الباب 2

العزوم واختزال القوى الفراغية

Moments and Reduction of Forces

في هذا الباب ندرس الإستاتيكا الفراغية لجسم متماسك في ثلاثة أبعاد، أي ندرس حالة اتزانه فنتعرف على تركيبات القوى التي سببت الأتزان، وكيفية اختزالها إلى أبسط صورة ممكنة.

فسوف نرى كيف يمكن اختزال فئة من القوى الفراغية المتفرقة إلى قوة واحدة محصلة، بالإضافة إلى ازدواج، أو اختزالها إلى قوة واحدة فقط، ثم بعد ذلك ندرس شروط اتزان الجسم تحت تأثير فئة من القوى المؤثرة عليه، لكننا نسبق هذه الدراسة بدراسة ما يسمى بالعزوم *(Moments)* والازدواجات *(Couples)*، لكن بداية دعنا نقدم بعض المفاهيم والتعريفات التي سوف نستخدمها في تعاملنا مع موضوع هذا الباب.

2.1 تعريف القوة ـ *Force*

الأفعال المتبادلة بين جسمٍ مادي (الجسم المادي هو جسم يتكون من كمية معينة من المادة وحجمه لايساوي صفراً) معين وبين الأجسام المادية الأخرى مثل الأحمال *(Tension)*، والتجاذب *(Attraction)*، والتنافر أو رد الفعل *(Reaction)* هي التي تجعل الجسم في حالة حركة *(Motion)*، أو تجعله في حالة سكون *(Rest)*.

هذه الأفعال تسمى قوى *(Forces)*. إذن القوة هي كمية متجهة أي لها مقدار (يقاس بالكيلوغرام أو الباوند) ولها اتجاه شأنها شأن أي متجه آخر، بيد أنها تختلف عن المتجهات الأخرى في أنه يوجد للقوة أيضاً

نقطة تأثير. هكذا نجد أن حالة الحركة أو حالة السكون لأي جسم تتوقف على طبيعة القوى المؤثرة عليه وطريقة تأثيرها.

هذا، والقوى المؤثرة على جسم مادي يمكن أن تتلاقى في نقطة، وفي هذه الحالة تسمى القوى المتلاقية *(Cencurrent Forces)*، كما يمكن أن تكون قوى متوازية *(Parallel Forces)*، ويمكن أن تكون على خط عمل واحد، ويمكن أن تؤثر على الجسم في اتجهات مختلفة.

وتقاس القوة بوحدات خاصة بها طبقاً لتعريفها، ففي النظام العالمي تقاس بوحدات تسمى بالنيوتن ويرمز لوحدة النيوتن بالرمز N وتعَّرف على أنها القوة التي إذا أثرت على كتلة مقدارها **1 kg** أكسبتها عجلة مقدارها $1\ \mathrm{m/sec^2}$. كما تقاس القوة في النظام الإنجليزي بوحدات تسمى الباوندال، وتعرف وحدة الباوندال على أنها القوة التي إذا أثرت على كتلة مقدارها واحد باوند (1 lb.) أكسبتها عجلة مقدارها $1\ \mathrm{ft/sec^2}$. لاحظ أن الباوند الواحد يساوي حوالي 0.454 كجم.

✍.

تعريف الأتزان . *Equilibrium*

2.2

إذا أثرت على جسم مادي قوتان أو أكثر بحيث يصبح الجسم ساكناً فإنه يقال في هذه الحالة إن هذه القوى متزنة أو في حالة اتزان.

✍.

تعريف الجسم والجسيم . A Body and a Particle

2.3

الجسم *(A Body)* هو جزء من المادة محدود من جميع الاتجاهات، أما الجسيم *(A Particle)* فهو جسم مادي لاتؤخذ في الاعتبار أبعاده الهندسية، ويمكن اعتباره كتلة مادية صغيرة جداً مركزة في نقطة واحدة ولذلك يسمى أحياناً بالنقطة المادية.

✍ .

تعريف الجسم المتماسك. A Rigid Body

2.4

هو الجسم الذي إذا أثرت عليه قوى خارجية فإنها لاتحدث أي حركة نسبية بين أجزائه وتظل المسافة بين أي نقطتين ماديتين من نقط الجسم ثابتة دائماً. بمعنى أن الجسم المتماسك هو الجسم الذي يفترض أن أبعاده الهندسية تظل ثابتة تحت تأثير أي قوى خارجية.

✍ .

هذا، والقوى الخارجية هي تأثير الأجسام المادية الأخرى على النقط المادية المختلفة لجسم معلوم مثل ردود الأفعال عند نقط التلامس أو نقط الاتصال أو نقط الارتكاز، بينما القوى الداخلية هي القوى المتبادلة بين النقط المادية المختلفة للجسم المعلوم نفسه.

انتبه! إلى بعض المفاهيم الإستاتيكية

(1) من تعريف الجسيم والجسم المتماسك نلاحظ أنه إذا أثرت مجموعة من القوى على الجسيم فيمكن أن تحركه حركة انتقالية فقط في اتجاه محصلة مجموعة القوى، بينما إذا أثرت نفس مجموعة القوى على الجسم المتماسك فيمكن أن تحركه حركة انتقالية كما يمكن أن تسبب له حركة دورانية.

