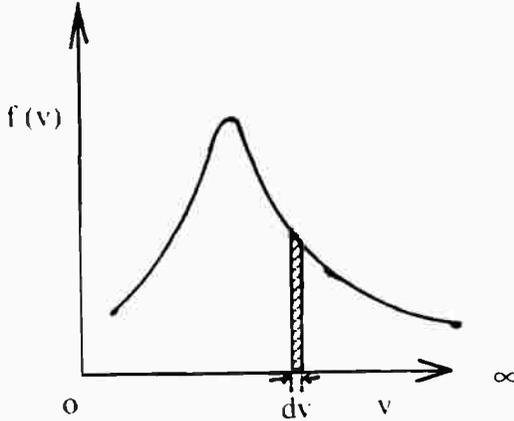


## الباب الثاني إحصاء ماكسويل - بولتزمان

### ٢ - ١ دالة التوزيع لماكسويل Maxwell's distribution function



شكل (٢-١)

اعتبر غازاً في حالة اتزان ديناميكي حراري ، أي أن درجة حرارته ثابتة . تتفاوت قيم سرعات الجزيئات بين صفر وما لانهاية ، ولكن معظمها يكون له سرعة متوسطة تعبر عن حالة الغاز .

قد تتغير سرعة أي جزيء نتيجة لتصادمه مع غيره أو مع الجدران ، ولكن يبقى ثابتا عدد الجزيئات التي لها سرعات في الحدود بين  $v$  و  $v + dv$  ، ويظل هذا العدد لا يتغير مع الزمن ، انظر شكل (٢-١)

نفرض أن  $Nv$  هو عدد جزيئات الغاز الذي يكون لها سرعات قدرها  $v$  .  
الدالة التي تربط عدد الجزيئات  $Nv$  بالسرعات  $v$  للغاز تسمى دالة توزيع السرعات لماكسويل  $f(v)$  .

ولإيجاد هذه الدالة رياضيا سنستعين بـ :

## ٢ - ٢ قانون ضغط الهواء الجوي مع الارتفاع عن سطح الأرض :

اعتبر اسطوانة رأسية من الهواء الجوي على شكل

عمود مساحة مقطعه  $1 \text{ سم}^2$  ، شكل (٢ - ٢) .

تقع جزيئات الهواء في هذا العمود تحت تأثير الجاذبية الأرضية . نفرض أن الهواء في حالة اتزان حراري ، وأن

درجة حرارته ثابتة في كل أجزائه .

نعتبر نقطة على سطح الأرض أسفل العمود مركزا

للإحداثيات ، ونعتبر شريحة أفقية من الهواء محصورة

بين  $x$  ،  $x + dx$  ، إن ضغط الغاز على سطحها هو

$P$  ،  $P - dP$  على الترتيب . ويلاحظ هنا أنه كلما ارتفعنا

أى زادت  $x$  كلما نقص ضغط الهواء .

وزن الغاز في الشريحة  $= \rho g dx$

حيث  $\rho$  هي كثافة الغاز عند الارتفاع  $x$

،  $g$  هي عجلة الجاذبية الأرضية .

يتزن وزن الشريحة مع الفرق في الضغط على السطحين :

$$\therefore (P - dP) - P = \rho \delta d x$$

ولكن من قانون الغازات :

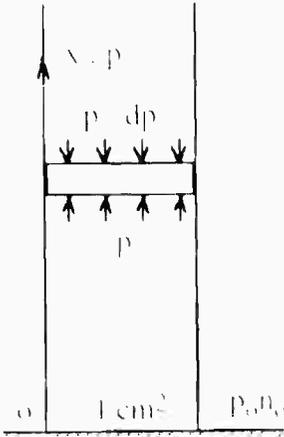
$$PV = RT = NkT$$

$$P = \frac{N}{V} kT = nkT$$

$$\therefore dP = kT dn$$

وأیضا

$$\rho = n \cdot m$$



شكل ٢ - ٢

من المعادلات السابقة :

$$-dP = \rho \cdot g \cdot dx$$

$$-k \, dn = n \, m \, g \, dx$$

$$\int_{n_0}^n \frac{dn}{n} = - \frac{mg}{kT} \int_0^x dx$$

وبالتكامل :

$$\therefore n = n_0 \exp - \frac{mgx}{kT}$$

ومنها :

$$P = P_0 \exp - \frac{mgx}{kT}$$

يعرف هذا بقانون تغير الضغط بالارتفاع داخل عمود غاز ثابت الدرجة .

