الباب الرابع

النظم المبنية على الأعداد

التعبير بالأعداد: لقد كان محور العلم الأساسي مرتبطا بالأعداد حيث كان الهدف الأساسي هو محاولة وصف النظم الطبيعية بالأعداد . فى العلم التقليدى لقيت الأعداد اهتماماً كبيراً حيث أنها محور دراسة الرياضيات التقليدية .

لنبدأ بالسؤال التالى : هل توجد نظم أعداد يمكن أن تعطى سلوكاً معقداً ؟ الإجابة نعم يمكن أن نجد نظما بسيطة تعتمد على قواعد بسيطة جداً من الأعداد ذات سلوك شديد التعقيد .

لنبدأ بالمثال التالى : فى نظم العد يمكن أن نستخدم قاعدة ٢ ، ٣ ، ٤ .... حتى الرقم ٩ . فى شكل (٤٢) نورد صورة توضح كيف يمكن كتابة الرقم ٣٨٢٩ فى نظم عد مختلفة .

$$3829 = 3 \times 1000 + 8 \times 100 + 2 \times 10 + 9 \times 1$$

3	8	2	9	(base 10)

$$3829 = 5 \times 729 + 2 \times 81 + 2 \times 9 + 4 \times 1$$

5	2	2	4	(base 9)

$$3829 = 7 \times 512 + 3 \times 64 + 6 \times 8 + 5 \times 1$$

7	3	6	5	(base 8)

$$3829 = 1 \times 2401 + 4 \times 343 + 1 \times 49 + 1 \times 7 + 0 \times 1$$

1	4	1	1	0	(base 7)

$$3829 = 2 \times 4296 + 5 \times 216 + 4 \times 36 + 2 \times 6 + 1 \times 1$$

2	5	4	2	1	(base 6)

$$3829 = 1 \times 3125 + 1 \times 625 + 0 \times 125 + 3 \times 25 + 0 \times 5 + 4 \times 1$$

1	1	0	3	0	4	(base 5)

$$3829 = 3 \times 1024 + 2 \times 256 + 3 \times 64 + 3 \times 16 + 1 \times 4 + 1 \times 1$$

3	2	3	3	1	1	(base 4)

$$3829 = 1 \times 2187 + 2 \times 729 + 0 \times 243 + 2 \times 81 + 0 \times 27 + 2 \times 9 + 1 \times 3 + 1 \times 1$$

1	2	0	2	0	2	1	1	(base 3)

$$628 = 1 \times 2048 + 1 \times 1024 + 1 \times 512 + 0 \times 256 + 1 \times 128 + 1 \times 64 + 1 \times 32 + 1 \times 16 + 0 \times 8 + 1 \times 4 + 0 \times 2 + 1 \times 1$$

1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	(base 2)

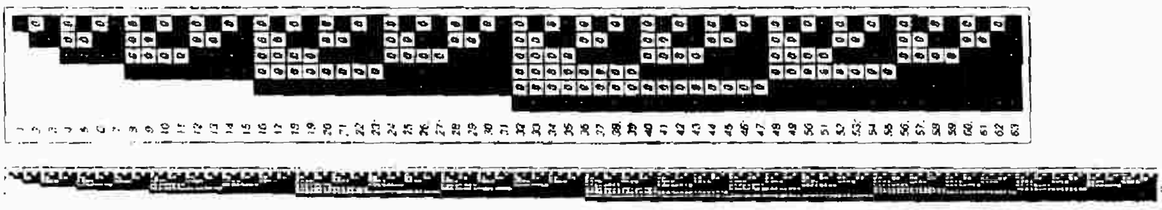
شكل (٤٢)

نظام العد الثنائى فى السطر الأخير مهم حيث أنه النظام الذى يستخدم فى الحاسبات الآلية . فى هذا النظام نجد تشابها مع ما ورد فى الأوتوماتا الخلوية حيث يمكن أن نعبر عن الواحد بخلية سوداء وعن الصفر بخلية بيضاء .

إن العمليات الحسابية التى تتم على الأعداد لا يمكن لأول وهلة أن تؤدى إلى سلوك معقد أو شديد التعقيد . ولكن كما سنرى ليس هذا صحيحا .

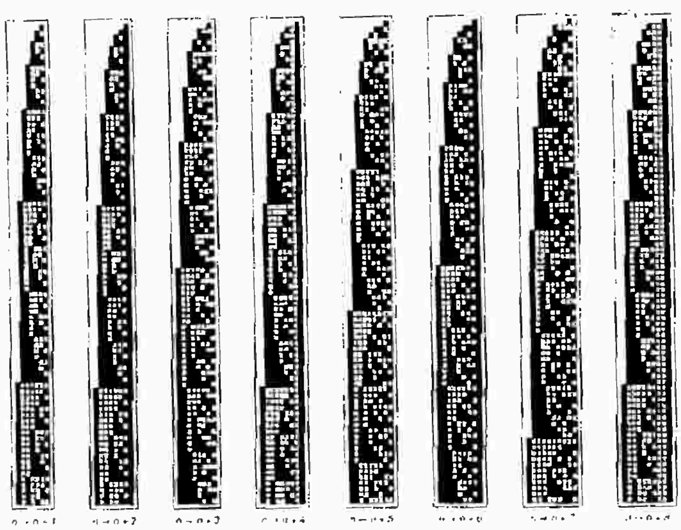
الحساب الأولى
Elementary Arithmeties

لنبدأ بأخذ متتالية بسيطة مثل ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ .... إذا تحولنا إلى النظر إلى هذه المتتالية رقميا كما نرى فى شكل (٤٣) سوف نلاحظ السلوك شديد التعقيد.



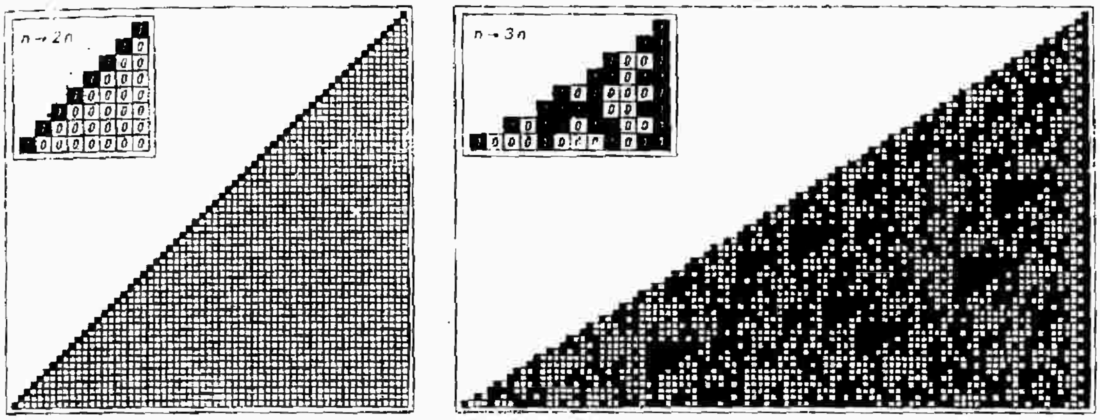
شكل (٤٣)

كما نرى فى شكل (٤٤) يمكن أن نضيف فى كل خطوة ليس الوحدة فقط وإنما يمكن أن نضيف ٢ ، ٣ ، ٤ .... وهكذا كما نرى فى شكل (٤٤) نحصل على أشكال متداخلة تكرارية وشديدة التعقيد كما هو واضح .



شكل (٤٤)

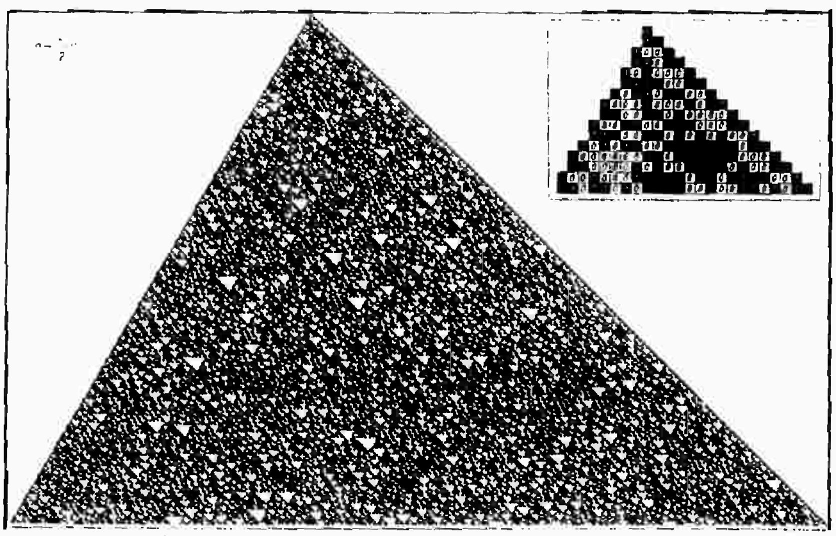
كمثال آخر يمكن أن ندرس ماذا يحدث عندما نضرب متتالية عددية بعدد ما . عند الضرب فى ٢ نحصل على نتيجة بسيطة عبارة عن إزاحة للخلايا إلى اليسار . عند الضرب فى الرقم ٣ نحصل على شكل معقد جداً كما هو واضح فى شكل (٤٥) حيث تبدو الصورة عشوائية جداً خالية من سمات التكرارية .



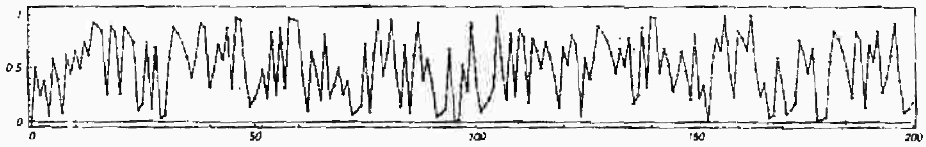
شكل (٤٥)

ولكن ربما يرد إلى الذهن أن هذا التعقيد ناتج عن معالجتنا للمتتاليات فى صورتها الرقمية ، ولكن هذا الاستنتاج غير صحيح وسوف نعطى بعض الأمثلة التى سنعالج فيها المتتالية مع الاحتفاظ بسمتها الحجمية .

لنورد المثال الآتى : إذا بدأنا بالرقم ١ ثم ضربناه ١ ، ١,٥ ، ٢,٢٥ ، ٣,٣٧٥، ٧,٥٩٣٧٥ ، ١١,٣٩٠٢٥ وهكذا . عند رسم هذه المتتالية نحصل على الصورة المبينة فى شكل (٤٦) .