(2) إذا أثرت مجموعة من القوى على جسم متماسك وكان الجسم في حالة السكون عندئذٍ يقال إن مجموعة القوى متزنة.

(3) إذا أمكن استبدال مجموعة من القوى تؤثر على جسم متماسك حر بقوة واحدة دون أن تتغير حالة سكونه يقال إن القوة الوحيدة هذه هي محصلة مجموعة القوى. أي أن المحصلة ***(Resultant)*** هي قوة وحيدة تأثيرها يكافيء تأثير مجموعة من القوى.

2.1 عزم قوة حول نقطة

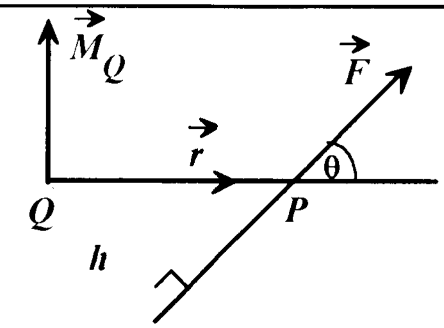
يعرف عزم القوة $\vec{F}$ حول النقطة Q بأنه المتجه الناتج عن حاصل الضرب الاتجاهي للمتجهين $\vec{r}\,,\vec{F}$ ، حيث $\vec{r}$ هو متجه موضع أية نقطة $P(x,y,z)$ على خط عمل القوة $\vec{F}$، ويرمز لمتجه العزم هذا ـ

عادةً ـ بالرمز $\vec{M}_Q$، أي أن

$$\vec{M}_Q = \vec{r} \wedge \vec{F} \tag{2.1}$$

انظر شكل (2.1).

شكل 2.1



عزم القوة $\vec{F}$ حول النقطة Q

ومن تعريف حاصل الضرب الاتجاهي نجد أن متجه العزم $\vec{M}_Q$ هو متجه عمودي على المستوى الذي يحوى المتجهين $\vec{r}$, $\vec{F}$، وفي اتجاه دوران بريمة يمينية من $\vec{r}$ إلى $\vec{F}$. ويكون مقدار العزم هو

$$M_Q = F\, r \sin(\theta) = F\, h \tag{2.2}$$

حيث θ هي الزاوية المحصورة بين خطي عمل متجه القوة $\vec{F}$ والمتجه $\vec{r}$، أما h فهو طول العمود الساقط من النقطة Q على خط عمل $\vec{F}$.

انتبه!

يمكن فهم معنى عزم القوة $\vec{F}$ حول النقطة Q على أنه مقياس للـدوران الذي تسببه هذه القوة حول النقطة Q. ويعتبر العزم موجباً إذا كان في عكس اتجاه عقرب الساعة، ويعتبر سالباً إذا كان مع اتجاه عقرب الساعة.

2.2 عزم قوة حول نقطة الأصل

في الإحداثيات الكارتيزية إذا كانت النقطة Q هي نقطة الأصل $O(0,0,0)$، في هذه الحالة فإن $\vec{r}$ يأخذ الصورة

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \tag{2.3}$$

وإذا فرضنا أن

$$\vec{M}_O = M_x\hat{i} + M_y\hat{j} + M_z\hat{k}, \quad \vec{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k}; \tag{2.4}$$

فإن عزم القوة $\vec{F}$ حول نقطة الأصل O ويرمز له بالرمز $\vec{M}_O$، يصبح في الصورة

$$\vec{M}_O = \vec{r} \wedge \vec{F} \tag{2.5}$$

بالتعويض من (2.4) ,(2.3) في المعادلة رقم (2.5) فإنها تتحول إلى

$$M_x\hat{i} + M_y\hat{j} + M_z\hat{k} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \qquad (2.6)$$

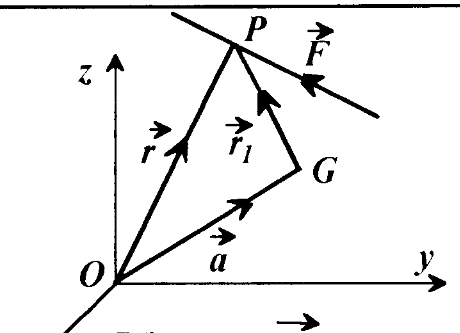
وبعد فك المحدد نحصل على مركبات العزم بدلالة مركبات القوة ومركبات المتجه $\vec{r}$ في الصورة

$$\begin{aligned} M_x &= yF_z - zF_y \\ M_y &= zF_x - xF_z \\ M_z &= xF_y - yF_x \end{aligned} \qquad (2.7)$$

2.3 عزم قوة حول أية نقطة

لنفرض أن G أية نقطة بحيث يكون متجه الموضع لها بالنسبة لنقطة الأصل $O(0,0,0)$ هو المتجه $\vec{a}$ ، انظر شكل (2.2).

