

## الباب الحادى عشر

### النظرية الكمية للإلكترون الحر :

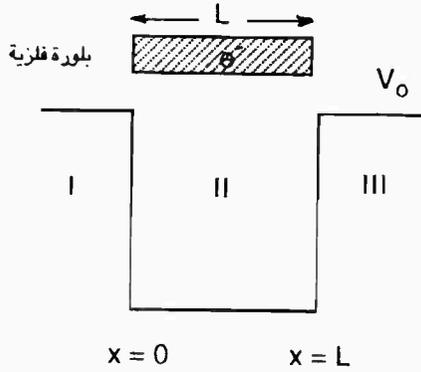
#### Sommerfeld Quantum free electron theory

تعود فشل النظرية الكلاسيكية للغاز الإلكتروني الحر فى تفسير القيم المقاسة للسعة الحرارية heat capacity والقابلية المغناطيسية magnetic susceptibility للفلزات إلى الفرض الأساسى فى النظرية بأن الإلكترونات تشبه الغاز التام ، وتتبع إحصائيا إحصاء ماكسويل وبولتزمان ، حيث يمكن لأى عدد من الإلكترونات أن يكون على نفس مستوى الطاقة .

وهذا ما لا يسمح به مبدأ باولى Exclusion principle ، الذى ينص على أن كل مستوى من مستويات الطاقة يشغله إلكترونان فقط  $S = \pm 1/2$  .  
لذلك أدخل سومر فيلد المبدأ الكمى على نظرية الإلكترون الحر الكلاسيكية ، وقد تمكن بذلك تفسير المزيد من الحقائق العلمية المعروفة عمليا ، وإن لم تستطع هذه النظرية تفسير تلك الفروق الكبيرة فى معاملات توصيل المواد المختلفة .

### الغاز الإلكتروني الكمى : The quantum electron gas

اعتبر بلورة فلزية شكل ( ١١ - ١ ) . تكون طاقة الجهد للإلكترون فى كل مكان بداخلها واحدة وتساوى صفر . يمنع سطح البلورة خروج أى إلكترون حر من داخلها ، وذلك لوجود حاجز جهد مرتفع وليكن ارتفاعه  $V_0$  .  
معادلة شرودنجر للإلكترون بداخل البلورة أى الساقط فى بئر الجهد نو الارتفاع  $V_0$  هى :



شكل ( ١ - ١١ )

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2 m E}{h^2} \Psi = 0$$

الحل العام لهذه المعادلة يعطى الدالة الموجية  $\Psi$  للإلكترون داخل الفلز ، أى داخل بئر الجهد فى المنطقة II على الصورة :

$$\Psi = A \sin \frac{2\pi}{h} \sqrt{2mE} x + B \cos \frac{2\pi}{h} \sqrt{2mE} x$$

أما فى خارج البلورة ، وإذا لم يكن ارتفاع بئر الجهد  $V_0$  كبيراً فيجوز حدوث ظاهرة الإنفاق Tunnel effect كما فى ميكروسكوب المجال الأيونى وتكون الدالة الموجية على الصورة :

$$\Psi_{III} = C e^{-\frac{2\pi}{h} \sqrt{2m(V_0-E)} x}$$

$$\Psi_I = D e^{\frac{2\pi}{h} \sqrt{2m(V_0-E)} x}$$

حيث  $L$  هو بعد البلورة crystal dimension . وبتطبيق شروط الحدود boundary

: condition

$$\Psi = 0 \text{ at } x = 0 \text{ \& } x = L$$

نحصل على :

$$\Psi_L = A \sin \frac{2\pi}{h} \sqrt{2mE} \cdot L$$
$$= 0$$

ويتحقق هذه المعادلة عندما يكون :

$$\frac{2\pi}{h} \sqrt{2mE} \cdot L = n\pi$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

وبذلك يكون للإلكترون الحر داخل البلورة مستويات للطاقة تحددها :

$$E_n = \frac{h^2}{8mL^2} \cdot n^2$$

عندما تكون  $L$  كبيرة فإن مستويات الطاقة تكون قريبة جدا من بعضها . فمثلا إذا

كان  $L = 1 \text{ cm}$  فإن الفرق بين مستويين متتاليين للطاقة الإلكترونية يكون

$$3.5 \times 10^{-19} \text{ eV}$$

إذا اعتبرنا بلورة مكعبة طول ضلعها  $L \text{ cm}$  تكون الدالة الموجية بداخلها هي :

$$\Psi = A \sin \frac{nx\pi}{L} \cdot x \sin \frac{ny\pi}{L} \cdot y \sin \frac{nz\pi}{L} \cdot z$$

وتكون مستويات الطاقة الإلكترونية هي :

$$E(n_x, n_y, n_z) = \frac{h^2}{8mL^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$$

مما سبق يتضح أن طاقة الإلكترون الحرة داخل أي فلز لا تأخذ أي قيمة ، كما تنص

عليها النظرية الكلاسيكية .

ويطبق مبدأ باولي وعدم إمكان وجود أي إلكترونين لهما نفس الأعداد الكمية الأربعة ،

لذلك فإن كل مستوى للطاقة لا يشغله سوى إلكترونين مغزليهما متعاكسين opposite spin .

ولهذا السبب أصبح إحصاء ماكسويل وبولتزمان غير صالح للتطبيق على حالة

إلكترونات الفلز ، ويجب تطبيق الإحصاء الكمي بدلا منه .

الإحصاء الكمي Quantum statistics :

إحصاء بوز واينشتين وفيرمي ديراك Fermi Dirac and

Bose - Einstein statistics

نستخدم هنا أيضا فراغ الطور ذا الأبعاد  $x, y, z, p_x, p_y, p_z$

وقد استبدلنا بالسرعات ومركباتها كمية الحركة  $p = m v$  يكون حجم الخلية الصغيرة

element of volume في هذا الفراغ هو :

$$H = dx dy dz dp_x dp_y dp_z$$

انظر شكل ( ١١ - ٢ )

باستخدام الميكانيكا الكلاسيكية فإن مكان وكمية حركة أى جسيم يمكن تحديدهما

بأى درجة من الدقة ، وذلك يمثله نقطة هندسية فى فراغ الطور .

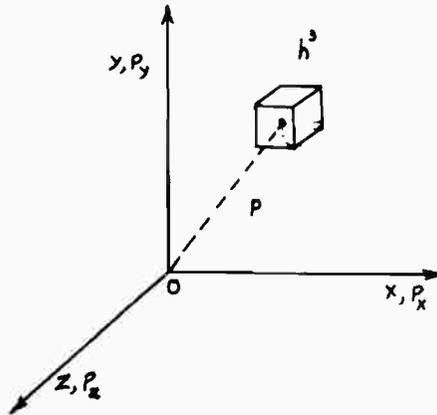
أما إذا أدخلنا الميكانيكا الكمية quantum mechanics ، فإنه يوجد حد للحد limit للدقة

فى تحديد المكان وكمية الحركة معا ، وهو ما يمليه مبدأ عدم التحديد لهيزنبرج .

أصغر حجم فى فراغ الطور يمكن لنا أن نجزم بأن الجسيم موجود بداخله هو  $h^3$

حيث  $h$  هو ثابت بلانك .

ويستنتج ذلك مباشرة باستخدام مبدأ هيزنبرج :



شكل ( ١١ - ٢ )

$$\Delta x \Delta p_x = h$$

$$\Delta y \Delta p_y = h$$

$$\Delta z \Delta p_z = h$$

نطلق لفظ غرفة أو حجرة compartment على الحجم  $h^3$  ، للتمييز بينه وبين الخلية Cell ذات الحجم H وهو حجم اختياري ، ويشترط فيه فقط أن تكون أبعاده صغيرة بالنسبة لأبعاد المجموعة xyz وكمية حركة الجسيمات  $dx dy dz dp_x dp_y dp_z$   $P_x P_y P_z$

$$n = \frac{H}{h^3} = \text{عدد الغرف في الخلية} \therefore$$

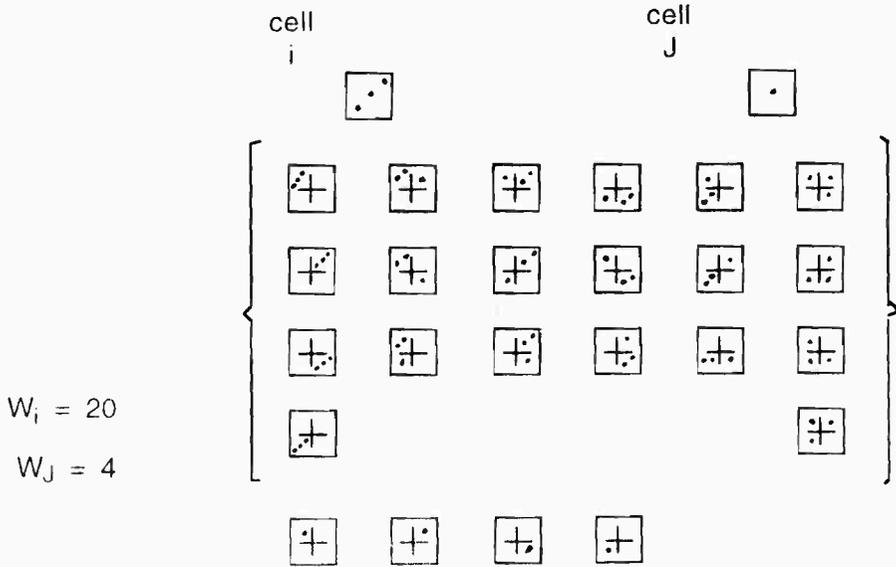
$N_i =$  عدد النقاط في فراغ الطور داخل الخلية i

تحدد مثل الأعداد  $N_i$  في الخلايا المختلفة الحالة الماكروية للمجموعة ، وبالتالي خواصها المحسوسة .