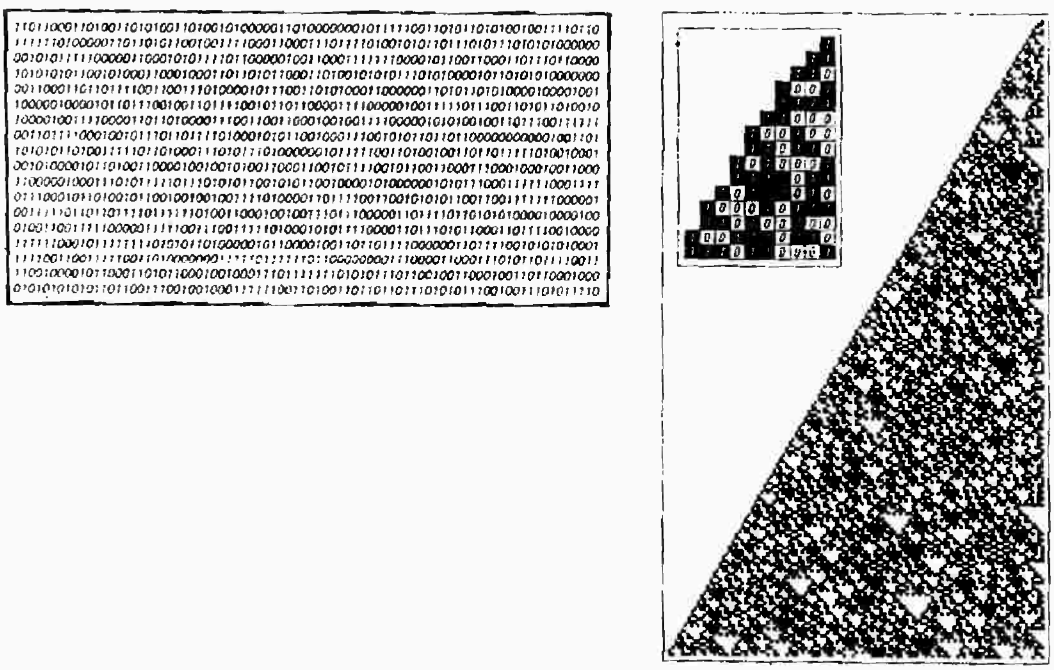
شكل (٤٦)



شكل (٤٧)

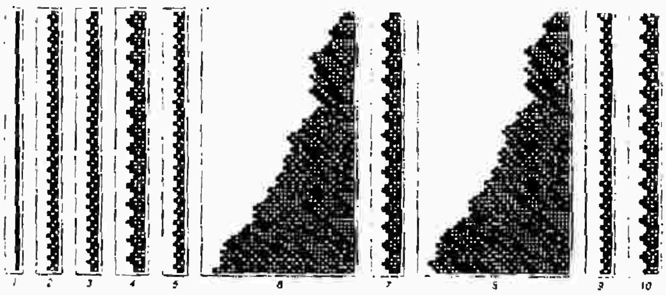
شكل (٤٧) يوضح العشوائية التامة فى هذه المتتالية رغم بساطة القاعدة المستخدمة .

لنغير القاعدة تغييراً بسيطاً . لنضع شرطا أنه عند الضرب فى ١,٥ وحصلنا على عدد زوجى فنضربه فى المعامل ١,٥ ، أما إذا حصلنا على عدد فردى لنضف إليه رقم ١ حتى يصبح عددا زوجيا ثم نضربه فى المعامل ١,٥٠ لذا نضمن الحصول على أعداد صحيحة مثل ١ ، ٣ ، ٦ ، ٩، ١٥، ٢٤ ، ٣٦ ، ٥٤ ، ٨١ ، ١٢٣ ، ١٨٦ ، ٢٧٦ ، ٤٢٠ ، ٦٣٠ ، ٩٤٥ ، ١٤١٩ ، ٢١٣٠ ، ٣١٩٥ ، ٤٧٩٤ ، .... وهكذا . بعض هذه الأعداد زوجى والآخر فردى نحصل على الصورة المبينة فى شكل (٤٨) والعشوائية تماماً .



شكل (٤٨)

فى شكل (٤٩) نورد نتيجة لمتتالية أخرى حيث إذا بدأنا بعدد زوجى نضربه فى المعامل ٢,٥ ، أما إذا كان فرديا نضيف الوحدة ثم نضربه فى المعامل ٠,٥ . إذا بدأنا بالوحدة نحصل على شكل تكرارى بالنسبة للعدد ٦ ، ٨ وبذا نحصل على سلوك شديد التعقيد ، كما نرى فى شكل (٤٩) .



شكل (٤٩)

رغم التفاوت فى طبيعة الأوتوماتا الخلوية ونظم الأعداد نرى أنه فى كلتا النظامين يمكن أن نحصل على سلوك شديد التعقيد رغم بساطة القواعد التى نتبعها.

كما سبق رأينا أنه يمكن بقواعد وعمليات بسيطة على الأعداد الحصول على سلوك شديد التعقيد . سنجرى أيضاً مثل هذه العمليات على المتتاليات .

المتتاليات التكرارية Recursive Sequences

الفكرة الأساسية هى وضع متوالية عددية حسب قاعدة محددة للحصول على العدد التالى فى المتوالية ، الثانى f[2] ، والحد النونى f[n] بحيث تعتمد قيمة الحد النونى على الحد الذى يسبقه مباشرة أى f [n-1] . لكن يمكن وضع متوالية بحيث تعتمد قيمة الحد النونى ليس فقط على f [n-1] وإنما على الحد الذى يسبقه أى f [n-2] أو الحدود الأسبق . فى الشكل (٥٠) نورد أمثلة على متواليات حسب القواعد المبينة .

f[n] = 1 + f[n - 1], f[1] = 1
(a) 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38

f[n] = 1 - f[n - 1], f[1] = 1
(b) 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0

f[n] = 2 f[n - 1], f[1] = 1
(c) 1 2 4 8 16 32 64 128 256 512 1024 2048 4096 8192 16384 32768 65536 131072 262144 524288 1048576 2097152

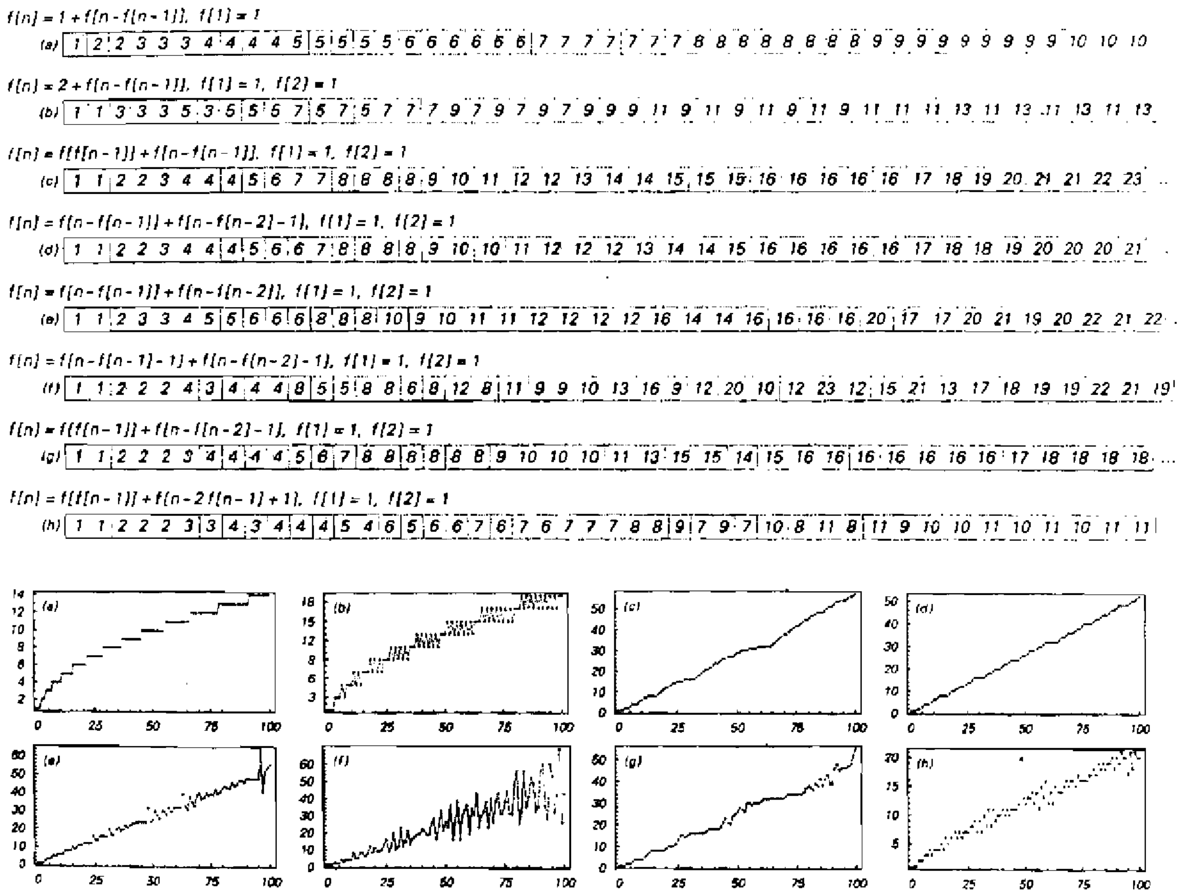
f[n] = f[n - 1] + f[n - 2], f[1] = 1, f[2] = 1
(d) 1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 144 233 377 610 987 1597 2584 4181 6765 10946 17711 28657 46368 75025 121393

f[n] = f[n - 1] - f[n - 2], f[1] = 1, f[2] = 1
(e) 1 1 0 -1 -1 0 1 1 0 -1 -1 0 1 1 0 -1 -1 0 1 1 0 -1 -1 0 1 1 0 -1 -1 0 1 1 0 -1 -1 0 1 1 0 -1 -1 0 1 1

f[n] = -f[n - 1] + f[n - 2], f[1] = 1, f[2] = 1
(f) 1 1 0 1 -1 2 -3 5 -8 13 -21 34 -55 89 -144 233 -377 610 -987 1597 -2584 4181 -6765 10946 -17711 28657 -46368