شكل 2.2



عزم قوة $\vec{F}$ حول نقطة G

فإن عزم القوة $\vec{F}$ حول النقطة G والذي نرمز له بالرمز $\vec{M}_G$ يأخذ في هذه الحالة الصورة

$$\vec{M}_G = \vec{r}_1 \wedge \vec{F} = \left(\vec{r} - \vec{a}\right) \wedge \vec{F} = \left(\vec{r} \wedge \vec{F}\right) - \left(\vec{a} \wedge \vec{F}\right) \tag{2.8}$$

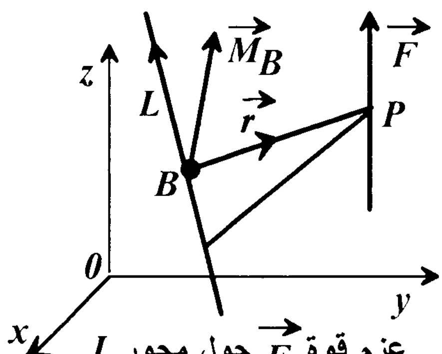
أو

$$\boxed{\vec{M}_G = \vec{M}_O - \left(\vec{a} \wedge \vec{F}\right)} \tag{2.9}$$

2.4 عزم قوة حول محور

لنعتبر الآن المحور L، وأن المطلوب هو تعيين عـزم القـوة $\vec{F}$ حـول هـذا المحور L، أي أن المطلوب هو إيجاد عــزم القـوة $\vec{F}$ حـول محـور و ليـس حول نقطة. انظر شكل (2.3).

شكل 2.3



عزم قوة $\vec{F}$ حول محور L

هذا، وللحصول على عزم القوة $\vec{F}$ حول المحور L، والذي يرمز له بالرمز $\vec{M}_L$، نعين - أولاً - عزم القوة $\vec{F}$ حول أية نقطة اختيارية B واقعة على المحور L، ولنرمز لهذا العزم بالرمز $\vec{M}_B$ فنجد أنه المتجه

$$\vec{M}_B = \vec{r} \wedge \vec{F} \tag{2.10}$$

حيث $\vec{r}$ هو المتجه $\vec{BP}$. يُعرف مقدار متجه العزم $\vec{M}_L$ على أنه مسقط المتجه $\vec{M}_B$ في اتجاه المحور L، الأمر الذي يعني أن مقدار المتجه $\vec{M}_L$ هو

$$\left|\vec{M}_L\right| = \hat{L} \cdot \vec{M}_B = \hat{L} \cdot \left(\vec{r} \wedge \vec{F}\right) \tag{2.11}$$

حيث $\hat{L}$ هو متجه الوحدة في اتجاه المحور L. وإذا كانت $l,\ m, n$ هي جيوب تمام الاتجاه للمحور L، فإن متجه الوحدة $\hat{L}$ يمكن أن يأخذ الصورة

$$\hat{L} = l\,\hat{i} + m\,\hat{j} + n\,\hat{k} \tag{2.12}$$

وإذا كان

$$\vec{r} = r_x\hat{i} + r_y\hat{j} + r_z\hat{k}, \quad \vec{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k} \tag{2.13}$$

عندئذٍ فإن (2.11) تتحول إلى

$$\left|\vec{M}_L\right| = \vec{M}_B \cdot \hat{L} = \left(\vec{r} \wedge \vec{F}\right) \cdot \hat{L}$$

$$= \hat{L} \cdot \left(\vec{r} \wedge \vec{F}\right) = \begin{vmatrix} l & m & n \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \qquad (2.14)$$

وهكذا نجد أن متجه عزم القوة $\vec{F}$ حول المحور L هو المتجه

$$\boxed{\vec{M}_L = \left|\vec{M}_L\right| \hat{L}} \qquad (2.15)$$

ملاحظة

نلاحظ من المعادلة رقم (2.15) أنه إذا كان خط عمل القوة يوازي المحور L ($\hat{L} \,//\, \vec{F}$) أو يتقاطع معه ($\vec{r} = 0$)، فإن $\left|\vec{M}_L\right| = 0$، وفي هذه الحالة فإن العزم يتلاشى.

نظرية 2.5 النظرية العامة للعزوم

المجموع الجبري لمتجهات عزوم فئة من القوى المستوية المتلاقية في نقطة حول أية نقطة في مستويها يساوي متجه عزم محصلة هذه المجموعة من القوى حول نفس النقطة.

.✍

نتيجة

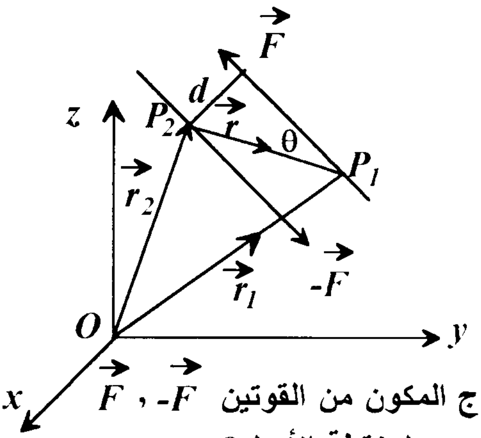
المجموع الجبري لمتجهات عزوم فئة من القوى المستوية المتلاقية في نقطة حول أية نقطة من نقط خط عمل المحصلة يساوي صفراً.