اعتبر الآن جزيئ سرعته  $v_0$  عند سطح الأرض

$x = 0$  ويتحرك إلى أعلى ضد الجاذبية الأرضية . يصل

هذا الجزيئ إلى ارتفاع  $x = v_0^2 / 2g$  عندما تتحول

جميع طاقة الحركة للجزيئ  $\frac{1}{2} m v_0^2$  إلى طاقة

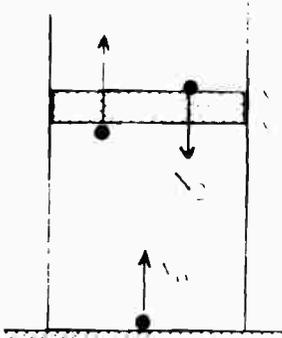
موضع  $mgx$

تتفاوت سرعات الجزيئات الصاعدة من السطح بين

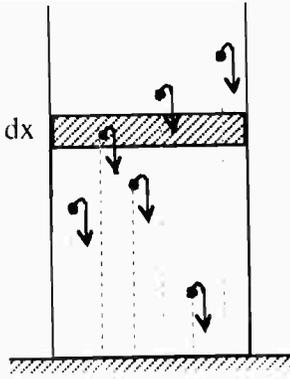
صفر وما لا نهاية حيث إن ارتفاع عمود الهواء لا يحده

حدا أعلى، نفرض أن عدد الجزيئات لوحدة الحجم

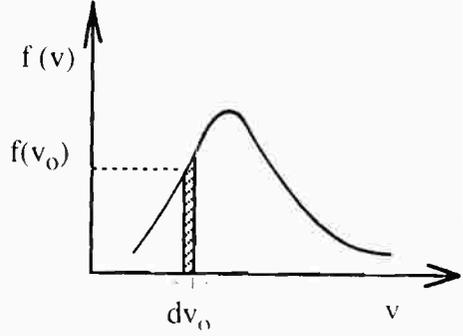
التي لها سرعات تقع بين  $v_0 + dv_0$  .  $v_0$  عند سطح الأرض هي :  $n_0 f(v_0) dv_0$



شكل (٢١) (٣)



شكل (٢ - ٥)



شكل (٢ - ٤)

عدد الجزيئات المتجهة إلى أعلى شكل (٢ - ٥) والتي تستطيع بسرعتها أن تصل إلى الشريحة dx لتعبرها في الثانية هي :

$$N_1 = \int_{v_0 = \sqrt{2gx}}^{\infty} n_0 v_0 f(v_0) dv_0$$

الحد الأدنى للتكامل  $\sqrt{2gx}$  يمثل الجزيئات التي تكاد تكفي سرعاتها للوصول للشريحة على ارتفاع x . جميع الجزيئات التي لها سرعات أقل من ذلك ترتد إلى أسفل بفعل الجاذبية الأرضية ولا تصل إلى الارتفاع x .  
عدد الجزيئات المتجهة إلى أسفل والتي تعبر الشريحة dx في نفس الزمن هي

$$N_2 = \int_0^{\infty} n v f(v) dv$$

وبما أن الغاز داخل العمود في حالة اتزان ديناميكي حراري فإن عدد الجزيئات الصاعدة ، والتي تعبر dx يجب أن تساوي عدد الجزيئات الهابطة أي أن  $N_1 = N_2$  وبالتعويض بدلا من n في قانون تغير الضغوط بالارتفاع

$$n = n_0 \exp - (mgx / kT)$$

نحصل على :

$$\int_{\sqrt{2gx}}^{\infty} v_0 f(v_0) dv_0 = \exp - \frac{mgx}{kT} \int_0^{\infty} v f(v) dv \quad (1)$$

لنجعل الآن المتغير واحدا في هذه المعادلة باستخدام معادلة الحركة :

$$v_0^2 = v^2 + 2 g x$$

$$v_0 d v_0 = v d v \quad \text{وبالتفاضل :}$$

وبالتعويض في المعادلة (1) مع حذف  $v_0$  نحصل على :

$$\int_0^{\infty} f ( v^2 + 2 g x )^{1/2} v d v = \exp - \left( \frac{mgx}{kT} \right) \int_0^{\infty} f (v) v d v \quad \dots (2)$$

وبالتفاضل لطرفي المعادلة بالنسبة إلى  $v$  :

$$f (v^2 + 2gx)^{1/2} = \exp - \left( \frac{mg}{kT} \right) f (v) \quad \dots (3)$$

هذه معادلة بوالية functional equation وتحقق فقط إذا كانت الدالة  $f (v)$  على

الصورة :

$$f (v) = A \exp - m v^2 / 2 kT$$

$$f (v) = A \exp - E / kT \quad \dots (4)$$

حيث  $E$  يمثل متوسط طاقة الحركة  $1/2 m v^2$  للجزيء وتساوى

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m v_x^2 + \frac{1}{2} m v_y^2 + \frac{1}{2} m v_z^2$$

$A$  مقدار ثابت يمكن تحديد قيمته على أساس أن العدد الكلي للجزيئات في وحدة الحجم

$n$  يساوى العدد الكلي للنقط في فراغ السرعات velocity space وهذا يعطى بالتكامل :

$$n = \int_0^{\infty} n (v) d v$$

وقد وجد أن قيمة الثابت  $A$  هي :

$$A = n \left( \frac{m}{2 \pi k T} \right)^{3/2}$$

تعرف المعادلة (٤) بدالة التوزيع لوحدة الحجم لماكسويل ، وتعطى عدد جزيئات الغاز

التي لها سرعة  $v$  في وحدة الحجم .