في إحصاء ماكسويل وبولتزمان تتغير الحالة الميكروية بتبادل عدد من النقاط بنفس العدد بين خليتين ، ولكن ذلك لا يؤثر على الحالة الماكروية ، شكل ( ١١ - ٣ ) وتغيير الحالة الميكروية يفرض أن يكون لكل نقطة شخصيتها الذاتية .  
« وهذا هو ما تلغى وجوده في الإحصاء الكمي »

إذ لا يوجد معنى من وراء التمييز بين جزيء وآخر في غاز وفرض شخصية ذاتية لكل. لذلك فإننا نعرف الجزيئات بنقط في فراغ الطور وليس بحروف a b c كما سبق في إحصاء ماكسويل وبولتزمان ، وهذا هو التعديل الأول في الإحصاء الكمي وتطبيقه يعطى إحصاء بوز واينشتين Bose - Einstein statistics ، أما التعديل الثاني فيأتي بسبب وجود قيد يضعه مبدأ باولي على عدد النقاط التي يمكن أن تشغل كل حجره كما هو الحال بالنسبة للإلكترونات ( اثنين  $S = \pm 1/2$  في كل غرفة ) وتطبيق هذا الشرط أيضا يعطى إحصاء فيرمي وديراك :

Fermi - Dirac statisites



شكل ( ١١ - ٢ )

### إحصاء بوز - إينشتين :

ينطبق على الجسيمات التي لا تخضع لمبدأ باولي مثل الفوتونات والجسيمات التي لها دالة موجيه متماثلة Symmetric wave function ، ولذلك يمكن لأي عدد من النقاط أن تشغل أي حجرة في الخلية .

### اعتبر المثال التالي :

نفرض أن لدينا أربعة غرف في كل خلية Cell وأن هناك خليتين فقط وأربعة نقط (كالمثال الذي أوردناه عند الكلام عن إحصاء ماكسويل وبولتزمان) .

بإهمال الشخصية الذاتية لكل نقطة ( في إحصاء ماكسويل عرفنا النقطة بالصروف c b a .. لإعطائها شخصيات ذاتية ) نجد أن هناك عدد ٢٠ طريقة مختلفة لترتيب ٣ نقط

فى الخلية  $i$  وعدد  $\epsilon$  أربعة طرق لترتيب نقطة واحدة فى الخلية  $j$  ، وهذا يعنى وجود احتمال ديناميكى حرارى لكل خلية يساوى عدد الطرق التى يمكن بها ترتيب النقط فى الخلية .

إذا كان  $W_i$  &  $W_j$  هما الاحتمالين فى الخليتين  $i$  &  $j$  فى هذا المثال و  
 $W_i = 20$  ;  $W_j = 4$

ويكون بذلك الإحتمال الديناميكى الحرارى للحالة الماكروئية التى يمثلها  $2$  نقط فى الخلية  $z$  ونقطة واحدة فى الخلية  $i$  هى :

$$W = W_i \cdot W_j = 20 \times 4 = 80$$

وواضح أن هذه القيمة تختلف تماما عن  $W = 4$  التى حصلنا عليها للحالة الماكروئية  $2 : 1$  فى إحصاء ماكسويل وبولتزمان .

وفى الحالة العامة عندما يكون هناك أى عدد من الخلايا يكون الاحتمال الديناميكى الحرارى هو :

$$W = \prod W_i$$

حيث المضروب  $\Pi$  يشمل جميع الخلايا فى فراغ الطور .

العلاقة بين  $N_i$  ،  $W_i$  :

نفرض أننا نرقم الحجرات فى الخلية بالأرقام  $1, 2, 3, 4, \dots$  إلى  $n$  ونقط الطور phase point بالحروف  $a, b, c, \dots$  إلى  $N_i$  إذا أخذنا مثلا الخلية  $i$  يمكن أن تكون النقط فى حجراتها كما يأتى :

1 a b

2 c

3

4 d e f

شكل ( ١١ - ٤ )

الخ . . . .

العدد المكتوب أولا يبين رقم الحجرة .

أولا : بما أن هناك عدد  $n$  حجرات ، لذلك فيوجد  $n$  طريقة لترتيب أرقام الحجرات

دون تغيير فى ترتيب الحروف cba .

**ثانيا** : عدد التباديل التى يمكن بها ترتيب n عدد و  $N_i$  نقطة ، بحيث يبدأ الترتيب

دائماً برقم الحجرة هو :  $(n + N_i - 1) !$

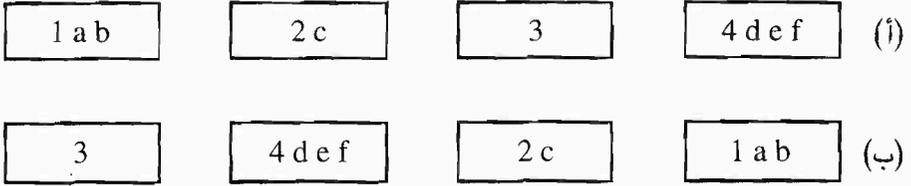
« وضع « ١ - هنا لوجوب بدء الترتيب برقم دائماً »

∴ عدد الطرق المختلفة التى يمكن ترتيب بها الاعداد والنقط هى

$$n (n + N_i - 1) !$$

**ثالثا** : يتكرر حدوث بعض هذه الترتيبات بين عدد n حجرات فمثلا كما فى شكل

(١١-٥):



شكل ( ١١ - ٥ )

الترتيب (i) هو بعينه الترتيب (ب) ويعطى نفس الحالة الميكرونية .

لذلك نتفادى التكرار لنفس الحالة بالقسمة على  $n !$

**رابعا** : بما أن الحروف a ; b ; c كلها متماثلة ولا فرق بينها ، لذلك فإن  $N_i$  حرفا

يمكن أن تترتب فى الخلية بعدد من الطرق يساوى  $N_i !$  ، وتعطى جميعا نفس الحالة

الميكرونية .

لذلك نتفادى التكرار لنفس الحالة بالقسمة على  $N_i !$  .

∴ عدد الحالات الميكرونية الغير متكررة =

$$\frac{n (n + N_i - 1) !}{n ! N_i !}$$

أى أن الاحتمال الديناميكي الحرارى فى الخلية z هو :

$$W_i = \frac{(n + N_i - 1)!}{(n - 1)! N_i!}$$

$$« n! = n(n - 1)! »$$

« وضعنا هنا

$$n = 4$$

ويتطبيق ذلك في المثال المعطى حيث :

$$N_i = 3, N_j = 1$$

نجد أن :

$$W_i = \frac{(4 + 3 - 1)!}{(4 - 1)! 3!} = \frac{6!}{3! 3!} = 20$$

$$W_j = \frac{(4 + 1 - 1)!}{(4 - 1)! 1!} = \frac{4!}{3! 1!} = 4$$

وهي نفس النتيجة التي حصلنا عليها بالعد البسيط .

أخيرا وبما أن كل حالة ميكرونية للخلية  $i$  يمكن أن يقابلها أى حالة ميكرونية للخلية  $j$  .  
لذلك يكون عدد الحالات الميكرونية لجميع الخلايا وهو الاحتمال الديناميكي الحرارى

للمجموعة هو :

$$W = \prod W_i = \prod \frac{(n + N_i - 1)!}{(n - 1)! N_i!}$$

**دالة التوزيع لبوز وإينشتين :**

حالة الاستقرار أو الاتزان نحصل عليها عندما يكون الإنتروپيا  $S$  أكبر ما يمكن .

ولكن  $S = k \ln W$  يكون إذا شرط الاتزان هو :

$$\delta \ln W = 0$$

$$\therefore \ln W = \sum ( \ln (n + N_i - 1)! - \ln (n - 1)! - \ln N_i! )$$

وباستخدام تقريب ستيرلنج (  $\ln N! = N \ln N - N$  ) وبإهمال العدد 1 فى المعادلة

بالمقارنة بالأعداد الكبير  $n$  &  $N_i$  نحصل على :

$$\ln W = \sum (N_i + n) \ln (N_i + n) - n \ln n - N_i \ln N_i !$$

وبمفاضلة المعادلة :

$$\therefore \delta \ln W = \sum \left[ \ln \frac{n + N_i}{N_i} \right] \delta N_i = 0$$

وباعتبار أن الطاقة الكلية للمجموعة ثابتة ، وكذلك عدد الجسيمات يكون :

$$\delta N = \sum \delta N_i = 0$$

$$\delta U = \sum W_i \delta N_i = 0$$

ويضرب المعادلة الأولى في  $-\ln B$

والمعادلة الثانية في  $-\beta$

وبالجمع مع معادلة  $\delta \ln W = 0$  نحصل على :

$$\sum \left[ \ln \frac{n + N_i}{N_i} - \ln B - \beta \omega_i \right] \delta N_i = 0$$

يلاحظ أن قيم  $\delta N_i$  لا تتوقف على أى شيء وكل حد فى المجموع يتلاشى على

حده .

$$\therefore \ln \frac{n + N_i}{N_i} = \ln B + \beta \omega_i$$

$$\therefore N_i = \frac{n}{B \exp \beta \omega_i - 1} = n \cdot f$$

وتوضع عادة قيمة الثابت  $B = 1$  ، حيث إن الاتفاق النظرى مع التجربة يستلزم ذلك،

وتكون بذلك دالة التوزيع لبوز وإينشتين هي :

$$f = \frac{1}{\left[ e^{\omega_i / kT} - 1 \right]}$$

$$\beta = \frac{1}{kT}$$

علما بأن :

**تطبيق :** بتطبيق إحصاء بوز وإينشتين على غاز من الفوتونات يشكل إشعاعا

حراريا درجة حرارته المطلقة  $T$  ، أثبت أن كثافة الطاقة لهذا الغاز فى المدى بين  $\nu + d\nu$  هى :

$$E(\nu) = \frac{8 \pi h}{c^3} \frac{\nu^3 d\nu}{(e^{h\nu/kT} - 1)}$$

حيث  $c$  ,  $k$  ,  $h$  تأخذ معانيها المألوفة .