2.5 عزم الازدواج - *Moment of a Couple*

الازدواج يتكون من قوتين متساويتين في المقدار متضادتين في الاتجاه ولهما خطا عمل مختلفان. إذا أثر الازدواج على جسم فإنه يسبب له حركة دورانية بحتة. فإذا كان اتجاه دوران القوتين معاً في عكس اتجاه عقرب الساعة كانت إشارة الازدواج موجبة، وإذا كان اتجاه دوران القوتين معاً في اتجاه عقرب الساعة كانت إشارة الازدواج سالبة.

وللحصول على عزم الازدواج المكون من القوتين $\vec{F}, \; -\vec{F}$. نفرض أن النقطتين $P_1, \; P_2$ هما نقطتان على خطي عمل القوتين $\vec{F}, \; -\vec{F}$، كما نفرض أن $\vec{r_1}, \; \vec{r_2}$ هما متجها الموضع لهما بالنسبة لنقطة الأصل O. أيضاً فإن $\vec{r}$ هو المتجه الواصل بين النقطتين $P_1, \; P_2$، أي أن $\vec{r} = \vec{r_1} - \vec{r_2}$. انظر شكل (2.4).

شكل 2.4



عزم الازدواج المكون من القوتين $\vec{F}$, $-\vec{F}$ حول نقطة الأصل O

يعرف متجه عزم الازدواج المكون من القوتين $\vec{F},\ -\vec{F}$ حول نقطة الأصل O ويرمز له بالرمز $\vec{Q_O}$ بأنه محصلة عزمي القوتين $\vec{F},\ -\vec{F}$ حول النقطة O، أي أن

$$\vec{Q_O} = \vec{r_1} \wedge \left(\vec{F}\right) + \vec{r_2} \wedge \left(-\vec{F}\right)$$

أو

$$\vec{Q_O} = \left(\vec{r_1} - \vec{r_2}\right) \wedge \vec{F} = \vec{r} \wedge \vec{F} \tag{2.16}$$

ومن تعريف حاصل الضرب الاتجاهي نجد أن عزم الازدواج $\vec{Q_O}$ هو

متجه عمودي على مستوى قوتيه $\vec{F}, -\vec{F}$، وفي اتجاه دوران بريمة يمينية من $\vec{F}$ إلى $-\vec{F}$.

فإذا فرضنا أن $d = r\sin(\theta)$ هو البعد العمودي بين القوتين $\vec{F}, -\vec{F}$ فإن مقدار متجه عزم الازدواج $\vec{Q}_O$ يصبح في هذه الحالة

$$Q_O = F\,r\sin(\theta) = F\,d \tag{2.17}$$

ملاحظات

(1) من المعادلة (2.16) نلاحظ أن متجه عزم الازدواج $\vec{Q}_O$ ما هو في الواقع إلا حاصل الضرب الاتجاهي للمتجهين $\vec{r}, \vec{F}$، وحيث أن المتجه $\vec{r}$ لايتوقف على اختيار النقطة O لذلك يقال أن متجه عزم الازدواج $\vec{Q}_O$ هو متجه حر يمكن تطبيقه عند أية نقطة، كما يمكن نقله موازيا لنفسه وبنفس المقدار.

(2) إذا أثرت على جسم متماسك فئة من الازدواجات عزومها حول نقطة ما هي على الترتيب $\vec{Q}_1, \vec{Q}_2, \cdots, \vec{Q}_n$ فإن محصلة هذه الازدواجات هو ازدواج محصل عزمه $\vec{Q}$ حيث

$$\vec{Q} = \sum_{i=1}^{n} \vec{Q_i} \tag{2.18}$$

(3) الفرق بين تأثير القوة وتأثير الازدواج على جسم متماسك هو أن القوة تؤثر على الجسم فتسبب له حركة انتقالية بحتة، أما الازدواج فيسبب له حركة دورانية.

(4) تتكافأ الازدواجات التي لها نفس مقدار العزم ونفس الاتجاه. ويتزن الازدواجان المتساويان في العزم والمتضادان في الاتجاه؛ وذلك لأن تأثير الازدواج يتعين بمقدار عزمه فقط، وليس بمقدار كل من قوتيه.

مثال 2.1 قوة مقدارها 100 نيوتن تمر بالنقطتين $A(-3,-1,4)$, $B(3,4,5)$ الإتجاه من A إلى B. أوجد متجه عزم هذه القوة حول النقطة $C(2,-2,1)$. علماً بأن إحداثيات هذه النقطة مقاسة بالأمتار.