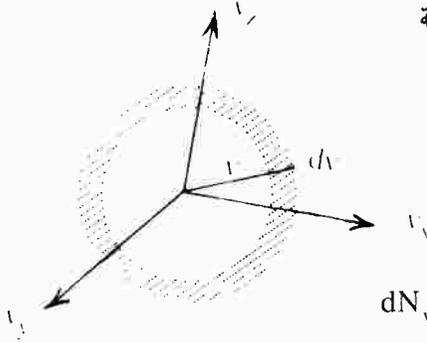
لإيجاد عدد الجزيئات التي لها سرعات تقع بين  $v$  و  $v + dv$  نعتبر قشرة كرية

نصف قطرها  $v$  في فراغ السرعات ، ويكون سمكها

$dv$  تحتوي علي الجزيئات المطلوبة شكل (٢-٦) .

حجم القشرة =  $4 \pi v^2 dv$  . باستخدام دالة

التوزيع يكون العدد هو :



$$dN_v = 4 \pi v^2 dv A \exp \frac{-mv^2}{2kT}$$

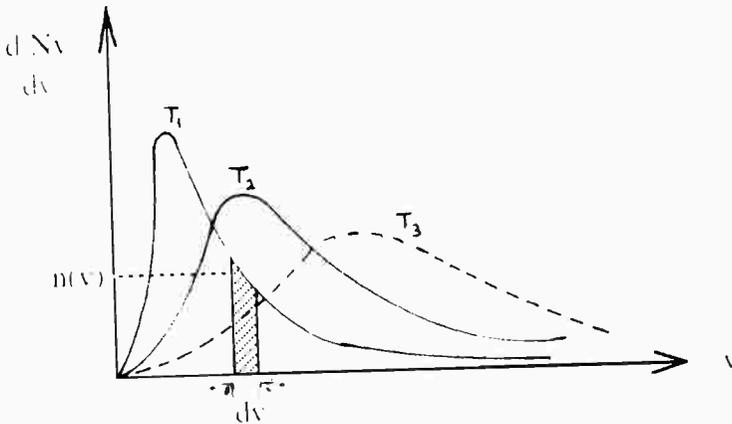
$$dN_v = \frac{4n}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{m}{2kT} \right)^{3/2} v^2 \exp - \frac{mv^2}{2kT} dv$$

$$\text{شكل (٢-٦)} \quad \frac{dN_v}{dv} = n(v) = \frac{4n}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{m}{2kT} \right)^{3/2} v^2 \exp - \frac{mv^2}{2kT} \dots (5)$$

يتوقف عدد الجزيئات التي لها هذه السرعة  $v$  على درجة الحرارة . ويبين العلاقة بين

$dN_v / dv$  مع السرعة عند درجات حرارة مختلفة ، ومن المحتمل أن تكون المساحات تحت

هذه المنحنيات واحدة ، حيث إنها تمثل العدد الكلي لجزيئات الغاز .



شكل (٢-٧)

**مسألة :** أوجد السرعة المتوسطة وجذر متوسط مربع السرعات . r. m . s . وكذلك

السرعة الأكثر احتمالا لجزيئات غاز .

**أولا :** نحصل علي السرعة المتوسطة  $\bar{v}$  بضرب عدد الجزيئات لكل سرعة في هذه

السرعة ، ثم نجرى التكامل على جميع الجزيئات ونقسم على العدد الكلي للجزيئات .

$$\bar{v} = \frac{\int v d N_v}{N}$$

وباستعمال المعادلة (٥)

$$\bar{v} = \frac{1}{n} \frac{4n}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{m}{2kT} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} v^3 e^{-m v^2 / 2kT}$$

وبوضع

$$\lambda = \frac{m}{2kT}$$

$$\bar{v} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \lambda^{3/2} \int_0^{\infty} v^3 e^{-\lambda v^2} dv$$

وهذا التكامل معروف القيمة من جداول التكاملات القياسية :

$$\int_0^{\infty} v^3 e^{-\lambda v^2} dv = \frac{1}{2\lambda^2}$$

$$\bar{v} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \lambda^{3/2} \frac{1}{2\lambda^2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$$

$$\bar{v} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

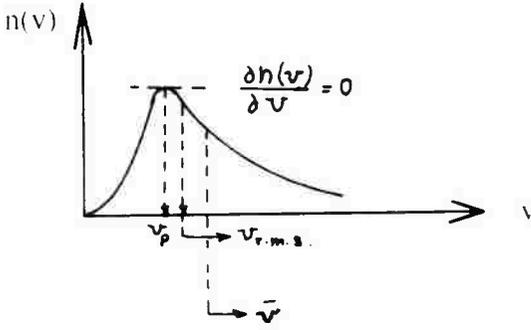
r . m . s

**ثانيا :**

$$\frac{1}{2} m \bar{v}^2 = \frac{3}{2} kT$$

مما سبق :

$$r.m.s v = \sqrt{v^2} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$



شكل (٨-٢)

ثالثا : السرعة الأكثر احتمالا :

هي السرعة عند قمة منحنى

التوزيع :

حيث  $\frac{\partial nv}{\partial v} = 0$  وهذا الشرط يعطى

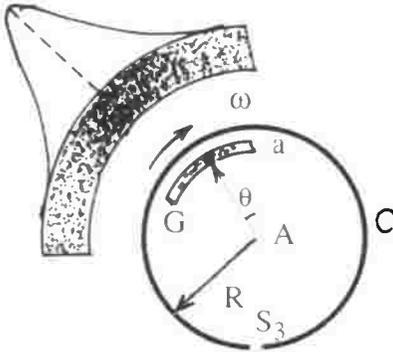
$$v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

الحل : بمفاضلة المعادلة (٥) بالنسبة إلى  $v$  ثم مساواة الناتج بصفر

تساوى  $1.086 = \sqrt{\frac{3\pi}{8}}$  مرة السرعة

يتضح أن  $v$  r. m. s.