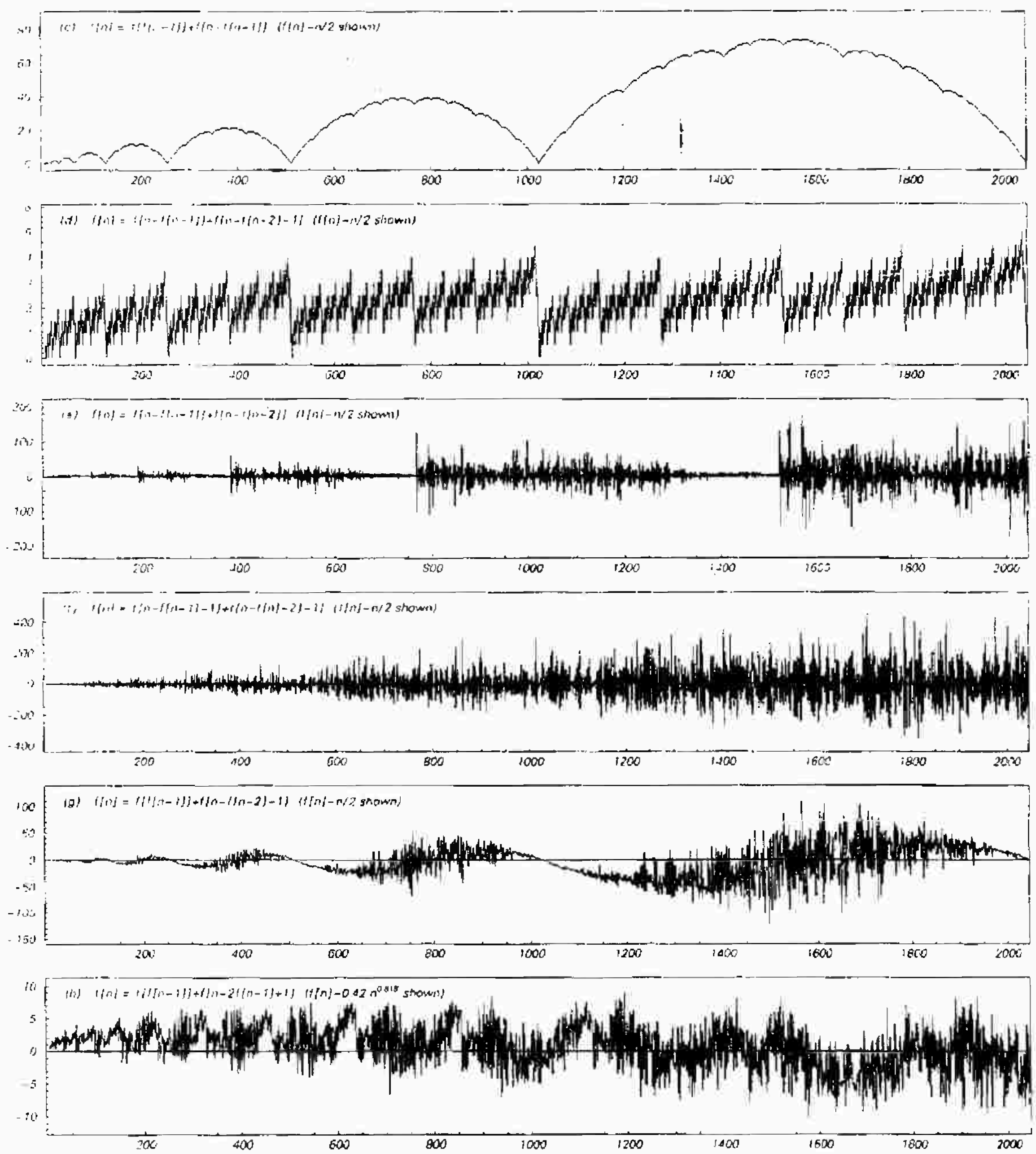
شكل (٥٠)

فى شكل (٥١ أ) نورد أمثلة أخرى لمثل هذه المتواليات والتى لا تفضى إلى حدود لا معنى لها مثل f[0] أو حدود سالبة مثل f [-1] .



شكل (٥١أ)

فى شكل (٥١ ب) نرى مجموعة أخرى من مثل هذه المتتاليات ذات السلوك شديد التعقيد ، فى بعضها يصعب وضع قاعدة لمدى شدة التعقيد التى تظهر فى هذه المتواليات .



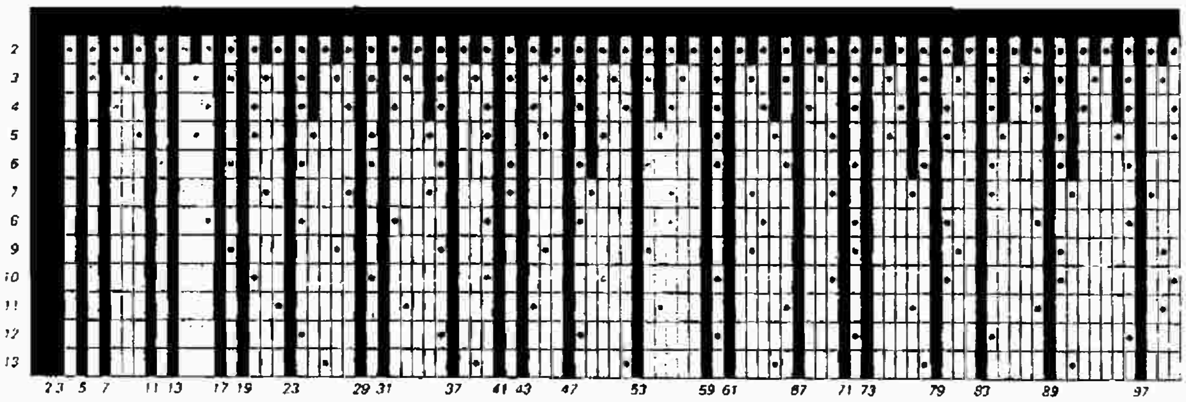
شكل (٥١ ب)

نخلص من كل ذلك أن بعض المتواليات رغم أننا نستخدم قواعد بسيطة مثل الجمع والطرح يمكن أن تؤدى إلى سلوك شديد التعقيد .

متتالية الأعداد الأولية
The Sequence of Primes

الأعداد الأولية هى الأعداد التى لا تقبل القسمة إلا على نفسها وبالطبع على العدد «واحد» . هذه المتوالية هى متوالية لا نهائية وهذا معروف منذ حوالى ألفى عام.

فى شكل (٥٢) نورد طريقة لاستخراج الأعداد الأولية .

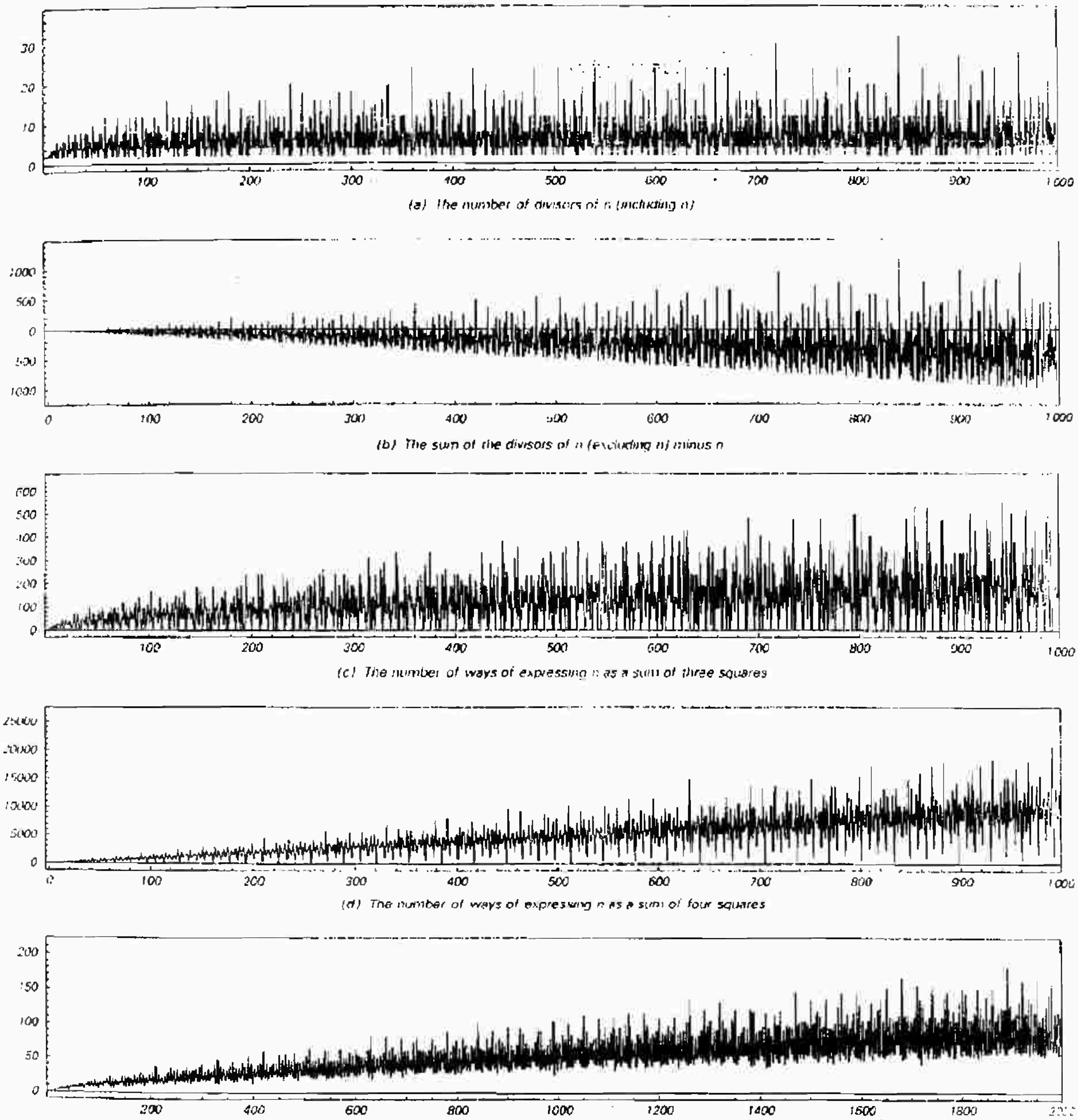


شكل (٥٢)

تنحصر الطريقة فى أننا نكتب الأرقام من (١) إلى (١٠٠) ثم نبدأ فى شطب الأعداد التى تقبل القسمة على العدد «٢» ثم على العدد «٣» ... وهكذا . ما يتبقى هو الأعداد الفردية تماماً . هذه الطريقة تسمى منخل إيراتوفينيس فى عام ٢٠٠ قبل الميلاد .

فى شكل (٥٣) نورد نماذج من متوالية الأعداد الأولية مع بعض التصرف حسب القواعد المذكورة مع كل رسم منها ونلاحظ الطبيعة العشوائية تماماً لمثل هذه المتواليات .

منذ القدم يهتم علماء الرياضة المشتغلون فى مجال الأعداد الأولية بوجود نوع من الانتظام فى هذه المتوالية ، أما نحن هنا فنهتم بمدى تعقد سلوك هذه المتوالية فى شكل (٥٣) نورد أشكالا لمتواليات تبدى سلوكا أكثر تعقيدا وحسب القواعد المبينة مع كل رسم .