فإذا اعتبرنا حالة غاز من الفوتونات طاقة كل فوتون  $h\nu$  تصبح دالة التوزيع :

$$f(\nu) = \frac{1}{(e^{h\nu/kT} - 1)}$$

$$m c = p = \frac{h\nu}{e} = \frac{\omega}{c} \quad \text{كمية الحركة للفوتون}$$

بإستبدال  $n$  فى معادلة  $N_i$  بالمقدار  $dp_x dp_y dp_z$  وأيضا  $\frac{2}{h^3} dx dy dz$

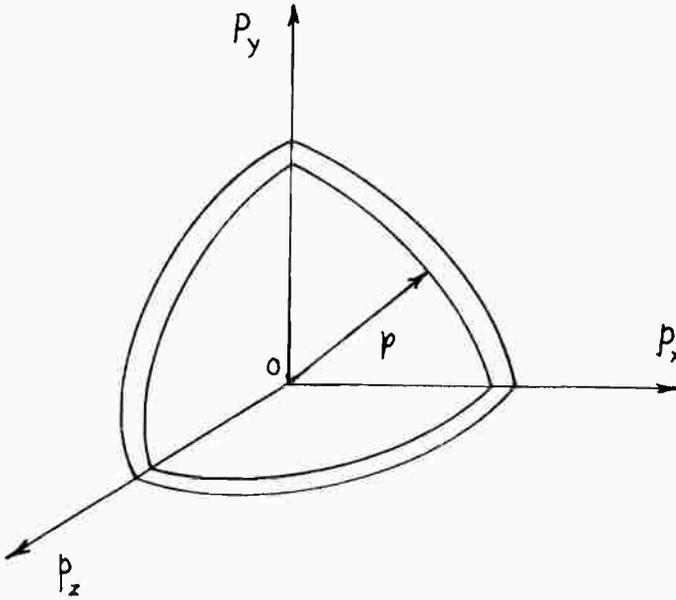
$N_i$  بـ  $d^6N$  ( المعامل التفاضلى السادس لـ  $N$  ) وبإجراء التكامل فى الفراغ على  $x, y, z$  نحصل على توزيع كمية الحركة فى الفراغ . ( المعامل 2 فى قيمة  $n$  باعتبار وجود نوعين من الفوتونات يمينى  $right\ handed$  ، ويسارى  $left$  نسبة إلى أن الضوء يمكن أن يكون ، استقطابه الدائرى يميناً أو يسارياً :  $right\ or\ left\ circularly\ polarized$  )  
light

$$\therefore d^3N = \frac{2V}{h^3} \cdot \frac{1}{(e^{pc/kT} - 1)} dp_x dp_y dp_z$$

وباعتبار قشرة كرية رقيقة فى فراغ الطور نصف قطرها  $p$  وسمكها  $dp$  شكل

( ١١ - ٦ ) يكون :

$$dN_p = \frac{2V}{h^3} \cdot \frac{4\pi p^2}{(e^{pc/kT} - 1)} dp$$



شكل ( ١١ - ٦ )

ويمكن تحويل المعادلة السابقة لتعطي توزيع الفوتونات بدلالة الترددات ، وذلك

باستخدام العلاقات :

$$p = \frac{h\nu}{c} \quad ; \quad dp = \frac{h}{c} d\nu$$

$$\therefore dN_\nu = \frac{8\pi V}{c^3} \cdot \frac{\nu^3}{(e^{h\nu/kT} - 1)} d\nu$$

وبما أن عدد الفوتونات لوحدة الحجم هو  $\frac{dN_p}{V}$  وطاقة الفوتون  $h\nu$  تكون كثافة

الطاقة energy density ( الطاقة لوحدة الحجم ) في المدى بين  $(\nu & \nu + d\nu)$  هو :

$$E(\nu) d\nu = \frac{h\nu}{V} dN_\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \cdot \frac{\nu^3}{(e^{h\nu/kT} - 1)} d\nu$$

وتتفق هذه المعادلة مع معادلة بلانك لكثافة الطاقة الإشعاعية في حيز درجة حرارته

المطلقة T .

## إحصاء فيرمي وديراك : Fermi - Dirac Statistics

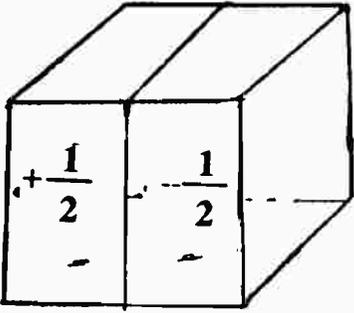
لإيجاد نوع من الإحصاء يصلح للجسيمات التي لها دوال موجية غير متماثلة anti symmetric wave functions مثل الإلكترونات والبروتونات .. إلخ ، يجب تطبيق مبدأ باولي لكي لا يشغل أى مستوى للطاقة أكثر من جسيمين ، وهذا يعنى أن الحجرة compartment فى فراغ الطور ( ذات الحجم  $h^3$  ) لا يمكن أن يوجد بها سوى جسيمين . (  $S = \pm 1/2$  )

وهذا يعنى أن إحداثيات هذه الحجرات فى فراغ الطور تناظر تماما الأعداد الكمية للجسيم .

∴ عدد الجسيمات التي يمكن أن تشغل كل خلية هو :

$$n = 2 \frac{H}{h^3} = \frac{\text{حجم الخلية}}{\text{حجم الحجرة}} \times 2$$

نفرض أن الجسيم الواحد يشغل غرفة واحدة أى نصف حجرة ، بفرض أن الحجرة (مستوى الطاقة الواحد) مقسم إلى غرفتين ، شكل ( ١١ - ٧ ) .



وبالعودة للمثال الخاص بتوزيع

الأربع نقط فى الخليتين .

وباعتبار الحالة الماكروية :

$$N_j = 1 \text{ \& } N_i = 3$$

شكل ( ١١ - ٧ )

$h^3$

$N_i = 3$   
Cell i

}



$$W_i = 4$$

$N_j = 1$   
Cell j

}



$$W_j = 4$$

شكل ( ١١ - ٨ )

أى أنه يوجد أربعة طرق فقط لترتيب ثلاث نقاط فى الخلية ( ١١ - ٨ ) وكذلك أربعة طرق لترتيب نقطة واحدة فى ز أى أن عدد الطرق الكلية أو الاحتمال الديناميكي الحرارى لهذه الحالة الماكرونية (  $N_i = 3$  ,  $N_j = 1$  ) هو :

$$W = W_i W_j = 16$$

وهذا يختلف عن العدد 4 لنفس الحالة الماكرونية بإستخدام إحصاء ماكسويل ، وكذلك العدد  $W_i = 80$  باستخدام إحصاء بوز وإينشتين .

∴ الاحتمال الديناميكي الحرارى لأى عدد من الخلايا هو :

$$W = \Pi W_i$$

**العلاقة بين  $N_i$  &  $W_i$**

نفرض أن هناك  $n$  غرفة فى خلية فيها عدد  $N_i$  مشغول والباقى (  $n - N_i$  ) خال (يلاحظ هنا أن الغرفة الواحدة يشغلها نقطة واحدة)

∴ عدد التباديل الغير متماثلة داخل الخلية  $i$  وهى الاحتمال الديناميكي الحرارى لها :

$$W_i = \frac{n!}{N_i! (n - N_i)!}$$

حيث تباديل الفراغات ( الغرف )  $n!$  وتباديل المشغول فقط منها  $N_i!$  وتباديل

الفراغ منها  $(n - N_i)!$  وتطبيق ذلك على المثال المعطى :

$$N_j = 1 \text{ \& } N_i = 3 \text{ \& } n = 4 \quad \text{نحصل على :}$$

$$W_j = \frac{4!}{1!3!} = 4 \text{ \& } W_i = \frac{4!}{3!1!} = 4$$

وهى النتيجة التى حصلنا عليها بالعد البسيط .

∴ الاحتمال الديناميكي الحرارى لحالة ماكرونية باستخدام إحصاء فيرمى وديراك

هو :

$$W = \Pi \frac{n!}{N_i! (n - N_i)!}$$

وباستخدام المعادلة  $S = k \ln W$  ، ثم باعتبار أن حالة الاستقرار تكون عندما

تصبح  $S$  قمة نوجد شرط الاستقرار Maximum entropy من المعادلة :

$$\delta \ln W = 0$$

$$\therefore \ln W = \Sigma [ (\ln n! - \ln N_i! - \ln (n - N_i)!) ]$$

وباستخدام تقريب ستيرنج نحصل على :

$$\ln W = \Sigma ( n \ln n - N_i \ln N_i - n \ln (n - N_i) + N_i \ln (n - N_i) )$$

وبالمفاضلة بالنسبة إلى  $N_i$  والمساواة بالصفر نحصل على :

$$\delta \ln W = \Sigma \ln \frac{n - N_i}{N_i} \delta N_i = 0$$

ولما كان العدد الكلى لنقط المجموعة ثابتاً وكذلك الطاقة الكلية لذلك :

$$\delta N = \Sigma \delta N_i = 0$$

$$\delta U = \Sigma \omega_i \delta N_i = 0$$

ويضرب المعادلة الأولى فى  $-\ln B$  والثانية فى  $-\beta$  ، وبالجمع مع معادلة

$$\delta \ln W = 0 \quad \text{نحصل على :}$$

$$\Sigma \left( \ln \frac{n - N_i}{N_i} - \ln B - \beta \omega_i \right) \delta N_i = 0$$