المتوسطة  $\bar{v}$ .



$$\frac{S_2}{S_1}$$

فرن 0

شكل (٩-٢)

تحقيق قانون ماكسويل عمليا :

يتركب الجهاز شكل (٢-٩) من فرن 0

تخرج منه الجزيئات على شكل شعاع يحدده فتحتين

مستطيلتين في حائلين  $S_1$  &  $S_2$

C اسطوانة بها فتحة مستطيلة  $S_3$  توازي

محورها ويمكن إدارة هذه الاسطوانة حول المحور A

بسرعة حوالى ٦٠٠٠ دوره فى الدقيقة .

عندما تكون الاسطوانة فى حالة سكون فإن

شعاع الجزيئات يدخل الاسطوانة من خلال الفتحة

$S_3$  ويسقط على لوح منحنى من الزجاج G .

يمكننا تعيين عدد الجزيئات التي تسقط على هذا اللوح الزجاجي في أى جزء من أجزائه وذلك بقياس مقدار الاعتام الحادث على هذا الجزء باستخدام ميكروفوتومتر . وكلما ازداد عدد الجزيئات الساقطة على الجزء كلما ازداد اعتماجه .

نفرض الآن أن الأسطوانة C تدور حول محورها . تدخل دفعة من الجزيئات داخل الاسطوانة فقط خلال الفترة الزمنية القصيرة التي تعبر فيها الفتحة  $S_3$  الشعاع الجزيئى أى عندما تكون موازية للفتحتين  $S_2$  &  $S_1$

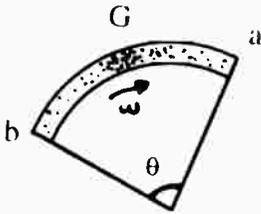
إذا كان الدوران فى اتجاه عقرب الساعة يتحرك لوح الزجاج إلى اليمين أثناء عبور الجزيئات قطر الاسطوانة . وبذلك تصدم الجزيئات لوح الزجاج فى نقط على يسار نقطة تصادمها عندما تكون الاسطوانة ساكنة .

كلما كانت سرعة الجزيئات صغيرة كلما ازداد انحرافها إلى اليسار ، حيث إنها تحتاج لزمان أطول لعبور قطر الاسطوانة ، والتي تكون حينئذ قد دارت مسافة أكبر .

ويكون إعتام هذا اللوح مقياسا لطيف السرعات فى الشعاع الجزيئى . ولإيجاد سرع الجزيئات التي تصدم النقط المختلفة على اللوح G

نفرض ab هو مقدار الانحراف للجزيئ ذى السرعة v ،

شكل (٢ - ١٠) .



شكل (٢-١٠)

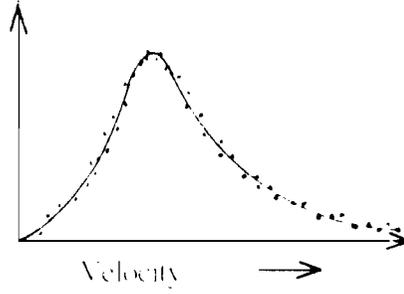
يعمل القوس ab زاوية  $\theta$  عند مركز الاسطوانة إذا كانت

السرعة الزاوية  $\omega$  . يكون زمن دوران الاسطوانة زاوية  $\theta$  هو :

$$t = \frac{\theta}{\omega} = \frac{\theta}{2\pi} \cdot T$$

يقطع الجزيئ مسافة طولها القطر  $2R$  فى هذا الزمن فتكون سرعته هى :

$$v = \frac{2R}{t} = \frac{2R\omega}{\theta}$$



شكل (٢ - ١١)

وبدراسة تغير عدد الجزيئات كما يستدل عليه من درجة الإعتماد مع سرعة الجزيئات في هذه الأماكن أمكن تحقيق قانون ماكسويل حيث تطابقت النقط التجريبية في المنحنى مع النقط النظرية ، شكل (٢ - ١١) .

### الحرارة النوعية للغازات والسوائل على أساس إحصائي :

من قوانين الديناميكا الحرارية تكون الطاقة الداخلية  $V$  لمجموعة ما هي

$$U_2 - U_1 = Q - W$$

وتقاس التغيرات في الطاقة الداخلية عن طريق قياسات الحرارة والشغل . اعتبر

مجموعة جزيئية .

طاقة المجموعة الداخلية تساوى مجموع طاقات جزيئاتها .