(a) The number of divisors of n (including n)

(b) The sum of the divisors of n (excluding n) minus n

(c) The number of ways of expressing n as a sum of three squares

(d) The number of ways of expressing n as a sum of four squares

(e) The number of ways of expressing an even number n as the sum of two primes

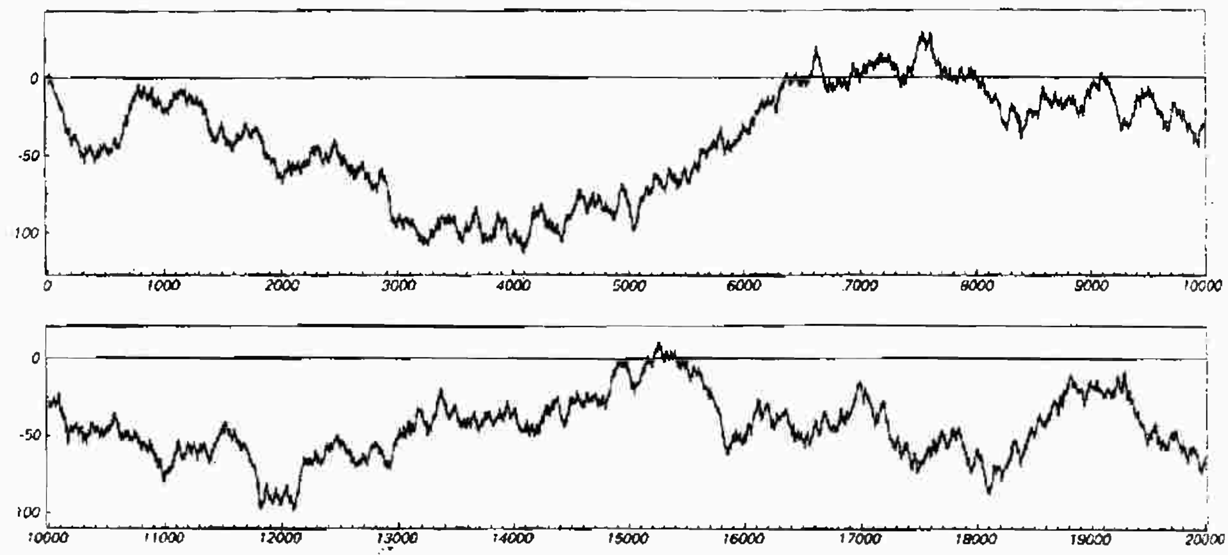
شكل (٥٣)

الثوابت الرياضية

Mathematical nonstants

رغم أننا لفتنا النظر إلى أن بعض المتواليات يمكن أن تبدى سلوكا شديد التعقيد، ولكن هذا السلوك المعقد موجود بالفعل حتى فى الرياضيات الأولية البسيطة خير مثال على ذلك هو قيمة العدد (ط) أى النسبة بين طول محيط الدائرة إلى طول قطرها . هذا العدد (ط) لتقريب كبير نكتبه ٣,١٤ ولكن إذا توخينا دقة عالية فهو ٣,١٤١٥٩٢٦٥٣٥٨٩٧٩٣٢٣٨٤٦٢٦٤٣٣٨٣٢٧٩٥٠٢٨٨ .

فى شكل (٥٤) نورد رسما يبين كيف تتغير قيمة العدد حتى عشرين ألف رقم فى النظامين العشرى والثنائى .



شكل (٥٤)

كل ما يمكن قوله أن هذه المتتالية عشوائية تماماً .

هل هذا السلوك المعقد خاص بالعدد «ط» فقط ؟ لنورد بعض الأعداد مثل ناتج قسمة العدد (٨/٣). ناتج القسمة هو ٠,٣٧٥٠٠٠٠٠ لأنها قسمة منتهية . مثال آخر : (٣/١) = ٠,٣٣٣٣٣٣٠٠٠٠ ويتكرر الرقم ٣ إلى ما لا نهاية . لكن ناتج قسمة العدد (٧/١) = ٠,١٤٢٨٥٧١٤٢٨٥٧,٠٠٠٠ ويتكرر العدد ١٤٢٨٥٧ إلى ما لا نهاية .

فى شكل (٥٥) نورد ناتج قسمة بعض الأعداد الكسرية .

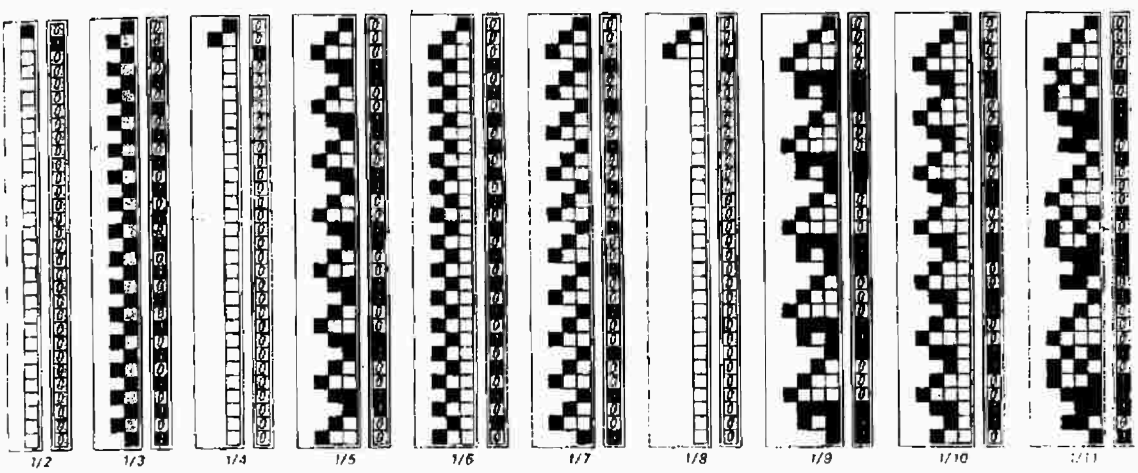
1/3 = 0.333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333...
1/7 = 0.142857142857142857142857142857142857142857142857142857142857142857142857142857142...
1/9 = 0 111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111..
1/11 = 0.090909090909090909090909090909090909090909090909090909090909090909090909090909090...
1/81 = 0.012345679012345679012345679012345679012345679012345679012345679012345679012345679...
1/3 = 0.010101010101010101010101010101010101010101010101010101010101010101010101010101010...
1/7 = 0 001001001001001001001001001001001001001001001001001001001001001001001001001001001..
1/9 = 0.000111000111000111000111000111000111000111000111000111000111000111000111000111000 ..
1/11 = 0.000101110100010111010001011101000101110100010111010001011101000101110100010111010...
1/81 = 0.000000110010100100010110000111111001101011011101001111000000110010100100010110000...

شكل (٥٥)

ولكن من أين يأتى التعقيد فى هذه العملية البسيطة ؟ عمليات القسمة المطولة للعدد (p/q) تبدأ وبشكل مبسط إذا استخدمنا النظام الثنائى حيث تفضى عملية القسمة إلى تكرارية كل (q-1) خطوة .

يختلف الوضع لعملية إيجاد الجذر التربيعى لعدد ما .

فى شكل (٥٦) نورد رسما يوضح خطوات عمليات القسمة المطولة .



شكل (٥٦)

في شكل (٥٧ أ) نورد قيم الجذور التربيعية لعدة أرقام وكما نرى فإنها ذات طبيعة عشوائية تماماً .

$\sqrt{2}$ = 1.41421356237309504880168872420969807856967187537694807317667973799073247846210703 .

$\sqrt{3}$ = 1.7320508075688772935274463415058723669428052538103806280558069794519330169088000037

$\sqrt{5}$ = 2.2360679774997896964091736687312762354406183596115257242708972454105209256378048994 .

$\sqrt{6}$ = 2.449489742783178098197284074705891391965947480656670128432692567250960377457315027 .

$\sqrt{7}$ = 2.6457513110645905905016157536392604257102591830824501803683344592010688232302836628.

$\sqrt{8}$ = 2.828427124746190097603377448419396157139343750753896146353359475981464956924214078

$\sqrt{10}$ = 3.1622776601683793319988935444327185337195551393252168268575048527925944386392382213 .

$\sqrt{11}$ = 3.3166247903553998491149327366707866839270885455893535970586821461164846426090438847

$\sqrt{2}$ = 1.0110101000001001111001100110011111110011101111001100100100001000101100101111110110 .

$\sqrt{3}$ = 1.1011101101100111101011101000010110000100110010101010011100111011001001010111101000

$\sqrt{5}$ = 10.00111100011011101111001101110010111111101001010011111000001010111110011100111001

$\sqrt{6}$ = 10.01110011000100011110000101000000010010010000100101110011111010000001100100001110010

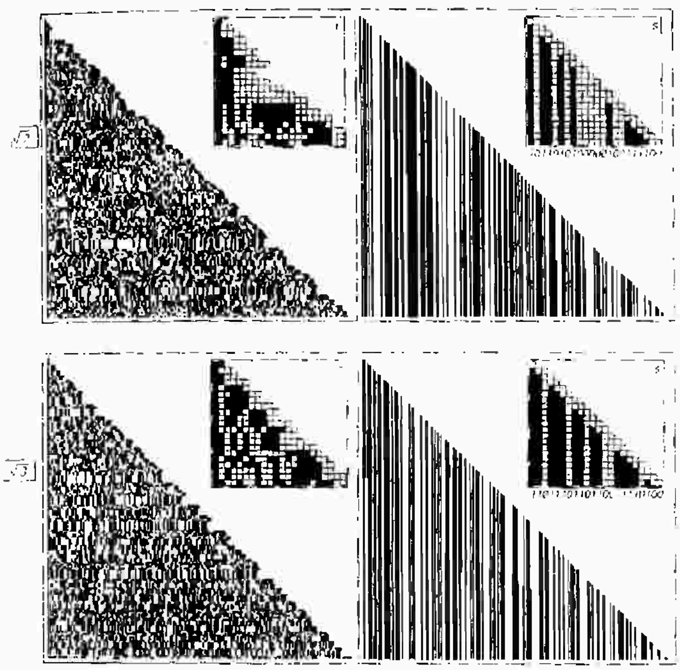
$\sqrt{7}$ = 10.1010010101001111111101010011101001011111000111010011011011110001110011101010011 1 .

$\sqrt{8}$ = 10.1101010000010011110011001100111111100111011110011001001000010001011001011111101110 .