الحل نفرض أن متجه عزم القوة حول النقطة $C(2,-2,1)$ هو $\vec{M_C}$. باستخدام المعادلة رقم (2.9)، يمكن أن نجد أن

$$\vec{M_C} = \vec{M_O} - \left(\vec{OC} \wedge \vec{F}\right); \quad \vec{M_O} = \vec{OA} \wedge \vec{F}$$

أيضاً لدينا

$$\overrightarrow{AB} = 6\hat{i} + 5\hat{j} + \hat{k}, \;\; AB = \sqrt{62}$$

ولأن اتجاه القوة هو نفسه اتجاه المتجه $\overrightarrow{AB}$ ؛ إذن نوجد متجـه الوحـدة للمتجه $\overrightarrow{AB}$ فيكون هو نفسه متجه الوحدة لمتجه القوة. إذن فإن متجه الوحدة في اتجاه $\overrightarrow{F}$ هو المتجه $\hat{F} = \frac{1}{\sqrt{62}}\left(6\hat{i} + 5\hat{j} + \hat{k}\right)$. وبمـا أن $\overrightarrow{F} = F\hat{F}$ ؛ وحيث أن القوة مقدارها $100\ N$. إذن فإن

$$\overrightarrow{F} = \frac{100}{\sqrt{62}}\left(6\hat{i} + 5\hat{j} + \hat{k}\right)$$

ولكن، وبما أن

$$\overrightarrow{OA} = -3\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}, \;\; \overrightarrow{OC} = 2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$$

إذن فإن

$$\overrightarrow{M_O} = \frac{100}{\sqrt{62}}\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -3 & -1 & 4 \\ 6 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \frac{100}{\sqrt{62}}\left(-21\hat{i} + 27\hat{j} - 9\hat{k}\right)$$

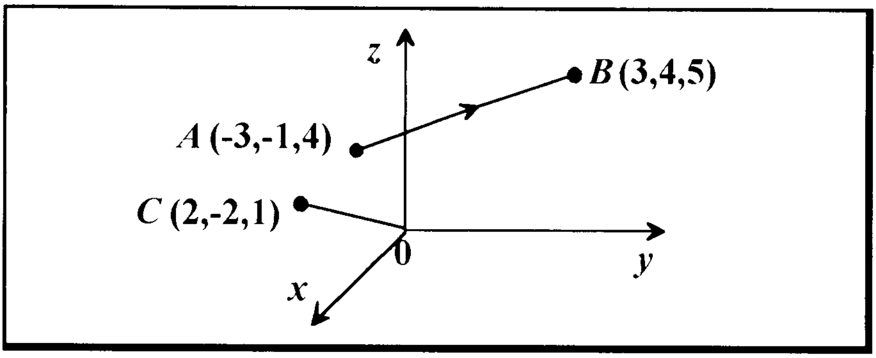
أيضا فإن

$$\overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{F} = \frac{100}{\sqrt{62}}\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -2 & 1 \\ 6 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \frac{100}{\sqrt{62}}\left(-7\hat{i} + 4\hat{j} + 22\hat{k}\right)$$

وبالتالي فإن

$$\vec{M}_C = \frac{100}{\sqrt{62}}\left(-14\hat{i} + 23\hat{j} - 31\hat{k}\right)$$

انظر شكل (2.5).



شكل 2.5

حل آخر

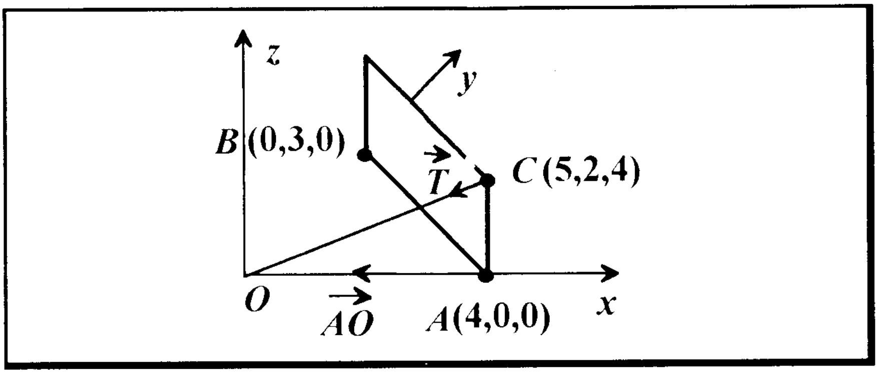
بما أن $\vec{M}_C = \vec{r} \wedge \vec{F}$؛ ولأن $\vec{r}$ هنا يمكن اعتباره المتجه $\vec{CA}$، حيث $\vec{CA} = -5\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$. إذن فإن

$$\vec{M}_C = \frac{100}{\sqrt{62}}\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -5 & 1 & 3 \\ 6 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \frac{100}{\sqrt{62}}\left(-14\hat{i} + 23\hat{j} - 31\hat{k}\right)$$

✍.

مثال 2.2 حفظت الصفيحة المستطيلة في الوضع المبين بشكل (2.6) بواسطة كابل يصل بين نقطتي C,O. إذا كان مقدار الشد في الكابل يساوي $20KN$ فاحسب متجه عزم قوة الشد حول حرف الصفيحة AB.