إذا كانت  $N$  هي عدد الجزيئات يملكها عدد  $f$  درجات حرية لكل جزيء تكون الطاقة الداخلية .

$$U = N \cdot f \times \frac{1}{2} kT = \frac{f}{2} n RT$$

حيث  $n$  هنا هو عدد الأوزان الجزيئية في الغاز ،  $R$  هو ثابت الغاز للكيلو جرام

الجزيئي  $R = N \cdot k$  الطاقة الداخلية للوزن الجزيئي من الغاز

$$U = \frac{1}{2} f RT$$

الحرارة النوعية الجزيئية عند ثبوت الحجم هي :

$$C_V = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V$$

$$C_V = 1/2 f R$$

ومن قوانين الديناميكا الحرارية : العلاقة بين  $C_V$  ,  $C_P$  هي :

$$C_P = C_V + R$$

$$C_P = \frac{f}{2} R + R = \frac{f+2}{2} R$$

$$8 = \frac{C_P}{C_V} = \frac{1/2 (f+2)}{1/2 f} = \frac{f+2}{f}$$

إذا اعتبرنا غاز طاقة حركة جزيئات كلها انتقالية فإننا نحصل على  $f=3$  وتكون :

$$C_V = \frac{f}{2} R = \frac{3}{2} R$$

$$\gamma = \frac{f+2}{f} = \frac{5}{3}$$

وهذه القيم صحيحة عمليا للغازات أحادية الذرة

اعتبر بعد ذلك غاز جزيئاته ثنائية الذرة ، شكل

( ١٢ - ٢ ) .

عزم القصور الذاتي للمجموعة حول المحورين

(z, x) يكون كبيرا جدا بالنسبة للعزم حول محور

(y, y) ولذلك يمكن اعتبار أن للجزيء درجتين فقط

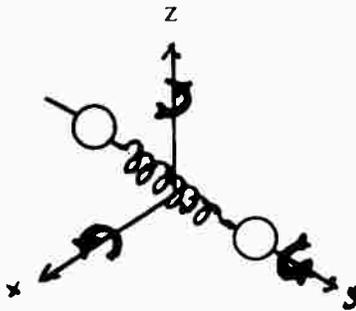
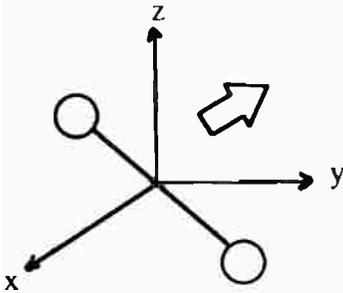
من درجات الحرية الدورانية حول المحورين (z,x) .

أيضا بما أن الرابطة بين الذرتين في الجزيء

ليست متماسكة ، لذلك يمكن للذرتين أن تتحركا حركة

تذبذبية في اتجاه الخط الواصل بينهما . وهذا يضيف

عدد ٢ درجة من درجات الحرية .



شكل (١٢-٢)

∴ يكون العدد الكلى لدرجات حرية الجزيء :

$$\gamma = 2 \text{ انتقالية} + 2 \text{ دورانية} + 2 \text{ تذبذبية} = 6$$

وتكون الحرارة النوعية :

$$\gamma = \frac{9}{7} = 1.29 \quad C_V = \frac{7}{2} R ;$$

وهذه القيم أيضا تتفق مع القيم المقاسة للغازات ثنائية الذرة .

وكما ازداد عدد الذرات فى جزيء الغاز تزداد عدد درجات الحرية ، ويؤدى ذلك إلى

أن  $\gamma$  النسبة بين  $C_p$  ,  $C_v$  تقل باستمرار كلما زادت  $f$  ، وهذا أيضا يتفق مع واقع التجربة .

### الحرارة النوعية للجوامد :

تختلف الجوامد عن الغازات والسوائل، حيث إن لكل ذرة موضع اتزان معين وترتبط

الذرات ببعضها بقوى كبيرة . لذلك تكون حركة الذرات تذبذبية حول مواضع الاتزان ، وتعتبر كل ذرة نقطة كتلة point mass ، ولذلك يكون لها ثلاث درجات حرية للحركة التذبذبية.

ولكن يوجد أيضا نتيجة لقوى الترابط طاقة موضع ويكون طاقة الذرة لكل درجة حرية

$$kT \text{ أى } 2 \times \frac{1}{2} kT$$

الطاقة الكلية لـ  $N$  جزيء فى ١ كيلو جرام جزيء هى :

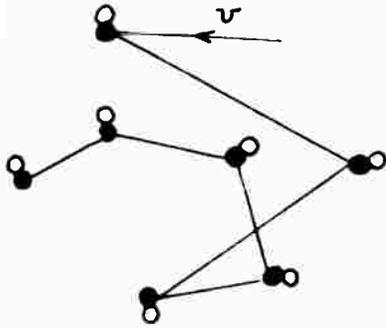
$$U = 3 N \times kT = 3 R T$$

وتكون الحرارة النوعية الذرية molar sp.ht. or atomic heat

$$C = \frac{\partial U}{\partial T} = 3 R$$

ويعرف هذا بقانون ديولنج وبتى الذى ينص على أن الحرارة الذرية لجميع المواد

الصلبة فى الدرجات المرتفعة واحدة ، وتساوى  $3 R$



متوسط طول المسار الحر للجزيئات :