$\sqrt{10}$ = 11.0010100110001011000001110101101110100101101101010010100100100000010010100010101111

$\sqrt{11}$ = 11.0101000100001110010100100111111110101101111001101000000101101000111011110010010011

شكل (٥٧ أ)



شكل (٥٧ ب)

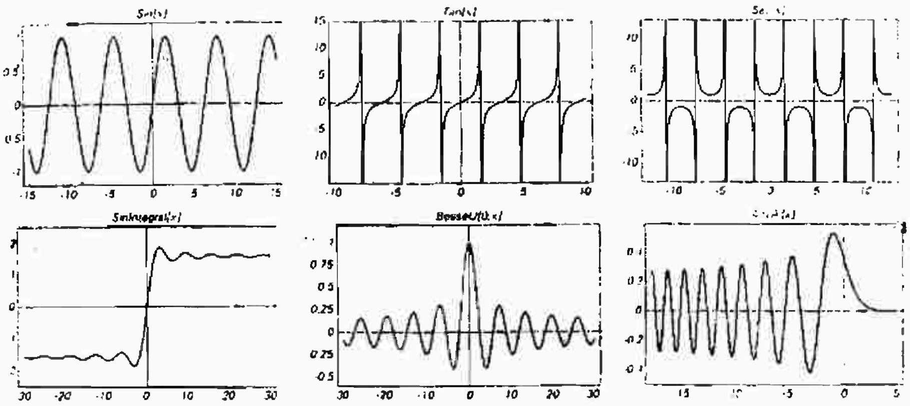
وكما نرى من شكل (٥٧ب) الصورة شديدة التعقيد رغم بساطة القاعدة من مجرد إيجاد الجذر التربيعى لعدد ما .

الدوال الرياضية

Mathematical Functions

لقد كان اهتمامنا منصبا على كيفية التعبير عن الأعداد من خلال دوال أو علاقات رياضية ، ولكن ما هو الحال مع هذه الدوال نفسها ؟

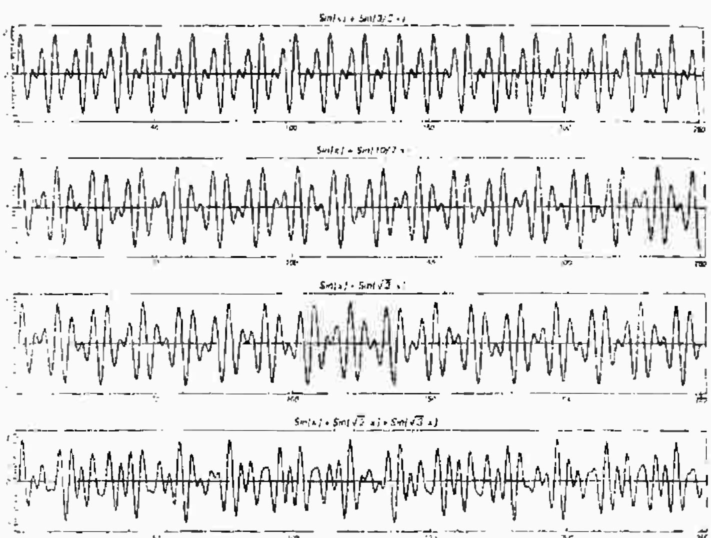
فى شكل (٥٨) نورد رسوما بيانية لمجموعة من الدوال الرياضية .



شكل (٥٨)

ولكن إذا نظرنا إلى بعض الدوال التى يتم تركيبها من هذه الدوال البسيطة نجد أن الصورة اختلفت تماماً .

فى شكل (٥٩) نرى نتائج جمع بعض الدوال البسيطة . فى الرسمين الأولين نحصل على أشكال تكرارية ، أما فى الرسمين الأخيرين نجد أن الشكل عشوائى تماماً .



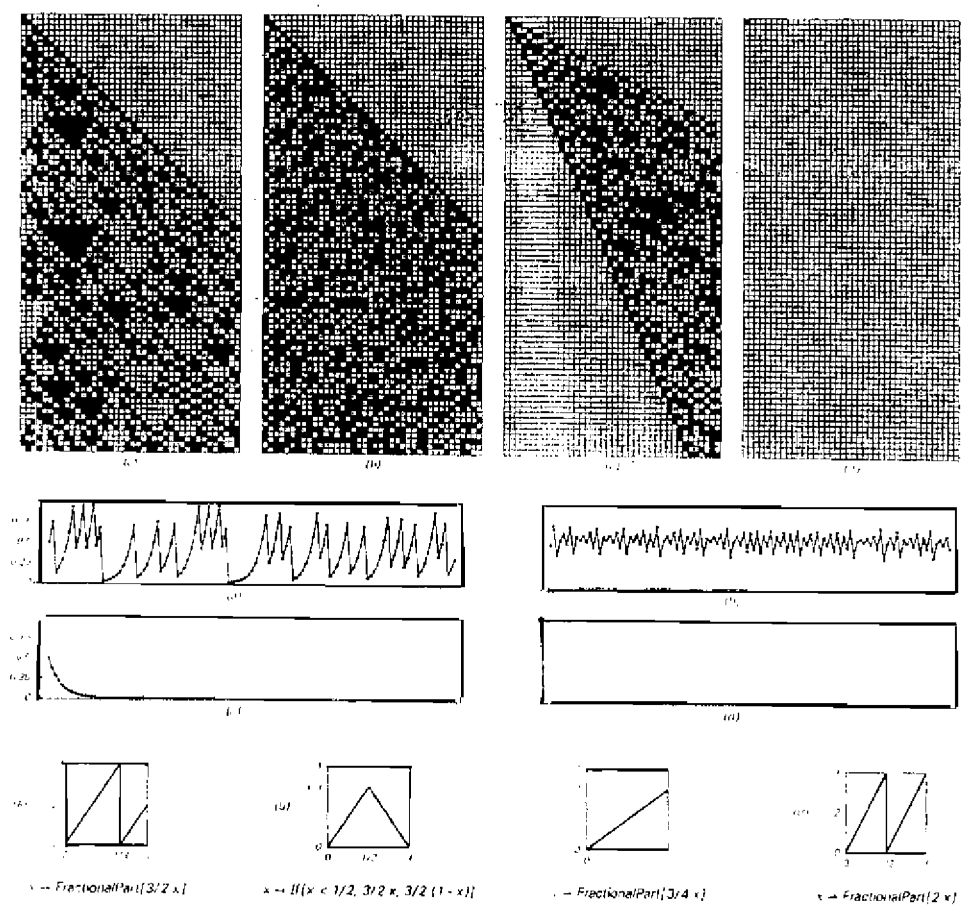
شكل (٥٩)

وهناك أمثلة أخرى على السلوك المعقد للدوال الرياضية والتى تبدو أنها تمثل علاقات بسيطة من ناحية المبدأ .

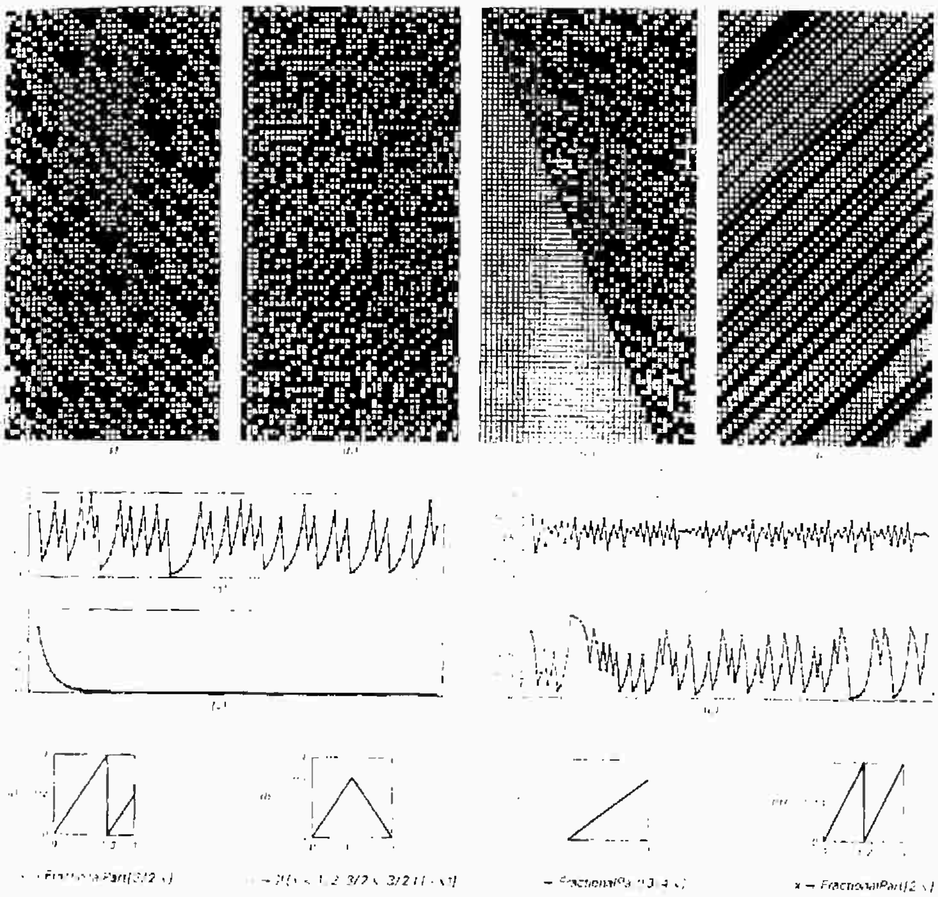
الخرائط التكرارية وظاهرة الشواش
Iterated Maps and Chaos Phenomenon

الفكرة الأساسية للخرائط التكرارية هى أن نأخذ عدداً بين الصفر والواحد وبمتتالية من الخطوات نحدّث هذا العدد حسب قاعدة معينة المسماة «بالخريطة» . فى معظم الحالات التى سوف نوردها يمكن التعبير عن هذه الخرائط بدوال رياضية قياسية . فى النهاية نأخذ عدداً بين الصفر والواحد لينتج حسب قاعدة معينة عدد آخر أيضا أقل من الواحد الصحيح .

فى شكلى (٦٠ ، ٦١) نورد عدة أمثلة لمثل هذه الخرائط . فى الحالتين أ ، ب نحصل على نفس التعقيد الذى ألفناه فى متتاليات الأعداد وأحجام الأعداد . الحالة (جـ) توضح التعقد فى المتتاليات الرقمية وإن كانت أحجام الأعداد تؤول بسرعة للصفر . الحالة (د) تبدو غير ذات معنى (trivial) ولا تبدى أية تعقيد سواء فى متتالية الأرقام أو فى أحجام الأعداد .