شكل 2.6



الحل المطلوب هو الحصول على متجه عزم الشد حول المحور AB. نوجد ـ أولاً ـ مقدار هذا العزم، أي نوجد

$$M_{AB} = \hat{AB} \cdot \vec{M}_A = \hat{AB} \cdot \left(\vec{AO} \wedge \vec{T} \right)$$

حيث $\vec{M}_A$ هو متجه عزم الشد $\vec{T}$ حول أية نقطة اختيارية A على المحور AB. بما أن الشد في الكابل مقداره $20\ KN$ وفي اتجاه المتجه $\vec{CO}$؛ إذن نوجد ـ أولاً ـ متجه الوحدة $\hat{CO}$ في اتجاه المتجه $\vec{CO}$ حيث نجد أنه

$$\hat{CO} = \frac{\overrightarrow{CO}}{CO} = \frac{-\left(5\hat{i} + 2\hat{j} + 4\hat{k}\right)}{6.7}$$

وبالتالي فإن متجه الشد $\overrightarrow{T}$ هو المتجه

$$\overrightarrow{T} = \frac{-20\left(5\hat{i} + 2\hat{j} + 4\hat{k}\right)}{6.7}$$

أيضاً نفرض أن المتجه $\hat{AB}$ هو متجه الوحدة في اتجاه المتجه $\overrightarrow{AB}$ إذن فإن

$$\hat{AB} = \frac{\overrightarrow{AB}}{AB} = \frac{-4\hat{i} + 3\hat{j} + 0\hat{k}}{5}$$

الآن نجد أن

$$M_{AB} = \frac{-20}{6.7}\begin{vmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -28.66$$

وبالتالي فإن متجه عزم الشد $\overrightarrow{T}$ حول المحور AB هو المتجه $\overrightarrow{M}_{AB}$، حيث نجد أنه

$$\overrightarrow{M}_{AB} = \left(M_{AB}\right)\hat{AB} = \frac{28.66}{5}\left(4\hat{i} - 3\hat{j} + 0\hat{k}\right)$$

✍.

2.6 اختزال فئـة من القوى الفراغيـة إلى قوة وازدواج عند نقطة الأصل

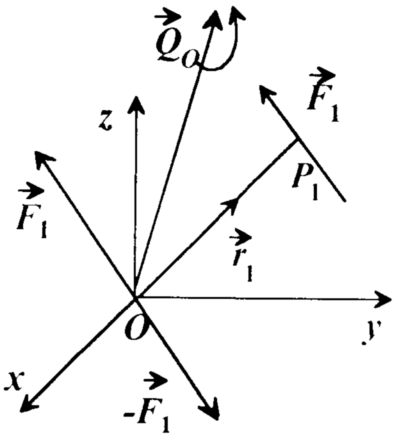
عملية اختزال القوى تعني في علم الاستاتيكا عملية نقل تأثيرها بحيث يظل الجسم على حالته متزناً. فالقوى المتفرقة التي تؤثر على جسم متماسك في عدة مواضع مختلفة من الجسم يمكن اختزالها إلى قوة واحدة تؤثر في موضع آخر مختلف، بيد أنه سيتولد نتيجة لهذا الاختزال ازدواج، وهكذا نجد أن أية فئة من القوى المتفرقة يمكن أن تختزل إلى قوة وازدواج. لكن بدايةً يجب توضيح أن القوى الفراغية يمكن أن تختزل إلى قوة وحيدة، وازدواج عند أية نقطة اختيارية، بيد أننا هنا سنبدأ بالاختزال عند نقطة الأصل، وفي الفصل القادم ندرس الاختزال عند أية نقطة أخرى غير نقطة الأصل.

نفرض أن هناك فئة من القوى تؤثر على جسم متماسك، ولنفرض أن فئة القوى هي $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \ldots, \vec{F_3}$ وتؤثر عند النقط $P_1, P_2, \ldots, P_n$ المعرّفة بالنسبه لنقطة الأصل O بمتجهات الموضع $\vec{r_1}, \vec{r_2}, \ldots, \vec{r_3}$، ولنفرض أن المطلوب هو اختزال هذه المجموعة من القوى إلى قوة وحيدة وازدواج وحيد عند نقطة الأصل O.

طريقة الاختزال

نبدأ - أولاً - باختزال القوه $\vec{F_1}$ فندخل القوتـين $\vec{F_1}, -\vec{F_1}$ عنـد نقطـة O، ولأنهما متساويتان ومتضادتـان في الاتجاه فهما لايؤثـران في حالـة اتزان الجسم. انظر شكل (2.7).

شكل 2.7



اختزال القوة $\vec{F}_1$ عند P_1 إلى قوة وحيدة وازدواج وحيد عند O

الآن نجد أن القوة $\vec{F_1}$ عند النقطة P_1 والقوة $-\vec{F_1}$ عند O تكونان معاً ازدواجاً عزمه هو المتجه $\vec{Q_1}$، حيث

$$\vec{Q_1} = \vec{r_1} \wedge \vec{F_1}$$

وهكذا نجد أن القوه $\vec{F_1}$ - والتي تؤثر عند النقطة P_1 ـ قد تم اختزالها إلى قوة وحيدة $\vec{F_1}$ تؤثر عند نقطة أخرى هي نقطة O وازدواج عزمه $\vec{Q_1}$، وهو - بالطبع - عمودي على $\vec{F_1}$.