طول المسار الحر للجزيء هو المسافة التي يقطعها الجزيء بين تصادمين متتاليين . ومن الواضح أن طول المسار الحر يختلف شكل (٢-١٣) ولكن يوجد للغاز متوسط طول المسار الحر يرمز له ب  $\lambda$

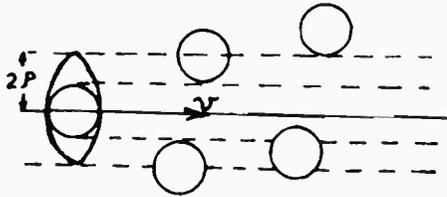
شكل (٢-١٣)

لإيجاد  $\lambda$  نفرض أن جزيئات الغاز جميعا في

حالة سكون وأن جزيئا واحد فقط هو الذي يتحرك ويتصادم مع الجزيئات الأخرى .

نفرض أن سرعة هذا الجزيء هي  $v$  وأن نصف قطره  $\rho$  شكل (٢-١٤) . تكون  $2\rho$

هي المسافة بين مركزي جزيئين عند تصادمهما .



جميع الجزيئات التي توجد

مراكزها في داخل أسطوانة مساحة

مقطعها  $\pi (2\rho)^2$  ويمر محورهما بمركز

الجزيء المتحرك لابد أن تتصادم معه .

شكل (٢-١٤)

تسمى المساحة  $\sigma = 4 \pi \rho^2$  بمقطع التصادم collision cross-section

في الزمن  $t$  يقطع الجزيء المتحرك مسافة  $vt$  ويكتسح حجم الاسطوانة ذات الطول  $vt$  والمقطع  $\sigma$

جميع الجزيئات في الأسطوانة تتصادم مع الجزيء .

فإذا كان  $n$  هو عدد الجزيئات في وحدة الحجم يكون عدد الجزيئات في حجم

الأسطوانة هو  $\sigma vt . n$  ويمثل هذا عدد التصادمات  $Z$  التي تحدث في الزمن  $t$  ويطلق

على ذلك تردد التصادم collision frequency عندما يكون الزمن  $t$  يساوي ثانية واحدة

$$Z = \sigma n v$$

**مثال :** أوجد تردد التصادم للأكسجين ، علمنا بأن عدد الجزيئات فى المتر المكعب

$$= 3 \times 10^{25}$$

سرعة الجزيء عند درجة الغرفة = 450

نصف قطر جزيء الأكسجين =  $1.8 \times 10^{-10}$  متر

**الحل :** collision cross section

$$\sigma = 4 \pi r^2 = 4 \pi \times (1.8 \times 10^{-10})^2$$

$$= 4 \times 10^{-19} \text{ m}^2$$

$$\text{collision freq. } z = 4 \times 10^{-19} \times 3 \times 10^{25} \times 450$$

$$= 5.5 \times 10^9 \text{ collision / sec.}$$

**إيجاد متوسط طول المسار الحر  $\lambda$  نقسم المسافة الكلية المقطوعة فى الزمن**

t على عدد التصادمات فى هذا الزمن :

$$\therefore \lambda = \frac{v t}{\sigma \cdot n \cdot v \cdot t} = \frac{1}{\sigma n}$$

ولما كان عدد الجزيئات فى وحدة الحجم يتناسب طرديا مع ضغط الغاز فإن متوسط

طول المسار الحر يتناسب عكسيا مع الضغط

$$n \propto P$$

$$\lambda \propto 1/P$$

من المثال السابق  $\lambda$  للأكسجين

$$\lambda = \frac{1}{\sigma n} = \frac{1}{4 \times 10^{-19} \times 3 \times 10^{25}} = 8 \times 10^{-8} \text{ m}$$

الاستنتاج السابق يفترض سكون الجزيئات فى الغاز وهذا غير صحيح وعند تصحيح

المعادلة باعتبار الجزيئات متحركة حسب توزيع ماكسويلي للسرعات ، فإنه يمكن إثبات أن

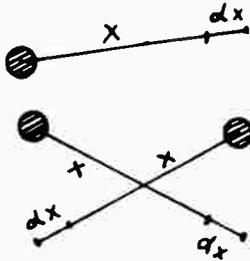
متوسط طول المسار الحر هو :

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sigma n} = \frac{0.707}{\sigma n}$$

في الظروف المعتادة يكون  $\lambda$  حوالي ١٠ أمثال المسافة البينية بين الجزيئات ، كما إن المسافة البينية تكون أيضا حوالي ١٠ أمثال قطر الجزيء

### دالة توزيع المسارات الحرة :

اعتبر مجموعة مكونة من عدد  $N_0$  جزيء في لحظة ما ، يتصادم بعض منها فيخرج من المجموعة . ويتبقى عدد  $N$  جزيء بعد أن تكون قد قطعت مسافات  $x$  في اتجاه مساراتها الحرة. أثناء المسافة الصغيرة التالية  $dx$  يتصادم بعض هذه الجزيئات  $N$  ويخرج من المجموعة ، شكل (٢ - ١٥) .