شكل (٦٠)

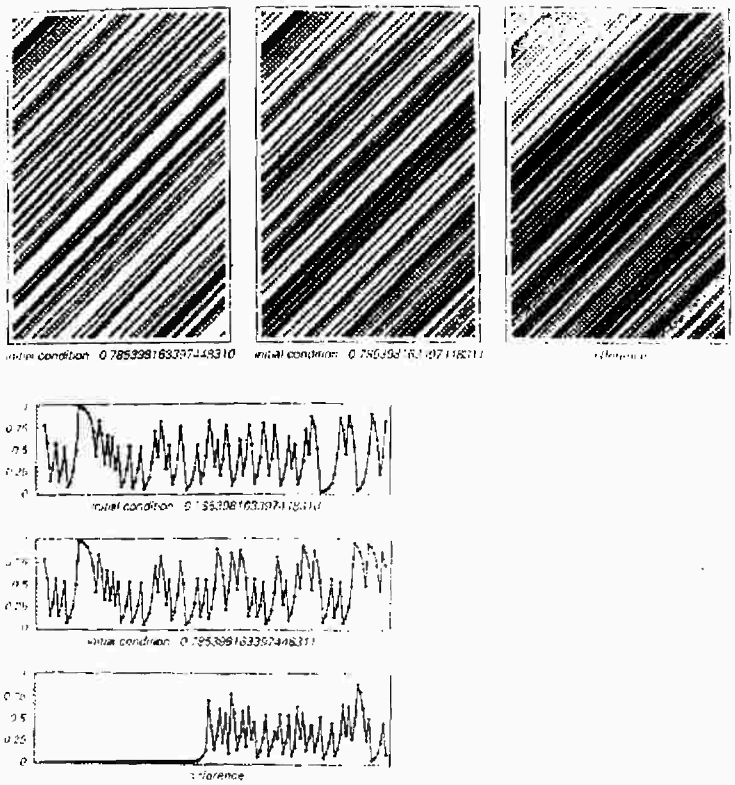


شكل (٦١)

من أهم السمات التى نود أن نلفت لها النظر أن الحالة (د) تمثل متتاليات إزاحة تخلق داخليا سلوكا شديد التعقيد وكذلك عشوائية ، فهى ليست مجرد ناقل للعشوائية والتعقيد إذا حدث ذلك فى الشروط الابتدائية . هنا تكمن إحدى الخصائص الجديدة والتى كانت غامضة إذا عولجت بواسطة الرياضيات التقليدية .

اهتمامنا بهذه السمة ينبع من أن مقارنة أحجام الأعداد لا تعطى نتيجة بديهية حيث أنه إذا كان العددان متقاربين جداً ففى الرياضيات التقليدية لابد أن يعطيا نتيجتين متقاربتين . لكن فى هذا الإطار الذى نستخدمه هناك بعض النظم الحساسة جداً للتغيرات الطفيفة فى الشروط الابتدائية .

فى شكل (٦٢) نورد نظاما لعددين الفارق بينهما جزء من البليون بليون . النتيجة أن الرسمين متقاربين جداً جداً فى البداية ولكن عند لحظة معينة يختلفان

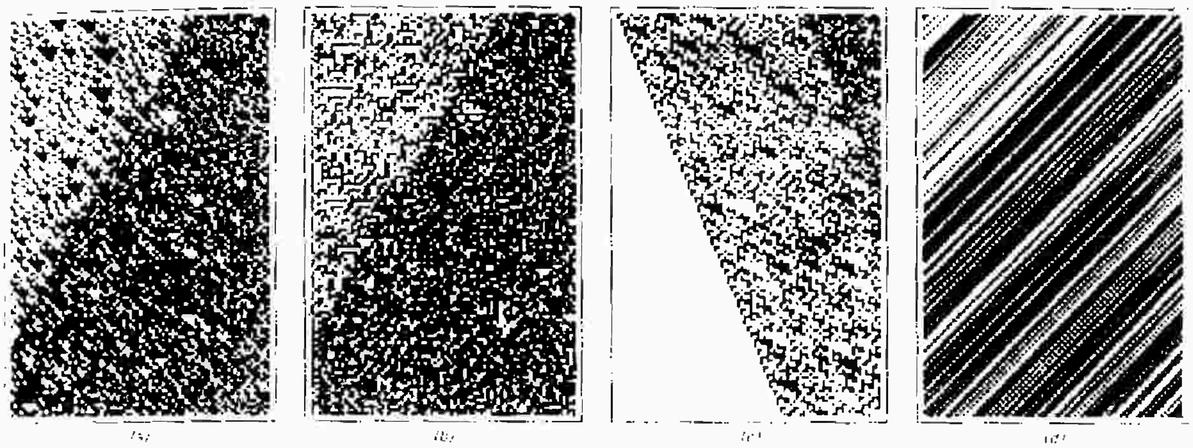


شكل (٦٢)

تمام الاختلاف كما هو موضح فى الرسم الذى يمثل ناتج الطرح للمتواليتين . كل هذا لا يفسر ظهور العشوائية . مما نراه سوف تظهر العشوائية إذا كان العدد الذى نبدأ به يعطى متوالية عشوائية .

إن الاكتشاف الذى توصلت له فى هذا الكتاب أن النظم التى تظهر عشوائية فى السلوك تفعل ذلك حتى وإن كانت شروطها الابتدائية مبسطة إلى أقصى حد .

كذلك تبدى المتتاليات الرقمية نفس السلوك كما هو مبين فى شكل (٦٣) ولا تقتصر هذه الخاصية على الخرائط الإزاحية .



شكل (٦٣)

فى النهاية ما توصلت إليه هو أن هذه النظم رغم حساسيتها الفائقة للشروط الابتدائية فليس هذا هو السبب الحقيقى لظهور العشوائية .

الأوتوماتا الخلوية الاستمرارية Continuous Cellular Automata

فى كل البرامج التى وردت حتى الآن كنا نتعامل مع برامج تأخذ قيما منفصلة (discrete) والتى عبرنا عنها باللونين الأبيض والأسود . فى هذا الباب أوردنا متتاليات كلها تأخذ قيما منفصلة من خلال القيمتين الصفر والواحد الصحيح .

فى هذا الجزء سوف نعالج نظما لا تأخذ اللونين الأسود والأبيض فقط ولكن تأخذ اللون الرمادى بدرجاته المختلفة .

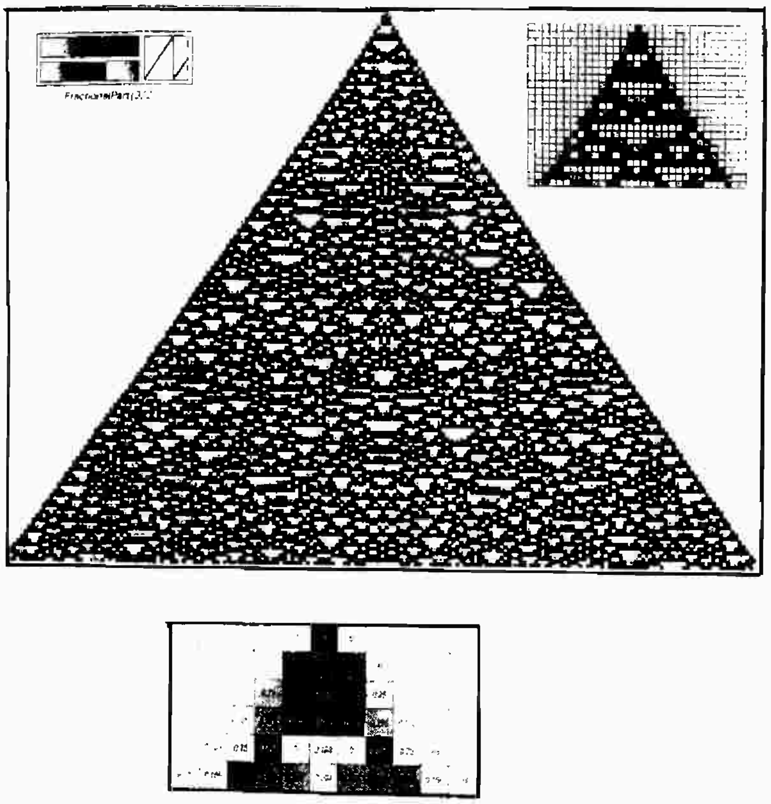
الفكرة هنا أن نأخذ فى الاعتبار اللون الرمادى المتوسط للخلية وكذلك الخلايا المجاورة مباشرة . ثم نأخذ اللون الرمادى حسب قاعدة محددة «لخريطة» تمثل النتيجة التى حصلنا عليها .

فى شكل (٦٤) نرى مثالا لذلك حيث يتدرج لون الخلية من الأسود حتى الأبيض والرمادى بدرجات مختلفة .

0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0.333	0.333	0.333	0	0	0	0
0	0	0	0.111	0.222	0.333	0.222	0.111	0	0	0
0	0	0.037	0.111	0.222	0.259	0.222	0.111	0.037	0	0
0	0.017	0.049	0.123	0.198	0.235	0.198	0.123	0.049	0.012	0
0.004	0.021	0.062	0.123	0.185	0.21	0.185	0.123	0.062	0.021	0.004

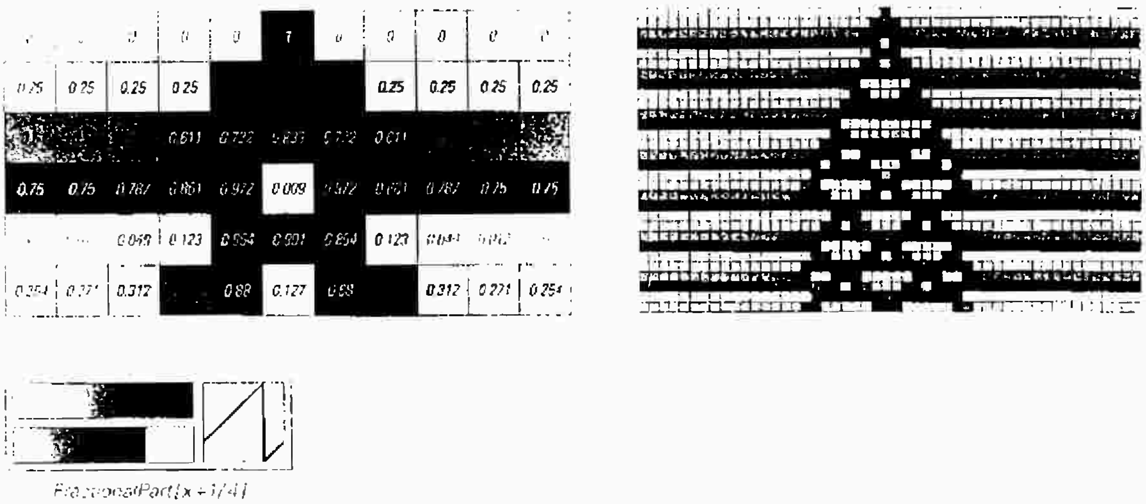
شكل (٦٤)

فى شكل (٦٥) نرى مثالا آخر حيث نستخدم قاعدة أعقد قليلا حيث نضرب النتيجة فى العدد (١,٥) ، ثم نحتفظ بالجزء الكسرى إذا كانت النتيجة أكبر من الواحد الصحيح .