ولكن طالما أن  $\delta N_i$  فى الخلايا المختلفة لا يتوقف على بعضه البعض :

$$\therefore \ln \frac{n - N_i}{N_i} - \ln B + \beta \omega_i = 0$$

$$\therefore N_i = \frac{n}{(B e^{\beta \omega_i} + 1)}$$

وباستخدام الديناميكا الحرارية كما سبق فى حالة إحصاء ماكسويل وبولتزمان نجد

أن :

$$\beta = \frac{1}{kT}$$

أما عن قيمة الثابت B فقد أوجد سومر فيلد Sommerfeld قيمته ( الطريقة طويلة ومعقدة ولا مجال لذكرها هنا ) كما يأتي :

$$B = e^{-\omega_F / kT}$$

حيث  $\omega_F$  هي طاقة فيرمي ، وسيتم لها بالرمز  $E_F$  فيما بعد .  
وهذا يعطى دالة التوزيع لفيرمي وديراك على الصورة :

$$\frac{N_i}{n} = f = \frac{1}{\left( e^{(\omega_i - \omega_F) / kT} + 1 \right)}$$

ولإيجاد دالة التوزيع في فراغ الطور بدلالة كمية الحركة p نضع كما سبق :

$$n = \frac{2H}{h^3} = \frac{2}{h^3} dx dy dz dp_x dp_y dp_z$$

ونستبدل بدلا من  $N_i$  القيمة  $d^6N$  ، وكذلك بدلا من  $W_i$  القيمة  $W$  فنحصل

على

$$d^6N = \frac{2}{h^3} \frac{1}{\left[ e^{(w - \omega_F) kT} + 1 \right]} dp_x dp_y dp_z dx dy dz$$

وبإجراء التكامل على x.y.z

$$\therefore d^3N = \frac{2V}{h^3} \frac{1}{\left( e^{(w - \omega_F) kT} + 1 \right)} dp_x dp_y dp_z$$

وباعتبار وحدة الحجم من المجموعة نقسم على الحجم V

$$\therefore d^3N = \frac{2}{h^3} \cdot f \cdot dp_x dp_y dp_z$$

حيث :  $f = \frac{1}{e^{(w - \omega_F) kT} + 1}$  وتسمى دالة التوزيع لفيرمي - وديراك

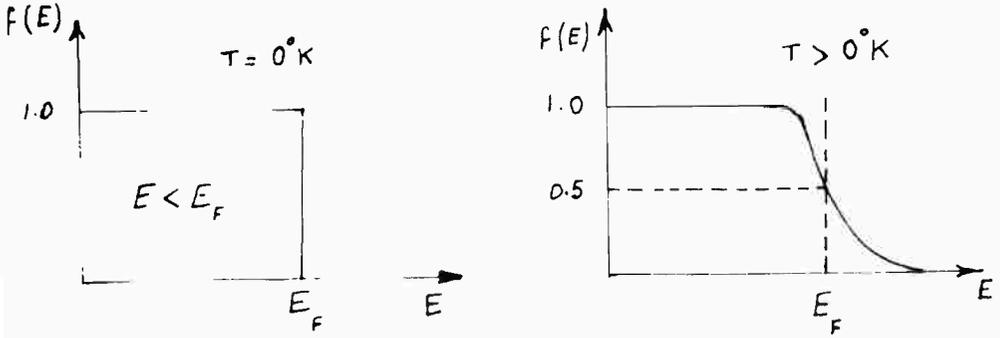
: طاقة فيرمي .  $E_F$  Fermi Energy

نطبق إحصاء فيرمي وديراك على الغاز الإلكتروني الكمي ، نفرض أن E هي طاقة

احد المستويات الممكنة an allowed state ، وأن طاقة فيرمي هي  $E_F$  . احتمال أن يكون

هذا المستوى من الطاقة E مشغولا بالإلكترونين هو :

$$f(E) = \frac{1}{(e^{(E-E_F)/kT} + 1)}$$



شكل ( ١١ - ٩ )

ولتوضيح معنى طاقة فيرمي  $E_F$  نرسم بيانيا الدالة  $f(E)$  بدلالة الطاقة  $E$ . عند درجة الصفر المطلق تكون جميع مستويات الطاقة الأقل من مستوى طاقة فيرمي جميعها مشغول بالإلكترونين لكل مستوى. وتكون قيمة دالة التوزيع 0.5 للإلكترون وواحد صحيح لمستوى الطاقة ( $f(E) = 1$ ).

جميع المستويات الأعلى من  $E_F$  تكون شاغرة إذا كانت درجة الحرارة هي صفر مطلق، شكل ( ١١ - ٩ ).

إذا رفعنا درجة الحرارة من الصفر المطلق تستطيع الإلكترونات التي تشغل مستويات الطاقة القريبة من طاقة فيرمي أن تكتسب طاقة بفعل الحرارة، فترتفع إلى المستويات الأعلى الشاغرة.

ارتفاع درجة الحرارة لا يؤثر على جميع إلكترونات الغاز، ولكنها فقط تؤثر على الإلكترونات عند سطح فيرمي، والتي يمكن لها أن تجد مكانا شاغرا في مستويات الطاقة الأعلى منها، كما يحدث في حالة البخار من السوائل حيث لا يغادر السطح سوى الجزيئات العلوية عند السطح الحر.

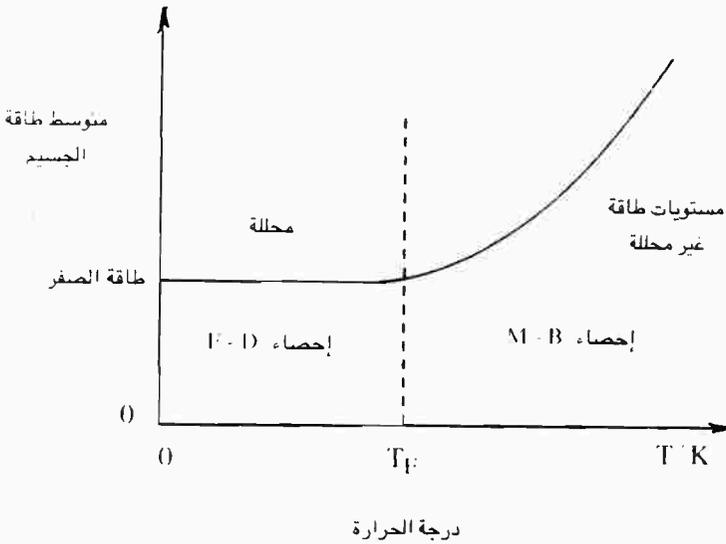
لهذا السبب فإن احصاء فيرمي ديراك يتميز بعدم التأثر الكبير بدرجة الحرارة،

وأيضاً عند الصفر المطلق يوجد بالمجموعة كمية من الطاقة تسمى طاقة نقطة الصفر Zero point energy وهذا اختلاف جوهري عن إحصاء ماكسويل الذي تتلاشى فيه تماماً طاقة المجموعة عند درجة الصفر المطلق .

درجة حرارة فيرمي : Fermi temperature

عند رفع درجة الحرارة بدرجة كبيرة نجد أن توزيع فيرمي يتحول إلى توزيع ماكسويل شكل ( ١١ - ١٠ ) . وتعرف درجة الحرارة التي يحدث عندها هذا التحول بدرجة حرارة فيرمي  $T_F$  °K وتعطى بالمعادلة :

$$E_F = k T_F$$



شكل ( ١١ - ١٠ )

وتصل قيمة  $T_F$  للفلزات حيث تركيز الإلكترونات كبيراً إلى حوالي ٢٠.٠٠٠ درجة مطلقة . بينما في حالة أشباه الموصلات فقد تكون  $T_F$  أقل من درجة حرارة الغرفة . وهذا يعني أنه في حالة أشباه الموصلات يمكن اعتبارها غير محلة non degenerate عند درجة حرارة الغرفة ، حيث يجوز عندئذ تطبيق إحصاء ماكسويل .

## تطبيق إحصاء فيرمي وديراك على الغاز الإلكتروني في الموصلات

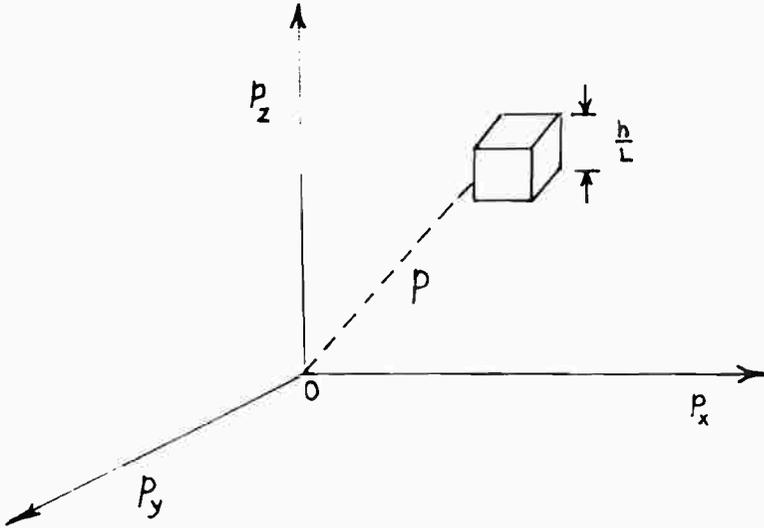
حساب طاقة فيرمي  $E_F$  للغاز الإلكتروني في الفلزات

يتحدد في فراغ الطور ذي الأبعاد  $x y z$   $p_x p_y p_z$  حالة أي الإلكترون في الغاز .

لنعتبر فقط فراغ كمية الحركة  $p_x p_y p_z$  . نفرض أن الإلكترون موجود في بلورة مكعبة طول ضلعها  $L$  .

عدم التحديد في كمية الحركة  $\Delta p_x$  في الاتجاه السيني يساوي حسب قاعدة

هايزنبرج  $\frac{h}{L}$  ، وبالمثل يكون عدم التحديد في كمية حركة الإلكترون في كل من الاتجاهين  $y, z$  هو  $\frac{h}{L}$



شكل ( ١١ - ١١ )

فإذا قسمنا فراغ كمية الحركة إلى خلايا شكل ( ١١ - ١١ ) طول الضلع فيها  $\frac{h}{L}$

يكون حجمها  $\frac{h^3}{L^3}$  أي  $\frac{h^3}{V}$  حيث  $V$  حجم الجسم .