شكل (٢-١٥)

نفرض أن عدد هذه الجزيئات المتصادمة يتناسب مع العدد  $N$  وكذلك مع المسافة  $dx$  التغيير في العدد  $dN$  الذي يخرج من المجموعة بالتصادم في المسافة  $dx$  يكون سالبا ويساوى

$$dN = - P_c N dx \quad \dots\dots\dots (2)$$

حيث  $P_c$  هو ثابت تناسب يسمى باحتمال التصادم Collision probability ويتوقف على حالة الغاز وليس على  $N$  أو  $x$

$$\int_{N_0}^N \frac{dN}{N} = - P_c \int_0^x dx$$

$$\therefore N = N_0 \exp - P_c x \quad \dots\dots\dots (2)$$

أي أن عدد الجزيئات المتبقى دون أن يتصادم يقل حسب دالة أسية للمتغير  $x$  وبالتفويض في المعادلة (١) نحصل على

$$\therefore dN = - P_c N_0 \cdot \exp (- P_c \cdot x) dx \quad (3)$$

وتمثل القيمة  $dN$  ، مأخوذة بإشارة موجبة طبعاً ، عدد الجزيئات التي يكون لها

مسارات حرة يقع طولها بين  $x$  و  $x + dx$

ويستخدم الطرق الإحصائية لإيجاد متوسط طول المسار  $\lambda$

نجد أن :

$$\lambda = \frac{\int x dN}{N_0} = \frac{\int_0^{\infty} P_c N_0 x e^{-P_c x} dx}{N_0} = \frac{1}{P_c}$$

حيث أن :

$$\int_0^{\infty} x e^{-x} dx = \int_{\infty}^{-\infty} -x de^{-x} = \int_{-\infty}^{\infty} y de^y = 1$$

وهذا يدل على أن احتمال التصادم  $P_c$  يساوى مقلوب متوسط المسار الحر  $\lambda$

$$\frac{1}{\sigma n} = \lambda \quad \text{ولما كانت}$$

$$\therefore P_c = \sigma n \quad \text{فإن :}$$

· أى أن احتمال التصادم يتناسب طردياً مع مقطع التصادم  $\sigma$  وعدد الجزيئات في

وحدة الحجم .

وتكتب المعادلة (٢) بالشكل الآتى :

$$\therefore N = N_0 \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right) \quad (4)$$

والمعادلة (٣) :

$$\therefore dN = -\frac{N_0}{\lambda} \cdot \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right) \cdot dx \quad (5)$$

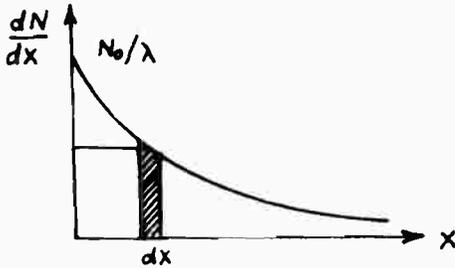
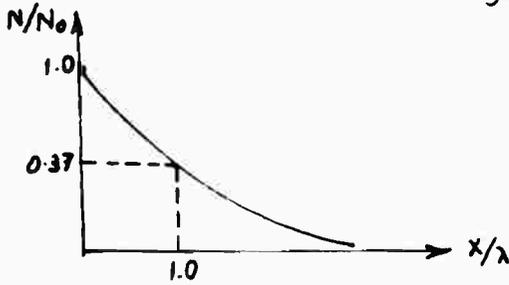
$$N = N_0 e^{-x/\lambda}$$

عدد الجزيئات التي لها مسارات حرة

أطول من  $\lambda$

تساوي:  $e^{-1}$  أو 37 %

$$dN = \frac{N_0}{\lambda} e^{-x/\lambda} dx$$



شكل (٢-١٦)

المعادلة (٤) تبين عدد الجزيئات التي لها مسارات حرة أطول من  $x$

والمعادلة (٥) تبين عدد الجزيئات التي طول مسارتها الحرة تقع بين  $x$  و  $x + dx$

ويراعى هنا إهمال الإشارة السالبة في المعادلة إذ ليس لها معنى طبيعي .

## مسائل وتمارين علي الباب الثاني

١- مدفع إلكتروني يزج إلكترونات إلى حيز به غاز ضغطه ١٠٠ نيوتن / م<sup>٢</sup> ، وتجمع الإلكترونات المتبقية بعد التصادم مع جزيئات الغاز بواسطة لوح معدني على بعد ١٠ سم من المدفع حيث يقاس التيار .

إذا كان التيار الالكتروني المنبعث من المدفع ١٠٠ ميكرو أمبير ، وتيار لوح التجميع ٣٧ ميكرو أمبير ، فأوجد متوسط المسار الحر للإلكترونات ، وماذا يكون تيار اللوح المعدني إذا أنقص الضغط إلى ٥٠ نيوتن / م<sup>٢</sup> .

