة أن المشتقة الثانية $S^{``}$ سالبة

$$S^{``} = 0 - \frac{2L}{H} = -2\frac{L}{H} < 0 \ (-ve)$$ سالبة

(٣٩) بستان من أشجار التفاح يحتوى على 30 شجرة تفاح فإذا كان إنتاج الشجرة الواحدة يعادل 400 تفاحة فى المتوسط فإذا أضفنا شجرة واحدة لهذا البستان فإن متوسط الإنتاج للشجرة الواحدة ينخفض بمعدل 10 تفاحات ·

فكم عدد الشجرات اللازم لكى يكون المحصول أكبر ما يمكن .

الحـــــل :-

انظر الرسم شكل (٨-٢٩).

إذا اعتبرنا أن عـدد الأشـجار الجديـدة المزروعـة فـى البسـتان = x فإنـه يكـون هنـالك $x+30$ شجرة فى البستان ويبلغ إنتاجها لكل شجرة $(400-10x)$ تفاحة .

وبذلك يكون إنتاج البستان كله Y يساوى :-

$$Y=(30+x)(400-10x)$$
$$=-10x^2+100x+12000$$
$$\frac{dy}{dx}=-20x+100$$ ،

وبوضع $\frac{dy}{dx}=0$:

$$\therefore -20\,x+100=0$$
$$\therefore x=5$$

وعلى ذلك فإن زرع 5 أشجار جديـدة يعطـى أكـبر محصـول ويصبـح عـدد الأشـجار الكلى 35 شجرة وإنتاج كل منها يساوى $(400-5\times 10)$ أى 350 تفاحة .

ويكون إنتاج التفاح الكلى من البستان يساوى :-

$$(35\times 350)=12250 \quad appl$$

ويمكن تمثيل ذلك بيانياً كالتالى :-

$$\because Y=12000+100\,x-10x^2$$
$$or \quad x^2-10\,x-1200=\frac{-Y}{10}$$

وبطريقة إكمال المربع (مربع كامل)

$$\therefore x^2-10\,x+25-25-1200=\frac{-y}{10}$$
$$\therefore (x-5)^2-1225=\frac{-y}{10}$$

ومن الأنسب لرسم هذا المنحنى هو تغيير المحاور بحيث تكون

$$Y=\frac{y}{10}\ ,\ X=x-5$$
$$\therefore 1225-X^2=Y$$

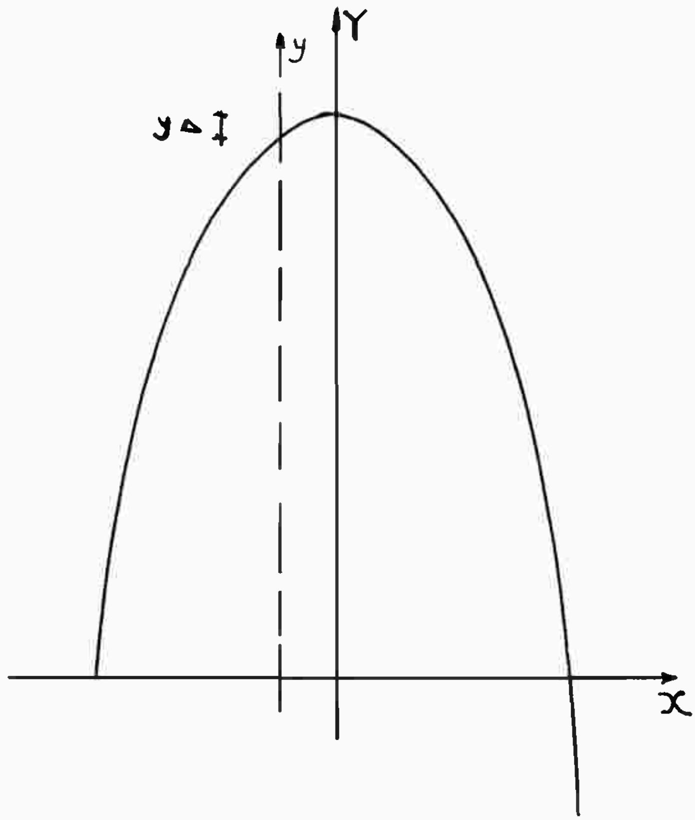
وهى تمثل معادلة قطع مكافئ Parabola وذلك بإزاحة محور OY بمقدار 5 وحـدات لليسار وبضرب كل y فى 10

وحيث أن إنتاج البستان الأصلى $30 \times 400 = 12000$

والإنتاج الجديد بزراعة 5 أشجار إضافية = $12250 = 35 \times 350$

فإن الزيادة وقدرها 250 تفاحة تُمثل فى الشكل بالرمز Δy

$$\Delta y = 250$$



شكل (٨-٢٩)