تمثل كل خلية حالة من حالات الطاقة الإلكترونية energy state ، والتي يشغلها

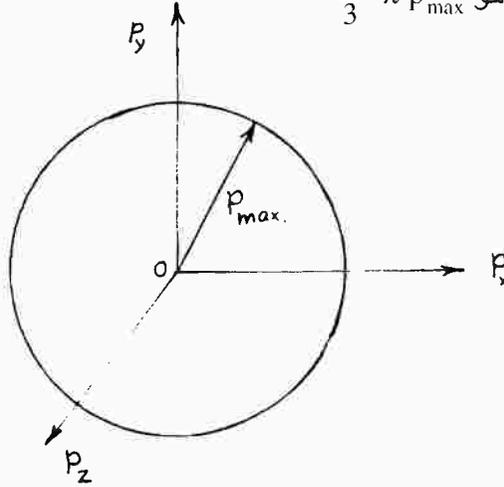
إلكترونان لفهما متعاكس تبعاً لمبدأ باولي .

إذا بردنا الفلز إلى درجة الصفر المطلق فإن الإلكترونات تتجمع حول مركز الإحداثيات في فراغ كمية الحركة .

« كلما اقتربت الخلية من مركز الإحداثيات كلما نقصت طاقة الإلكترونين بداخلها حيث إن بعد الخلية هو  $p$  كمية الحركة الكلية »

تمتلي الخاليا القريبة من المركز  $O$  ويتجمع الغاز الإلكتروني داخل كرة متمركزة مع  $O$  نصف قطرها هو  $p_{max}$  ، ويسمى سطح هذه الكرة بسطح فيرمي Fermi surface ، شكل ( ١١ - ١٢ ) .

حجم هذه الكرة هو  $\frac{4}{3} \pi p_{max}^3$



شكل ( ١١ - ١٢ )

نفرض وجود  $n$  إلكترونات في بلورة الفلز . يكون حجم فراغ كمية الحركة الذي يحتوى على جميع المستويات المشغولة عند درجة الصفر المطلق هو  $\frac{n}{2} \cdot \frac{h^3}{V}$  ، وهذا هو نفس حجم كرة فيرمي . أي أن :

$$\frac{4}{3} \pi p_{max}^3 = \frac{n}{2} \cdot \frac{h^3}{V}$$

لكن طاقة حركة الإلكترون عند مستوى فيرمي للطاقة هو :

$$E_{\max} = 1/2 m u_{\max}^2 = \frac{1}{2m} p_{\max}^2$$

حيث  $E_{\max}$  هو أكبر طاقة إلكترونية في الغاز وهي طاقة فيرمي  $E_F$ ، ومن المعادلات السابقة تعطى طاقة فيرمي بالمعادلة :

$$E_F = \frac{h^2}{2m} \left( \frac{3n}{8\pi V} \right)^{2/3}$$

$$= \frac{h^2}{2m} \left( \frac{3N}{8\pi} \right)^{2/3}$$

حيث  $N$  هو تركيز الإلكترونات أو كثافتها في الغاز ، وتساوي  $N = \frac{n}{V}$  عدد

الإلكترونات في وحدة الحجم من البلورة .

نستخلص مما سبق أن إلكترونات الفلز عند درجة الصفر المطلق تكون لها طاقات تتراوح بين الصفر وطاقة فيرمي  $E_F$  ، التي تعتمد على تركيز الإلكترونات وتصل قيمتها في الفلزات المعتادة إلى بضعة إلكترون فولط .

ويلاحظ أن هذه القيمة كبيرة جدا بالنسبة لطاقة التهيج الحراري  $k T$  thermal agitation ، والتي تبلغ حوالي  $0.03$  إلكترون فولط عند درجة حرارة الغرفة . وهذا يدل على أنه حتى عند درجات الحرارة المرتفعة المعتادة في المعمل فإن عدد قليل جدا من هذه الإلكترونات هي التي تثار إلى مستويات أعلى للطاقة .

مثلا : عند درجة  $3000^\circ \text{K}$  تكون تقريبا  $kT = 0.1 \text{ eV}$  وبالنسبة لفلز  $E_F = 5 \text{ eV}$

نجد أن مجموعة الإلكترونات تظل محالة حتى عند هذه الدرجة degenerate .

عند درجة حرارة فيرمي  $T_F$  حيث :

$$E_F = k T_F$$

يمكن للتهيج الحراري  $k T_F$  أن يصل إلى أصغر مستوى ممكن للطاقة ، ولذلك يمكن

لكل المجموعة من الإلكترونات أن تثار . وعندئذ نستطيع تطبيق إحصاء ماكسويل وبولتزمان ،

حيث إن المجموعة تصبح غير محللة non degenerate . تصل قيمة  $T_F$  الفلزات المعتادة إلى أكثر من  $20000 \text{ }^\circ\text{K}$  .

**طول موجة دي برولي المصاحبة للإلكترون عند مستوى فيرمي للطاقة :**

إذا كانت سرعة الإلكترون عند مستوى فيرمي هي  $u_F$  تكون طاقته :

$$E_F = 1/2 m u_F^2 = \frac{h^2}{2 m} \left( \frac{3 N}{8 \pi} \right)^{2/3}$$

منها :

$$\therefore U_F = \frac{h}{m} \left( \frac{3 N}{8 \pi} \right)^{1/3}$$

ويتطبيق قاعدة دي برولي يصاحب هذا الإلكترون طول موجة تعطى بالمعادلة :

$$\begin{aligned} \lambda_{\min} &= \frac{h}{p_{\max}} = \left( \frac{8 \pi}{3 N} \right)^{1/3} \\ &= \frac{h}{(2 m E_F)^{1/2}} \end{aligned}$$

وتصل قيمة  $\lambda_{\min}$  في الأحوال المعتادة إلى حوالي  $6 \text{ \AA}$  أنجستروم ، وهي أكبر من البعد البيني بين ذرات البلورات المعتادة .

**كثافة مستويات الطاقة** : Density of energy states

تعرف كثافة مستويات الطاقة  $N(E)$  بأنها عدد المستويات لكل وحدة طاقة في وحدة

الحجوم :

It is the number of energy states per unit energy range per unit volume

لإيجاد تغير الدالة  $N(E)$  مع الطاقة  $E$  نفرض أن العدد الكلي لحالات الطاقة هو

$Ns$  لوحدة الحجوم :

$$\therefore N_s = \int N(E) dE$$

ولكن من معادلة فيرمي :

عدد الإلكترونات  $N$  في وحدة الحجم هو :

$$N = \frac{\pi}{3} \left( \frac{8m}{h^2} \right)^{3/2} E^{3/2}$$

وبالتعويض

$$\therefore 2 \int N(E) dE = \frac{\pi}{3} \left( \frac{8m}{h^2} \right)^{3/2} E^{\frac{3}{2}} = N$$

وبالمفاضلة بالنسبة إلى  $E$

$$\therefore 2 N(E) = \frac{\pi}{2} \left( \frac{8m}{h^2} \right)^{3/2} \cdot E^{1/2}$$

$$\therefore 2 N(E) = 1/2 C \cdot E^{1/2}$$

حيث

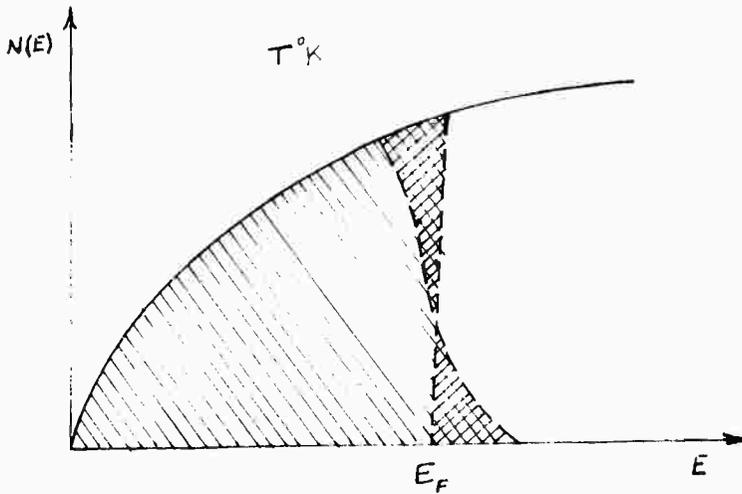
$$C = \frac{\pi}{2} \left( \frac{8m}{h^2} \right)^{3/2}$$

أى أن العلاقة بين  $E$  &  $N(E)$  علاقة قطع مكافئ ، كما في شكل ١١ - ٤ ، ويبين الجزء المظلل مستويات الطاقة المشغولة عند الصفر المطلق . ويبين الخط المتقطع المستويات المشغولة عند درجة  $T^\circ K$  .

الحرارة النوعية الإلكترونية للفلزات Electronic specific heat :

الحرارة النوعية الناشئة عن الغاز الإلكتروني تنشأ بسبب الزيادة في طاقة الإلكترونات

القريبة من سطح فيرمي ، والتي يمكن إثارتها لمستويات أعلى .



شكل ( ١١ - ١٣ )

عند درجة الحرارة  $T^{\circ}K$  تكون نسبة الإلكترونات المثارة إلى غير المثارة هي  $\frac{kT}{kT_F}$

شكل ( ١١ - ١٣ ) ، فإذا كان عدد الإلكترونات في وحدة الحجم هو :

يكون عدد الإلكترونات المثارة  $N \cdot \frac{T}{T_F}$  وذلك عند الدرجة  $T^{\circ}K$  ، وتكون بذلك طاقة

الإلكترونات المثارة هي :

$$N \cdot \frac{T}{T_F} \cdot kT$$

= الطاقة الممتصة من التهييج الحرارى .