الآن، ولاستكمال عملية الاختزال؛ نكرر هذه العملية بالنسبة لباقي القوى الفراغية والمتفرقة $\vec{F_2},\ldots,\vec{F_n}$ حتى نحصل في نهاية عملية الاختزال على فئة من القوى $\vec{F_1},\ \vec{F_2},\ldots,\ \vec{F_n}$ المتلاقية في نقطة O (نرمز لمجموعها الجبري بالرمز $\vec{R}$ وتسمى بالمحصلة)، وفئة من الازدواجات $\vec{Q_1},\ \vec{Q_2},\ \ldots,\ \vec{Q_n}$ (نرمز لمجموعها الجبري بالرمز $\vec{Q_0}$ ويسمى بالازدواج المحصل).

وهكذا نجد أن المحصلة النهائية لكل القوى، ومحصلة كل الازدواجات هما على الترتيب

$$\vec{R}=\sum_{i=1}^{n}\vec{F_i},\quad \vec{Q_O}=\sum_{i=1}^{n}\vec{Q_i} \tag{2.19}$$

لنفرض أن

$$\vec{F_i}=X_i\ \hat{i}+Y_i\ \hat{j}+Z_i\ \hat{k} \tag{2.20}$$

إذن، بالتعويض عن $\vec{F_i}$ من (2.20) في (2.19) نحصل - باستخدام مفهوم جمع المتجهات - على $\vec{R}$ في الصورة

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F_i} = \sum_{i=1}^{n} X_i \, \hat{i} + \sum_{i=1}^{n} Y_i \, \hat{j} + \sum_{i=1}^{n} Z_i \, \hat{k} \qquad (2.21)$$

أو

$$\vec{R} = X \, \hat{i} + Y\hat{j} + Z \, \hat{k} \qquad (2.22)$$

حيث

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i , \quad Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i \quad , Z = \sum_{i=1}^{n} Z_i \qquad (2.23)$$

ويكون مقدار محصلة كل القوى الفراغية والمختزلة عند نقطة O عندئذٍ هو

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \qquad (2.24)$$

أيضاً إذا فرضنا أن

$$\vec{Q_i} = L_i \, \hat{i} + M_i \, \hat{j} + N_i \, \hat{k} \qquad (2.25)$$

إذن، بالتعويض عن $\vec{Q_i}$ من المعادلة (2.25) في (2.19) نحصل على $\vec{Q_O}$ في الصورة

$$\vec{Q}_O = \sum_{i=1}^{n} \vec{Q}_i = \sum_{i=1}^{n} L_i \,\hat{i} + \sum_{i=1}^{n} M_i \,\hat{j} + \sum_{i=1}^{n} N_i \,\hat{k} \tag{2.26}$$

أو

$$\vec{Q}_O = L\,\hat{i} + M\hat{j} + N\,\hat{k} \tag{2.27}$$

حيث

$$L = \sum_{i=1}^{n} L_i, \quad M = \sum_{i=1}^{n} M_i \quad, N = \sum_{i=1}^{n} N_i \tag{2.28}$$

ويكون مقدار العزم المحصل عندئذٍ هو

$$Q_O = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2} \tag{2.29}$$

كذلك إذا فرضنا أن

$$\vec{r}_i = x_i\,\hat{i} + y_i\,\hat{j} + z_i\,\hat{k} \tag{2.30}$$

حيث $P_i\left(x_i, y_i, z_i\right)$ هي أية نقطة على خط عمل القوة $\vec{F}_i$ قبل عملية الاختزال. وبما أن

$$\vec{Q}_i = \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i \tag{2.31}$$

إذن، بالتعويض في المعادلة (2.31) عن كـل مـن $\vec{F}_i$ ، $\vec{r}_i$ ، $\vec{Q}_i$ وذلـك من المعادلات (2.20) ,(2.30) ,(2.25) نجد أن

$$L_i\,\hat{i} + M_i\,\hat{j} + N_i\,\hat{k} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x_i & y_i & z_i \\ X_i & Y_i & Z_i \end{vmatrix} \tag{2.32}$$

وهكذا نجد أن شرط تكافؤ فئة من القوى الفراغية مع قوة وحيدة وازدواج هو أن تتحقق لكل قوة فراغية المعادلات الثلاث الآتية

$$\boxed{\begin{cases} L_i = Z_i y_i - Y_i z_i \\ M_i = X_i z_i - Z_i x_i \quad \forall \;\; i = \overline{1, n} \\ N_i = Y_i x_i - X_i y_i \end{cases}} \tag{2.33}$$

أيضاً من (2.31) ,(2.27) ,(2.19) نجد أن

$$L\,\hat{i} + M\hat{j} + N\,\hat{k} = \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x_i & y_i & z_i \\ X_i & Y_i & Z_i \end{vmatrix} \tag{2.34}$$

وأخيراً نجد أن شرط أن تكافيء فئة القوى الفراغية $\overrightarrow{F_i}\left(X_i, Y_i, Z_i\right)$، حيث $i = \overline{1, n}$ قوة وحيدة $\overrightarrow{R}\left(X, Y, Z\right)$ خط عملها يمر بنقطة الأصل وازدواج محصل $\overrightarrow{Q_O}\left(L, M, N\right)$ هو أن تتحقق المعادلات الثلاث الآتية

$$L = \sum_{i=1}^{n} Z_i y_i - Y_i z_i$$
$$M = \sum_{i=1}^{n} X_i z_i - Z_i x_i \qquad (2.35)$$
$$N = \sum_{i=1}^{n} Y_i x_i - X_i y_i$$

حيث $i = \overline{1, n}$، (x_i, y_i, z_i) هي أية نقطة على خط عمل $\vec{F_i}$.