**الحل :**

$$N = N_0 e^{-x/\lambda} \quad \frac{N}{N_0} = \frac{37}{100} = e^{-x/\lambda}$$

$$e^{-1} = 0.37 \quad \therefore \frac{x}{\lambda} = 1 \quad \therefore x = 10 \text{ cm}$$

درجة حرارة الغاز الإلكتروني ثابتة  $P = 1/3 mn v^2$

$$\therefore \frac{P_1}{P_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{100}{60} = \frac{2}{1}$$

$$\therefore \frac{n_2}{n_3} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \quad \therefore \lambda_2 = 2 \lambda_1 = 20 \text{ cm}$$

$$N = N_0 e^{-x/\lambda} \quad \therefore I = I_0 e^{-x/\lambda}$$

$$I = 100 e^{-10/20} = 100 e^{-0.5} \\ = 60 \text{ micro amp .}$$

٢ - أوجد متوسط طول المسار الحر وتردد النظام لجزيئات التتروجين عند درجة ٢٠° م

وضغط ١ جو . اعتبر قطر الجزيء  $2 \times 10^{-10} \text{ m}$

٣ - الطاقة الداخلية لغاز يحتوي n مول من CO<sub>2</sub> عند درجة 300 K تعطى بالمعادلة

$$U = a n RT + b$$
 حيث a, b ثوابت

أ - أوجد السعة الحرارية الجزيئية تحت حجم ثابت C<sub>v</sub> .

ب - ماذا تكون C<sub>p</sub> لهذا الغاز ؟

ج - كم عدد درجات الحرية لهذا الجزيء عند هذه الدرجة ؟

٤ - إناء يحتوي ١ مول من غاز الهليوم عند درجة 300 k . أوجد عدد الجزيئات

التي لها سرعات فى المنطقة بين 400 & 410 m / s .

٥ - أثبت أن متوسط طول المسار الحر لجزيء من غاز تام يعطى بالمعادلة :

$$l = k T / \sqrt{2} \pi d^2 P$$

حيث d هو قطر الجزيء ، P ضغط الغاز ، T درجة حرارته .

٦ - يحتوى إناء على 10<sup>4</sup> جزيء من الأكسجين عند درجة 500 K

ارسم منحنى توزيع ماكسويل للسرعات مع اعتبار مناطق السرعات 100 m / s . ثم أوجد

من المنحنى السرعة الأكبر احتمالاً وكذلك متوسط السرعة وجذر متوسط مربع السرعات ،

وبين ذلك على المنحنى . ثم أوجد عدد الجزيئات التى تقع سرعتها بين 300 & 600 m / s

٧ - أوجد النسبة بين عدد ذرات الأيدروجين فى الحالة المستقرة ground state وعدد

الذرات المثارة للغاز عندما تكون درجة حرارته 3000 K .

**فكرة الحل :**

أوجد أولاً طاقة الحالة المستقرة لذرة الأيدروجين ، ثم أوجد طاقة الذره المثارة بحساب

طاقم التهييج الحرارى kT عند درجة ٣٠٠٠ كلفن، ثم استخدم دالة ماكسويل للتوزيع .

٨ - يبدأ أيون أكسجين مفرد حركة جرد في اتجاه عمودى على مجال كهربائى شدته  $10^4 \text{ volt / m}$  فى غاز ضغطه جوى ودرجة حرارته  $300 \text{ K}$  .

أ - أوجد المسافة المقطوعة فى اتجاه المجال فى زمن متوسط مسار حر .

ب - مانسبة متوسط المسار الحر إلى هذه المسافة ؟

ج - ما السرعة المتوسطة فى اتجاه المجال ؟

د - ما نسبة السرعة الحرارية thermal velocity إلى هذه السرعة ؟

هـ - ما نسبة طاقة التهييج الحرارى إلى الطاقة المكتسبة من المجال أثناء متوسط مسارحر؟

٩ - فى التجربة الخاصة بتحقيق قانون ماكسويل لتوزيع السرعات كان قطر

الاسطوانة  $0.27 \text{ m}$  وعدد دوراتها فى الدقيقة  $12000 / \text{min}$  ، وكان المصدر عبارة عن فرن يحتوى ماده الزنك فى درجة  $300^\circ \text{C}$  .

أوجد بعد النقطة التى تسقط عليها الجزيئات عندما تكون الاسطوانة ساكنة عن

النقطة التى تسقط عندها الجزيئات ذات الطاقة  $\frac{1}{2} m v_x^2 = 2 KT$  . (الوزن الذرى للزنك =  $65.37$ ) .

١٠ - أثبت أن احتمال التصادم بين جزيئات غاز يساوى مقلوب متوسط طول

المسار الحر . وإن احتمال التصادم يتناسب طرديا مع مساحة مقطع التصادم ، ومع عدد جزيئات الغاز فى وحدة الحجم .

١١ - أثبت أن عدد الجزيئات فى غاز والتى لها مسارات حرة أطول من  $L \text{ cm}$  تعطى

$$N = N_0 e^{-L/\lambda} \quad \text{بالمعادلة}$$

حيث  $\lambda$  متوسط طول المسار الحر للجزيء ،  $N_0$  العدد الكلى للجزيئات .

١٢ - أثبت أن العدد الكلى للجزيئات التى تعبر وحدة المساحات فى وحدة الزمن داخل غاز تساوى  $\bar{v} \cdot \frac{1}{4} \cdot n$  حيث  $n$  هو عدد الجزيئات فى وحدة الحجم ،  $\bar{v}$  متوسط سرعة الجزىء.