ومن تعريف . الحرارة النوعية الإلكترونية ( تفاضل الطاقة بالنسبة لدرجة الحرارة )

$$C_V = \frac{d}{dT} \left[ \frac{Nk}{T_F} \cdot T^2 \right] \quad \text{نحصل على :}$$

$$= \frac{2NkT}{T_F} = \gamma T$$

∴ تتناسب الحرارة النوعية الإلكترونيه مع درجة الحرارة المطلقه . ولكن الحرارة

النوعية الكلية للفلز هي مجموع الحرارة النوعية الإلكترونية والحرارة النوعية الذرية ،

وسنثبت فيما بعد نظرية ديبيى للحرارة الذرية ، حيث  $C_V$  الذرية تتناسب مع  $T^3$

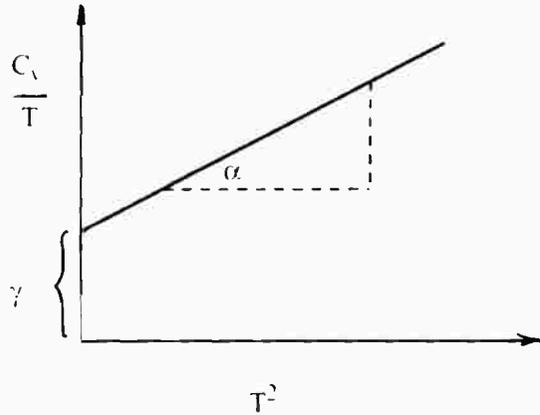
أى أن :

$$(C_v)_{total} = \alpha T^3 + \gamma T$$

وقيمة  $(C_v)_{tot}$  هي التي تقاس عادة في المعمل .

وبقياس الحرارة النوعية عند درجات الحرارة المختلفة ثم برسم العلاقة بين

$$T^2 \text{ \& } \frac{C_v}{T}$$



شكل ( ١١ - ١٤ )

ومن الرسم يمكن استنتاج قيمة ثابت التناسب  $\gamma$  ،

ومن المعادلة :

$$\gamma = \frac{2 N k}{T_F}$$

يمكن إيجاد درجة حرارة فيرمي  $T_F$  ، وكذلك طاقة فيرمي  $E_F = kT_F$  عمليا .

**إيجاد السرعة المتوسطة والطاقة المتوسطة للإلكترون عند درجة الصفر المطلقة**

نفرض منطقة صغيرة من الطاقة  $dE$  تقع بين  $E$  و  $E + dE$  عدد مستويات الطاقة

في هذه المنطقة  $N(E) dE =$

عدد الإلكترونات التي تشغلها :

$$2 \int f N(E) dE = \delta n(E)$$

وقد ضربنا في اثنين لأن كل مستوى يشغله إلكترونان . وكذلك في الدالة

occupation probability function  $f$  لنحصل على العدد الفعلي للإلكترونات الموجودة عند الدرجة  $T^\circ K$ .

$$f = \frac{1}{\left( e^{(E-E_F)/kT} + 1 \right)}$$

وتساوى الدالة  $f$  واحداً صحيحاً عندما تكون الدرجة  $T = 0^\circ K$ .

لأن جميع المستويات أقل من  $E_F$  تكون عندئذ مشغولة بالإلكترونين .

عدد الإلكترونات في المنطقة  $dE$  عند الدرجة  $T^\circ K$ .

$$\delta n(E) = \frac{2 \times \frac{1}{2} C E^{\frac{1}{2}} dE}{\left( e^{(E-E_F)/kT} + 1 \right)}$$

لكن :

$$E = \frac{1}{2} m u^2$$

$$\therefore dE = m u du$$

$$\therefore E^{1/2} dE = \left( \frac{m}{2} \right)^{1/2} m u^2 du$$

$$\therefore \delta n(u) = \frac{8 \pi m^3 u^2 du}{h^3 \left( e^{(E-E_F)/kT} + 1 \right)}$$

عند درجة الصفر المطلق  $f = 1$

ومن القوانين الإحصائية : السرعة المتوسطة للإلكترون :

$$\bar{u} = \int_0^{u_F} u \delta n / \int_0^{u_F} \delta n$$

لكن  $\int_0^{u_F} \delta n = N$  حيث  $N$  هو عدد مستويات الطاقة الكلية تحت  $E_F$ .

$$\begin{aligned} \therefore \bar{u} &= \frac{1}{N} \int_0^{u_F} \frac{8 \pi m^3}{h^3} u^3 du \\ &= \frac{8 \pi}{N} \frac{m^3}{h^3} \frac{u_F^4}{4} \end{aligned}$$

لكن:

$$u_F = \frac{h}{m} \left( \frac{3N}{8\pi} \right)^{1/3}$$

$$\therefore \bar{u} = 3/4 u_F$$

وإذا كانت  $\bar{E}$  هي الطاقة المتوسطة في الغاز الإلكتروني

$$\begin{aligned} \bar{E} &= \frac{\int_0^{u_F} 1/2 m u^2 \delta n}{\int_0^{u_F} \delta n} \\ &= \frac{1}{N} 1/2 m \int_0^{u_F} u^2 \delta n \\ &= \frac{m}{2N} \cdot \frac{8 \pi}{h^3} m^3 \int_0^{u_F} u^4 du \\ &= \frac{4 \pi m^4}{N h^3} \cdot \frac{u_F^5}{5} \end{aligned}$$

وباستخدام معادلتى  $u_F$  &  $E_F$  نحصل على:

$$\bar{E} = 3/5 E_F$$

**مسألة (١)** أوجد ضغط الغاز الإلكتروني عند الصفر المطلق، علماً بأن

$$E_F = 5 \text{ eV} \text{ وكثافته الإلكترونية } 10^{22} \text{ لكل سم}^3.$$

الحل :

$$\begin{aligned}\therefore p &= 1/3 N m u^2 \\ &= 2/3 N (1/2 m u^2) \\ &= 2/3 N 3/5 E_F\end{aligned}$$

وقد عوضنا هنا بدلا من  $1/2 m u^2$  وهى الطاقة المتوسطة للإلكترون فى الغاز  
الإلكترونى بالقيمة  $3/5 E_F$

$$E_F = 5 \times 10^{-12} \text{ ergs}$$

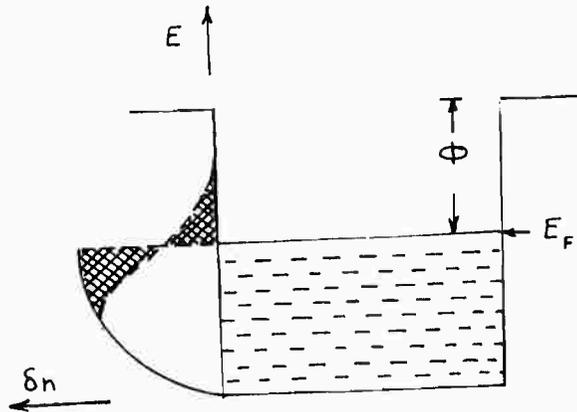
$$\therefore p = 2/3 \times 10^{22} \times 3/5 \times 5 \times 1.6 \times 10^{-12}$$

$$\therefore p = 3.2 \times 10^{10} \text{ dynes / cm}^2$$

Thermionic emission : **الانبعاث الترميوني**

الانبعاث الترميوني هو هروب الإلكترونات من السطوح الساخنة للفلزات والمعادن  
وأشباه الموصلات ، وهو المصدر الرئيسى للإلكترونات فى الصناعة ( الصمامات وأنابيب  
الفلورسنت ، إلخ ) .

يوجد عند سطح أى جسم صلب حاجز طاقة  $\phi$  energy barrier يقدر بعدة إلكترون  
فولط يمنع هروب الإلكترونات من الجسم انظر شكل ( ١١ - ١٥ ) . عند رفع درجة الحرارة  
تكتسب بعض الإلكترونات من الطاقة ما يسمح لها بأن تغادر الجسم وتصبح حرة .



( شكل ١١ - ١٥ )

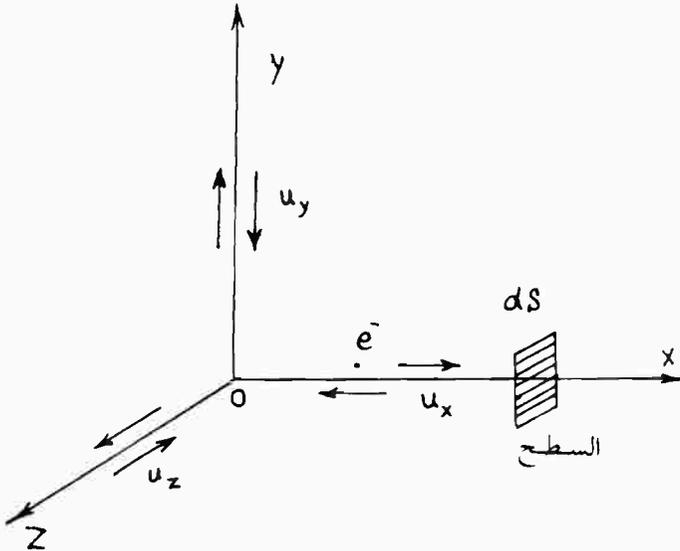
يطلق على القانون الذي يربط عدد الإلكترونات المنبعثة حراريا ( التيار الترميوني )  
 ودرجة الحرارة بقانون رتشاردسون ودشمان .

### قانون رتشاردسون ودشمان : Richardson - Dushman law

عندما يسخن جسم صلب طاقة فيرمي له  $E_F$  ودالة الشغل  $\Phi$  work function  
 تتحرر فقط الإلكترونات التي تكون طاقتها أكبر من  $E > E_F + \Phi$  وتعريف دالة الشغل هي  
 الطاقة التي يجب إعطاؤها للإلكترون الذي يشغل مستوى فيرمي للطاقة لكي يغادر نهائيا  
 الجسم . هذا الشرط ضروري ولكنه غير كاف ، إذ أن الإلكترون قد يكون له الطاقة المطلوبة ،  
 ولكنه يتحرك في غير اتجاه السطح أى لداخل الجسم .