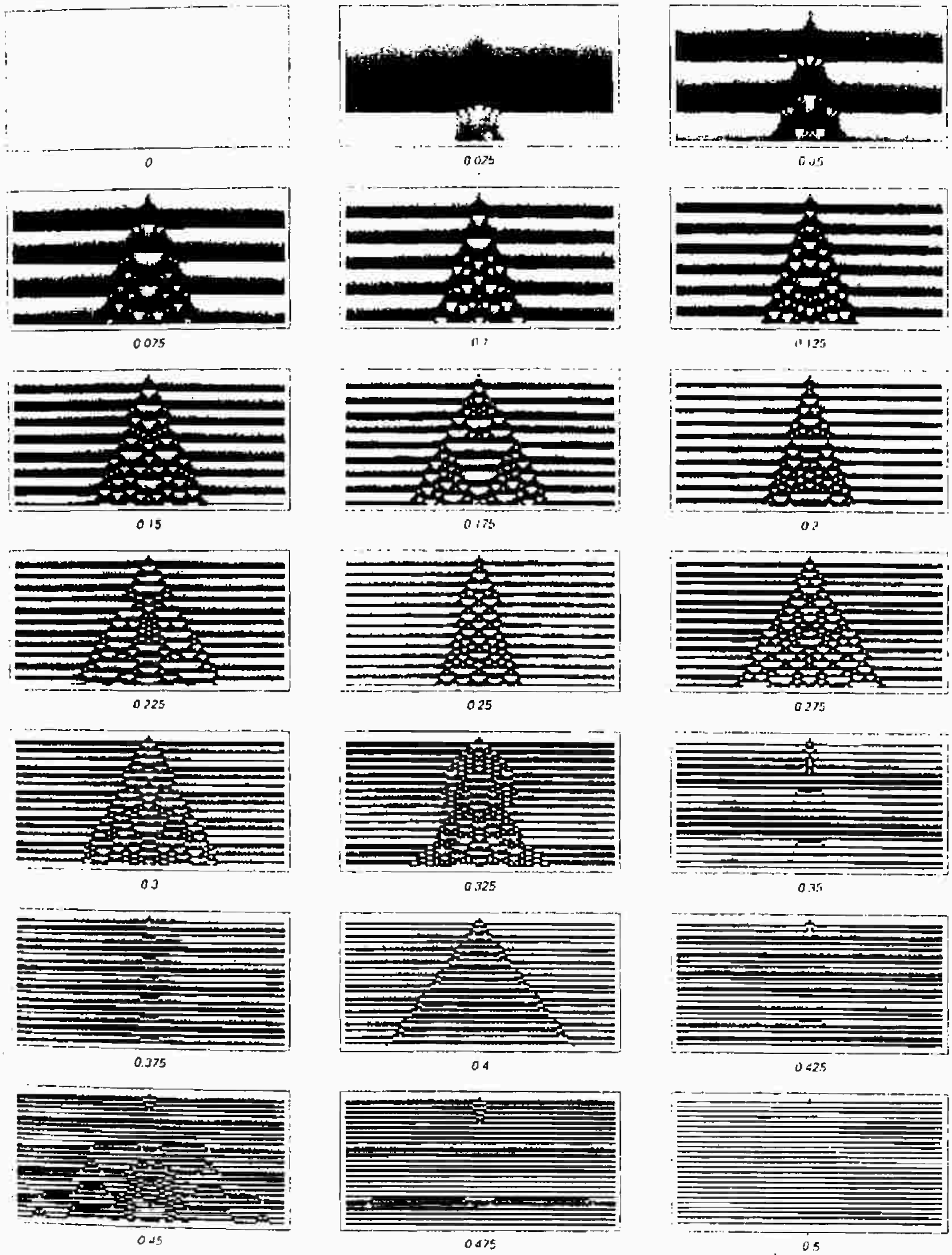
شكل (٦٥)

فى شكل (٦٦) نورد رسما حسب قاعدة إضافة العدد ٠,٢٥ إلى القيمة الناتجة والاحتفاظ بالجزء الكسرى فقط للعدد الناتج .

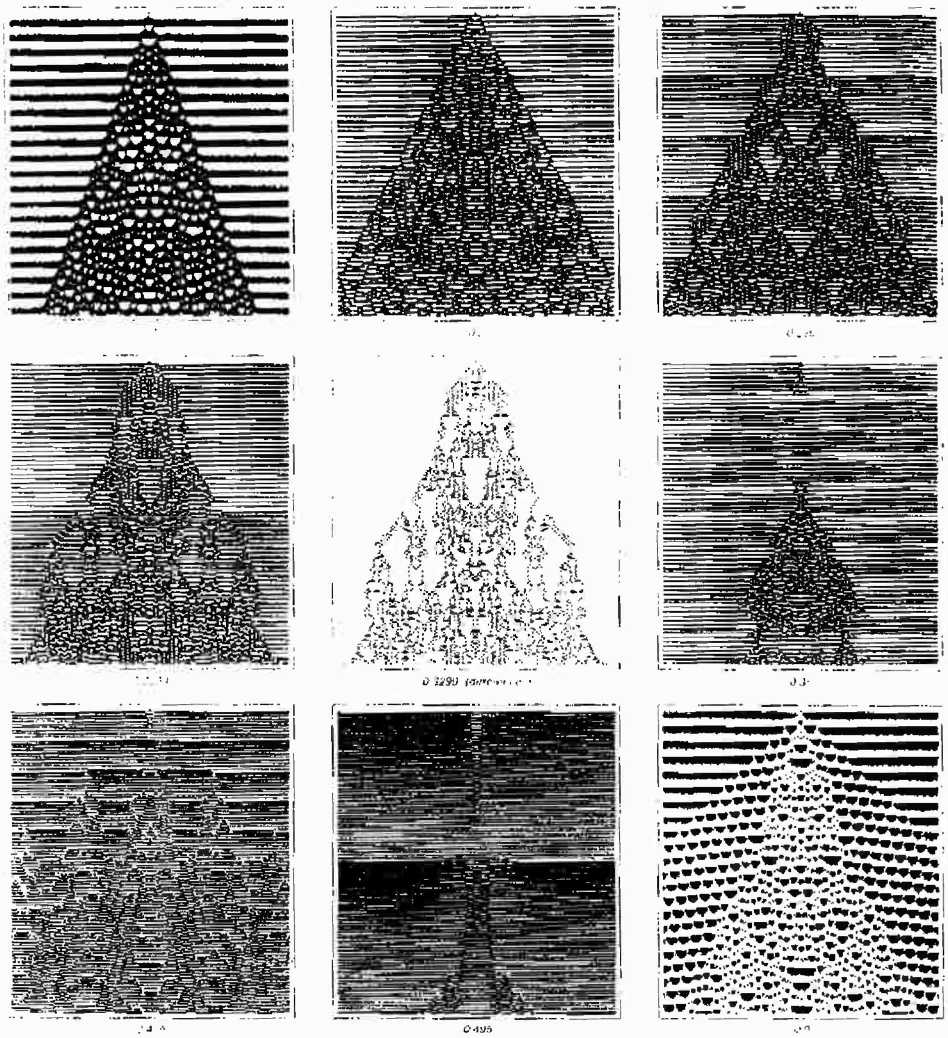


شكل (٦٦)

فى شكل (٦٧) نورد عدة أشكال توضح السلوك المعقد ، وفى شكل (٦٨) نرى سلوك النظام بعد عدد أكبر من الخطوات حيث تظهر بعض المناطق التى تأخذ قيما منفصلة وإن كانت الصورة توضح درجات استمرارية من اللون الرمادى .


0
0.025
0.05
0.075
0.1
0.125
0.15
0.175
0.2
0.225
0.25
0.275
0.3
0.325
0.35
0.375
0.4
0.425
0.45
0.475
0.5

شكل (٦٧)



شكل (٦٨)

المعادلات التفاضلية الجزئية
Partial Differential Equations

بإدخال الاستمرارية فى لون الخلايا تخلصنا من سمة الانفصالية (discreteness) ولكن تظل طريقة تطور البرنامج انفصالية من حيث أن الأوتوماتون الخلوى يتكون من خلايا منفصلة ويتم التطور حسب خطوات انفصالية فى الزمن .

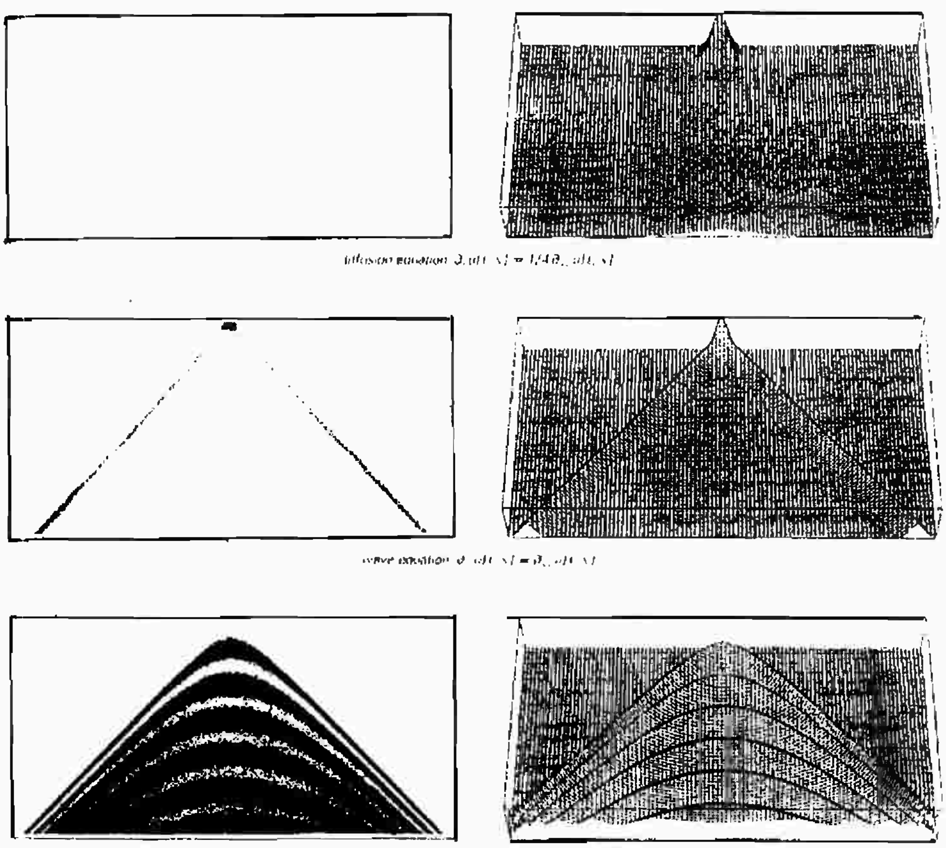
من ناحية المبدأ هل يمكن التخلص من السمتين الأخيرتين ؟ الإجابة نعم ولكن لابد أن نلجأ إلى رياضيات أكثر تجرداً .