اعتبر محاور إحداثيات  $x, y, z$  داخل الجسم . واعتبر جزءا من السطح الذي ينبعث

منه الإلكترونات عموديا على محور  $x$  ، شكل ( ١١ - ١٦ )



( شكل ١١ - ١٦ )

معدل انبعاث الإلكترونات التي لها كمية حركة في المنطقة بين  $p$  ,  $p + dp$  من وحدة

المساحات من السطح الساخن هو :

$$u_x = n(p) dp$$

ولكن :

$$E = \frac{p^2}{2m}$$

$$p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$$

$$\therefore \frac{\delta E}{\delta p_x} = u_x$$

معدل الانبعاث من وحدة المساحات :

$$\frac{\delta E}{\delta p_x} \cdot n(p) \cdot dp = n(p) dE dp_y dp_z$$

$$dp = dp_x dp_y dp_z \quad \text{وقد عوضنا عن}$$

سبق أن ذكرنا أن مستوى الطاقة يمثل الحجم  $\frac{h^3}{V}$  في فراغ كمية الحركة ، ويشغله

إلكترونان فقط . باعتبار وحدة الحجم من الجسم يكون عدد الإلكترونات لوحدة الحجم في فراغ كمية الحركة هي :

$$N(p) = \frac{2}{h^3}$$

وذلك بفرض أن جميع مستويات الطاقة مشغولة ، أى عند الصفر المطلق ، وعموما عند

أى درجة حرارة  $T^\circ K$  يصبح هذا العدد :

$$n(p) = \frac{2}{h^3} \cdot f$$

حيث  $f$  هي دالة التوزيع لفيرمي وديراك وتساوى :

$$f = \frac{1}{\left( e^{(E-E_F)/kT} + 1 \right)}$$

وتكون بذلك الكثافة التيارية المنبعثة  $z$  . وهي حاصل ضرب الشحنة الإلكترونية  $e$  في

معدل الانبعاث للإلكترونات ذات الطاقة  $E_x > E_F + \phi$  والتي تصدم وحدة مساحات السطح

في اتجاه  $x$  هي :

$$j = e \frac{2}{h^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{E_1 + \phi}^{\infty} \frac{dp_y dp_z dE}{(e^{(E-E_1)/kT} + 1)}$$

ولإيجاد قيمة هذا التكامل نضع :

$$\theta = \frac{E - E_F}{kT}$$

$$\therefore d\theta = \frac{dE}{kT}$$

ونضع أيضا :

$$\begin{aligned} E &= E_x + E_y + E_z \\ &= E_x + \frac{1}{2m} (p_y^2 + p_z^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \theta &= \frac{1}{kT} \left[ (E_x - E_F) + \frac{p_y^2 + p_z^2}{2m} \right] = \\ &= \frac{1}{kT} \left[ \theta + \frac{p_y^2 + p_z^2}{2m} \right] \end{aligned}$$

وبالتعويض في معادلة زيمعرفة أن :

$$\int \frac{d\theta}{e^\theta + 1} = \log (1 + e^{-\theta})$$

نحصل على :

$$j = \frac{2kTe}{h^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \log (1 + e^{-\theta}) dp_y dp_z$$

في الظروف التجريبية المعتادة تكون  $\theta \gg 1$  ، ولذلك بفك اللوغاريتم والاكتفاء بالحد

الأول فقط  $e^{-\theta}$  نحصل على :

$$j = \frac{2kTe}{h^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\theta} dp_y dp_z$$

وبالتعويض  $\theta$  ما يساويها

$$\therefore j = \frac{2 k T e}{h^3} \cdot e^{-\phi/kT} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(p^2y+p^2z)/2 mkT} dp_y dp_z$$

ويعرف أن :

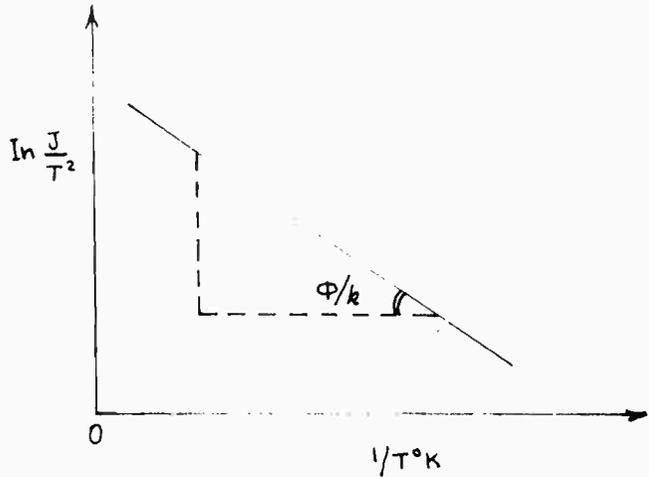
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

نحصل على :

$$j = \frac{2 k T e}{h^3} \cdot e^{-\phi/kT} \cdot 2 m k T \cdot \pi$$

$$= \frac{4 \pi m e k^2}{h^3} \cdot T^2 \cdot e^{-\phi/kT}$$

$$\therefore j = A \cdot T^2 \cdot e^{-\phi/kT}$$



شكل ( ١١ - ١٧ )

وتعرف هذه المعادلة بقانون ريتشاردسون دوشمان

ويرسم العلاقة بين  $\log_e \frac{j}{T^2}$  و  $\frac{1}{T}$  نحصل على علاقة خطية شكل ( ١١ - ١٧ )

يعطى ميل الخط مباشرة النسبة  $\phi / k$  .

وتعتبر هذه هي الطريقة العملية لإيجاد قيمة دالة الشغل  $\Phi$  للانبعاث الترميوني ، حيث من السهل قياس شدة التيار الترميوني  $z$  . باستخدام صمام ثنائي بسيط يمكن تسخين فتيلة لدرجات حرارة مختلفة ، يسهل قياسها بواسطة بيرومتر ضوئي وقياس شدة التيار في كل حالة ثم من الرسم البياني نوجد قيمة  $\Phi$  :

$$\text{ويلاحظ أن الثابت } A = \frac{4 \pi m e k^2}{h^3} \text{ له قيمة تبلغ } 120 \text{ أمبير / سم}^2 \text{ - درجة}$$

كما إن دالة الشغل للمواد المختلفة تتراوح بين واحد وخمسة إلكترون فولط .

## مسائل وتمارين الباب الحادى عشر

١ - باستخدام الإحصاء الكمى لفيرمى وديراك ، أوجد أكبر احتمال ديناميكى حرارى للحالات الماكرونية المختلفة فى مجموعة من ٤ نقط طور داخل خليتين بكل منهما ٤ حجات .

الحل :

$$W_i = \frac{n!}{N_i! (n - N_i)!}$$

الحالات الماكرونية هى :

- (a)  $N_i = 4 \quad N_j = 0$
- (b)  $N_i = 2 \quad N_j = 2$
- (c)  $N_i = 1 \quad N_j = 3$
- (d)  $N_i = 0 \quad N_j = 4$

أولا : الاحتمال الديناميكى الحرارى : الحالة الأولى :

$$(a) \quad W(i) = \frac{4!}{0!4!} = 1$$

$$W(j) = 1 \quad W(a) = 1$$

$$(b) \quad W(i) = \frac{4!}{2!2!} = 6$$

$$W(j) = \frac{4!}{2!2!} = 6$$

$$W(b) = 36$$

$$(c) \quad W_i = \frac{4!}{1!3!} = 4$$

$$W_j = \frac{4!}{3!1!} = 4$$

$$W(c) = 16$$

$$(d) \quad W_i = \frac{4!}{0!4!} = 1$$

$$W_j = 1$$

$$W(d) = 1$$

أى أنه يحدث أكبر احتمال عندما يكون التوزيع متساويا في الخليتين .

٢ - عرف فراغ الطور لغاز والاحتمال الديناميكي الحرارى له . إذا علم أن فراغ الطور مقسم إلى خليتين وأن به أربع نقط فقط . أوجد عدد الحالات الماكروية والاحتمال الديناميكي الحرارى لكل حالة .

**الحل :**

الحالات الماكروية خمس هي :

$$\begin{array}{cccccc} N_i & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ N_j & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}$$

الاحتمال الديناميكي الحرارى هو :

$$W = \frac{N!}{\prod N_i}$$

وتكون قيمته للحالات الماكروية الخمس هي على الترتيب :

$$\begin{array}{l} W(4,0) = 1 \\ W(3,1) = 4 \\ W(2,2) = 6 \\ W(1,3) = 4 \\ W(0,4) = 1 \end{array}$$

٣ - مجموعة من  $N$  جسيم ممثله في فراغ طور مقسم إلى  $m$  خلية فإذا كانت طاقة الجسيم  $W$  واحدة لجميع الخلايا كما أن  $N \gg m$  ، فأوجد عدد النقط في كل خلية وكذلك الطاقة الداخلية والانتروبيا للمجموعة .

**الحل :** عدد النقط في كل خلية :

$$N_i = \frac{N}{m}$$

الطاقة الداخلية الكلية = عدد الجسيمات × طاقة الجسيم =  $N\omega$

الإنتروبيا

$$\begin{aligned} S &= k \ln W \\ &= k \left[ N \ln N - \sum N_i \ln N_i \right] \\ &= k \left[ N \ln N - \sum_m \frac{N}{m} \ln \frac{N}{m} \right] \\ &= k \left[ N \ln N - m \frac{N}{m} \ln \frac{N}{m} \right] \\ &= k N \ln m \end{aligned}$$

٤ - أوجد الاحتمال الديناميكي الحرارى لكل من

(أ) التوزيع الأكثر احتمالا

(ب) التوزيع الأقل احتمالا

لمجموعة مكونة من  $10^6$  جزيئات فى فراغ طور مقسم إلى  $10 \times 10^6$  خلية ، علما بأن طاقة الجزيء  $\omega_1$  واحدة لجميع الخلايا .

٥ - إذا فرضنا أن فراغ الطور مقسم إلى ثلاث خلايا ، وأن عدد النقط الكلى هو ٣٠

مقسمة بالتساوى فى هذه الخلايا ، وأن طاقة الجسيم فى الخلية الأولى ٢ جول وفى الثانية

٤ جول وفى الثالثة ٦ جول . احسب التغير فى عدد الجسيمات فى الخليتين الأولى والثانية ،

علما بأن هذا التغير فى الثالثة يساوى -٢ عند الاستقرار الحرارى .

الحل :

$$\delta N_1 + \delta N_2 + \delta N_3 = 0$$

$$\delta N_3 = -2$$

أيضا بما أن الحالة مستقرة

$$\sum \ln N_i \delta N_i = 0$$

$$\sum w_i \delta N_i = 0$$

$$2 \delta N_1 + 4 \delta N_2 + 6 \delta N_3 = 0$$

$$\delta N_1 + \delta N_2 = 2$$

بحل المعادلتين :

$$\delta N_1 = -2$$

$$\delta N_2 = 4$$

٦- فى تجربة شتيزن وجيرلاخ تترتب العزوم المغناطيسيه للذرات ، إما موازيه أو عكس موازية لاتجاه المجال . أوجد باستخدام الميكانيكا الإحصائية العزم المغناطيسى الكلى فى اتجاه المجال .

**الحل :** نفرض أن B هو العزم المغناطيسى للذرة فى اتجاه المجال و-B فى عكس اتجاه المجال .

بما أنه لا يوجد سوى مستويين للطاقة  
إذن دالة التقسيم

$$Z = e^{-\omega_1/kT} + e^{+\omega_2/kT}$$

حيث الطاقة :

فى اتجاه المجال

$$\omega_1 = -BH$$

فى عكس اتجاه المجال

$$\omega_2 = +BH$$

$$\begin{aligned} Z &= e^{-x} + e^{+x} \\ &= 2 \cosh x \end{aligned}$$

حيث :

$$x = \frac{BH}{kT}$$

عدد الذرات فى وحدة الحجم فى مستويى الطاقة هما :

$$n_1 = \frac{n}{2} \frac{e^x}{\cosh x}$$

$$n_2 = \frac{n}{2} \frac{e^{-x}}{\cosh x}$$

العزم المغناطيسى الكلى فى اتجاه المجال :

$$\begin{aligned} M &= B (n_1 - n_2) \\ &= n B \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = n B \tanh x \end{aligned}$$

وإذا كانت  $x$  كبيرة نحصل على العزم :

$$M = n B$$

وإذا كانت  $x$  صغيرة يكون العزم .

$$M = \frac{n B^2 H}{k T}$$

وتكون القابلية المغناطيسية

$$X = \frac{n B^2}{k T}$$

٧ - أوجد قيمة طاقة فيرمى للتنجستن بفرض وجود إلكترونين حريين لكل ذرة . ثم أثبت أنه عند رفع درجة الحرارة إلى  $3000^\circ$  كلفن تختلف قيمة الطاقة بأقل من  $0.1\%$  .

٨ - احسب الحرارة النوعية الإلكترونية فى التنجستن بدلالة ثابت الغاز ( اعتبر طاقة فيرمى له  $9$  إلكترون فولط ) .

٩ - أوجد عدد الإلكترونات التى تعبر وحدة المساحات فى وحدة الزمن داخل فلز فى درجة الصفر المطلق فى اتجاه ما .

ثم أوجد الكثافة التيارية المناظرة لهذه الحركة بالأمبير / سم<sup>2</sup> .

١٠ - أوجد الحركة الإزاحية drift mobility للإلكترونات ( بالسم<sup>2</sup> / فولط ثانية) في النحاس عند الصفر المطلق .

١١ - عدد الذرات في وحدة الحجم ( سم<sup>3</sup> ) للصوديوم هي  $2.5 \times 10^{23}$  ومعامل التوصيل له عند الصفر المطلق ،  $2.3 \times 10^6$  أوم<sup>-1</sup> سم<sup>-1</sup> .  
أوجد متوسط الزمن الحر وحركية الإلكترون في الصوديوم عند الصفر المطلق .

١٢ - باستخدام إحصاء فيرمي أوجد طاقة فيرمي عند الصفر المطلق للإلكترونات في الصوديوم . ثم أوجد قيمة ضغط الغاز الإلكتروني عند هذه الدرجة .

١٣ - احسب الحرارة الذرية للألومنيوم والنحاس عند درجة ١ كلفن وقارن ذلك بالحرارة الإلكترونية .

$$E_F = 7.1 \text{ eV للنحاس}$$

$$E_F = 11.7 \text{ eV للألومنيوم}$$

$$\theta = 398 \text{ درجة حرارة ديباي للألومنيوم}$$

$$\theta = 315 \text{ درجة حرارة ديباي للنحاس}$$

١٤ - احسب ضغط الغاز الإلكتروني عند الصفر المطلق لمادة طاقة ، فيرمي لها خمسة

إلكترون فولط .

الحل :

$$p = 1/3 N m v^2$$

$$= 2/3 \text{ (average energy)}$$

$$= 2/3 (3/5 E_F)$$

ومنها

$$p = 3.2 \times 10^{10} \text{ dynes / cm}^2$$

١٥ - الوزن الذري للصوديوم ٢٣ وكثافته ١ جم / سم<sup>٣</sup> احسب عدد الإلكترونات

الحرية لكل سم<sup>٣</sup> في الصوديوم ثم أوجد طاقة فيرمي . ما هو طول المسار الحر للإلكترونات في الصوديوم ؟

( عدد أفوجادرو =  $6 \times 10^{23}$  لكل جرام ذرة )

الحل :

عدد الذرات لكل سم<sup>٣</sup> = عدد الإلكترونات الحرة

$$N = \frac{6 \times 10^{23}}{23}$$

$$E_F = \frac{h^2}{2m} \left( \frac{3N}{8\pi} \right)^{2/3}$$

$$= 3 \text{ eV.}$$

١٦ - احسب حرارة فيرمي لشبه موصل ، علما بأن كثافة ناقلات الشحنة  $10^{16}$  لكل

سم<sup>٣</sup> .

الحل :

$$E_F = 5 \times 10^{16} \text{ ergs}$$

$$= k T_F$$

$$\therefore T_F = 4 \text{ K.}$$

١٧ - أوجد طول الموجة المصاحبة للإلكترون حر في شبه موصل عند درجة  $27^\circ\text{C}$  .

١٨ - أثبت أن طاقة فيرمي  $(E_F)_T$  عند درجة الحرارة  $T$  تتغير مع طاقة فيرمي عند الصفر المطلق  $(E_F)_0$  وفقاً للمعادلة :

$$E_F(T) = E_F(0) (1 - 2 \alpha T)$$

حيث  $\alpha$  معامل التمدد الطولي للمادة .

١٩ - أوجد تغير طاقة فيرمي للصوديوم بين الصفر المطلق ودرجة الغرفة  $27^\circ\text{C}$  علماً بأن  $E_F(0) = 2.5 \text{ eV}$  &  $\alpha = 71 \times 10^{-6} / ^\circ\text{K}$  .

٢٠ - أوجد حركية الإلكترونات في الصوديوم والألومنيوم ، علماً بأن موصليتيهما على الترتيب هي  $\sigma(N_a) = 22 \times 10^6 \text{ ohm}^{-1} / \text{m}^{-1}$  ،  $\sigma(A\ell) = 35 \times 10^6 \text{ ohm}^{-1} / \text{m}^{-1}$  ، وطاقة فيرمي لهما  $E_F(N_a) = 3.2 \text{ eV}$  ،  $E_F(A\ell) = 11.7 \text{ eV}$  ، بماذا تفسر الفرق في الحركية في كل منهما ؟

٢١ - أثبت أن معامل الانضغاط  $K_e$  للغاز الإلكتروني تعطى بالمعادلة :

$$K_e = \frac{3}{2} \frac{V}{NE_F}$$

حيث  $V$  هو الحجم الذي يشغله عدد  $N$  إلكترونات ،  $E_F$  طاقة فيرمي .

٢٢ - يتجمد فلز على شكل طبقات أحادية كثيفة . فإذا علم أن لهذا الفلز إلكترونات واحداً في مستوى الطاقة الأول  $S$  - state ، أثبت :

$$١ - \text{ أن } E_F = \frac{h^2 N}{4 \pi m} \text{ ، حيث } N \text{ عدد الذرات للمتر المربع .}$$

٢ - أوجد كثافة مستويات الطاقة  $N(E)$  بدلالة الطاقة  $E$  .

٢ - عين شكل منطقة بريوليون الأولى ، وأوجد عدد الإلكترونات التي تملؤها .

٢٣ - باستخدام دالة فيرمي للتوزيع الإلكتروني أوجد درجة الحرارة التي يكون عندها

احتمال وجود إلكترون بطاقة أعلى من طاقة فيرمي بمقدار  $0.5 \text{ eV}$  هو  $1\%$  ، علماً بأن  $E_F = 5.0 \text{ eV}$  .

٢٤ - أوجد التيار الترميوني لفتيل من التنجستن طوله  $0.05 \text{ m}$  وقطره  $10^{-4} \text{ m}$

وبدرجة حرارته  $2000 \text{ K}$  عندما لا يؤثر عليه أي مجال خارجي .

وإذا أثرتنا بمجال كهربائي شدته  $5 \times 10^5 \text{ V/m}$  عند سطح الفتيل ، فأوجد مقدار

النقص في دالة الشغل الترميوني .

٢٥ - المقاومة النوعية للفضة عند درجة الغرفة هي  $1.6 \times 10^{-8} \text{ ohm.m}$  . والعدد

الفعال من إلكترونات التوصيل هو  $0.9$  لكل ذرة وطاقة فيرمي  $E_F = 5.5 \text{ eV}$  . أوجد

متوسط طول المسار الحر للإلكترونات وسرعتها الإزاحية في مجال  $100 \text{ V/m}$  . ثم أوجد

معامل التوصيل الحراري للفضة . (كثافة الفضة  $1.055 \times 10^4 \text{ Kg/m}^3$ ) .