يتأتى هذا إذا أخذنا درجات اللون الرمادى لتتغير بشكل استمرارى فى الفراغ والزمن ، بفرض أن كل خلية متناهية الصغر ويستغرق ملؤها فترة زمنية متناهية الصغر أيضاً .

هنا يمكن أن يتحقق هذا إذا وضعنا قاعدة لسرعة تغير اللون الرمادى مع الزمن ومعدل تغيره فى الفراغ . تعرف هذه القواعد فى الرياضيات التقليدية بالمعادلات التفاضلية الجزئية ، والتى تدرس على مدى المائتى سنة السابقة . مثل هذه المعادلات تمثل العمود الفقرى لكل الفيزياء التقليدية كمعادلات ماكسويل ، معادلات أينشتين للجاذبية ، معادلة شرويدنجر فى ميكانيكا الكم ، ومعادلات هودكين – هكسلى للكيمياء الكهربية للخلايا العصبية .

فى شكل (٦٩) نورد رسوما لثلاث معادلات تفاضلية شهيرة ، الرسم الأول يوضح معادلة الانتشار ، الرسم الثانى يبين معادلة الموجة والثالث يبين معادلة جوردون – الجيبية والتى تبدى سلوكا معقدا إلى حد ما وإن كانت السمة التكرارية واضحة .

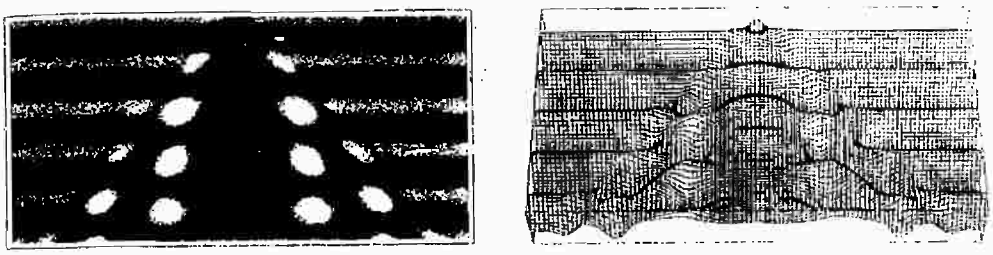
ولكن هل يمكن الحصول على سلوك أكثر تعقيدا من معادلات تفاضلية أخرى؟ من ناحية المبدأ نعم ، ولكن الطرق التقليدية فى الرياضيات الكلاسيكية لا توضح الطريق للكشف عن هذه المعادلات وتحديدها أو كيفية الحصول عليها .



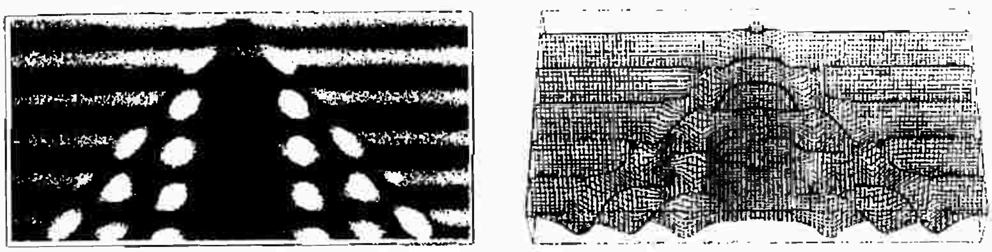
شكل (٦٩)

الفارق هنا أنه فى مجال الأوتومات الخلوية نلتزم بقواعد بسيطة معروفة ومحددة، أما فى الرياضيات التقليدية يمكن أن تظهر أية علاقة رياضية . فهنا من ناحية المبدأ من السهل التوصل إلى تصنيف يفضى إلى تحديد القواعد التى تؤدى إلى سلوك شديد التعقيد .

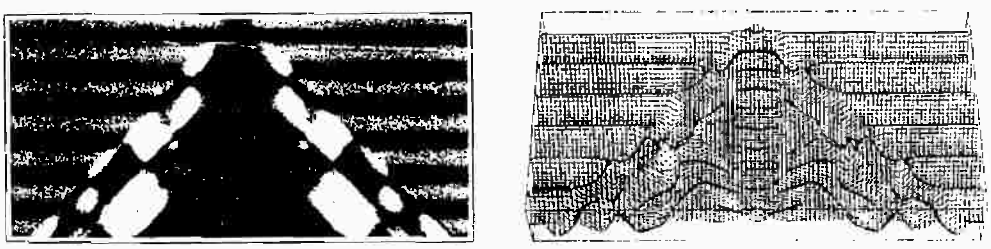
فى شكل (٧٠ أ ، ب) نورد أمثلة للمعادلة التفاضلية التى وجدتها حيث الخلفية تكرارية تامة أما الجزء الرئيسى فى الصورة شديد التعقيد ، تذكرنا بأمثلة عديدة من الأوتوماتا الخلوية الاستمرارية ونظم أخرى تم عرضها فى هذا الكتاب .



$\partial_{tt} u(t,x) = \partial_{xx} u(t,x) + (1 - u(t,x))(1 + u(t,x))$

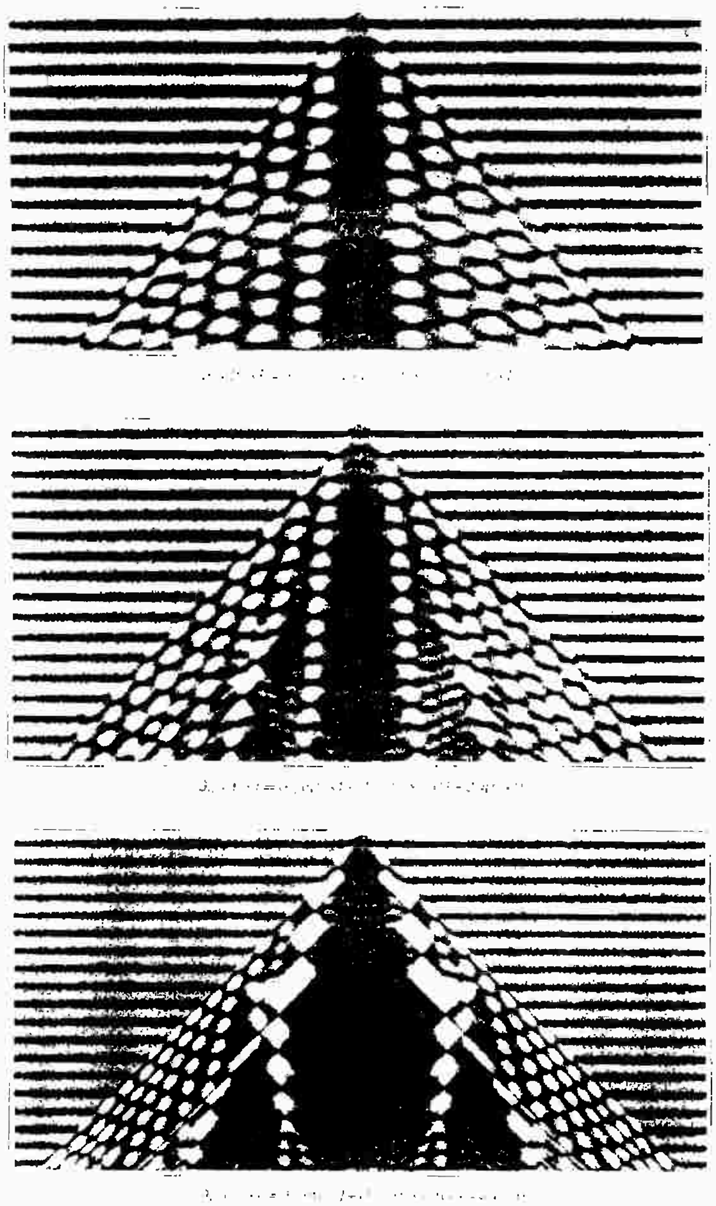


$\partial_{tt} u(t,x) = \partial_{xx} u(t,x) + (1 - u(t,x)^2)(1 + 2u(t,x))$



$\partial_{tt} u(t,x) = \partial_{xx} u(t,x) + (1 - u(t,x)^2)(1 + 4u(t,x))$

شكل (٧٠أ)



شكل (٧٠ ب)

النظم الاستمرارية مقابل النظم المنفصلية
Continuous Versus Discrete Systems

لنواجه السؤال : هل الفارق بين النظم الاستمرارية وتلك المنفصلية ذا مغزى كبير ؟

كان يبدو أن شدة التعقيد من سمات النظم المنفصلية ، ولكن كما هو واضح من النتائج التى عرضناها فإن هذا الاستنتاج غير صحيح بالمرة . فى الحقيقة يمكن أن نقول إن الكشف عن السلوك المعقد أسهل فى النظم المنفصلية عنه فى النظم

الاستمرارية ، كذلك يمكن أن نختبر النظم المنفصلية بطرق أكثر مباشرة من تلك التى تستخدم لاختبار النظم الاستمرارية .

جانب مهم آخر أنه عند اختبار ودراسة النظم الاستمرارية يختلط الأمر أى من السمات التى نراها هى خاصية أصيلة للنظام وأيها نتج عن التقريب وطرق البحث التى اتبعناها .

إن خاصية التعقد قد ظهرت بالتأكيد فى الكثير من مجالات العلم الكلاسيكى ولكن حيث أنها لم تكن معروفة ومحددة المعالم تم إهمالها أو إرجاعها إلى قصور فى طرق المعالجة والبحث ، ولكن لم تحدد كصفة أصيلة للنظم التى تمت دراستها بالنسبة لى عندما بدأت أعمل مع هذه النظم المنفصلية لم يكن عندى خيار غض النظر عن هذه الظواهر بل كنت مضطراً للاعتراف بها وليس طرحها جانبا . والآن ونحن مسلمون بهذا القدر من المعرفة لابد من العودة لهذه النظم الاستمرارية ومعالجتها ودراستها بالتفصيل مرة أخرى . ما أستطيع الآن أن أجزم به أن كل الظواهر التى توصلنا إليها فى النظم المنفصلية ، ليس بالضرورة أن تكون موجودة كلها فى النظم الاستمرارية .