ملاحظتان

(1) يجب ملاحظة أنه في حالة القوى الفراغية، أي في حالة القوى المتفرقة في الفضاء ثلاثي الأبعاد أن المحصلة $\vec{R}$ والازدواج المحصل $\vec{Q_O}$ ليس من الضروري أن يكونا متعامدين بالرغم من أن متجهات عزوم الازدواجات $\vec{Q_i}$ عموديه على متجهات القوى $\vec{F_i}$. بعكس القوى المستوية، أي القوى المتفرقة في المستوى أو في الفضاء ثنائي الأبعاد فإن المحصلة والازدواج المحصل يكونان متعامدين.

(2) كما نلاحظ ـ أيضاً، وبصفة عامة ـ أن المحصلة $\vec{R}$ لاتعتمد على النقطة الاختيارية O بعكس متجه الازدواج المحصل $\vec{Q_O}$، الذي يعتمد على موضع النقطة O، كما سنرى في الفصل القادم.

هذا، ويمكن الحصول على الزاويه θ المحصورة بين محصلة القوى المختزلة $\vec{R}$ ومتجه عزم الازدواج المحصل $\vec{Q_O}$ من العلاقة

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{R} \cdot \vec{Q_O}}{R \cdot Q_O} \tag{2.36}$$

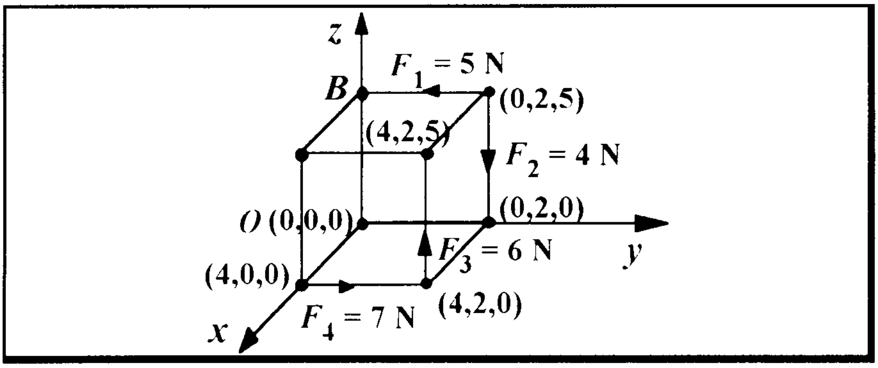
أو

$$\cos(\theta) = \frac{LX + MY + NZ}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}} \tag{2.37}$$

حيث (L, M, N) هي مركبات متجه العزم المحصل $\vec{Q_O}$ بينما (X, Y, Z) فهي مركبات القوة المحصلة $\vec{R}$.

مثال 2.3 استبدل فئة القوى المبينة بمتوازي المستطيلات في شكل (2.8) بقوة وحيدة وازدواج عند نقطة O، علماً بأن أبعاد متوازي المستطيلات مقاسة بالأمتار.

شكل 2.8



الحل

في هذا المثال لدينا أربع قوى مؤثرة في جسم متماسك على شكل متوازي مستطيلات، بالإضافة إلى نقط تأثيرها. هذه القوى، ونقط تأثيرها هي:

$$\vec{F_1} = -5\ \hat{j},\quad \vec{r_1} = 2\hat{j} + 5\hat{k};$$

$$\vec{F_2} = -4\ \hat{k},\quad \vec{r_2} = 2\hat{j} + 5\hat{k}\ ;$$

$$\vec{F_3} = 6\ \hat{k},\quad \vec{r_3} = 4\hat{i} + 2\hat{j};\quad \vec{F_4} = 7\hat{j},\quad \vec{r_4} = 4\hat{i}$$

من (2.19), (2.22) نجد أن

$$\vec{R} = 2\hat{j} + 2\hat{k} \Rightarrow R = 2\sqrt{2}$$

من (2.19), (2.21) نجد أن

$$\vec{Q_O} = \sum_{i=1}^{n} \vec{Q_i} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r_i} \wedge \vec{F_i}$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & -5 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} +$$

$$+\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \end{vmatrix} = 29\hat{i} - 24\hat{j} + 28\hat{k}$$

إذن مقدار العزم المحصل هو

$$Q_0 = \sqrt{(29)^2 + (24)^2 + (28)^2} \approx 46.9$$

الآن، إذا اعتبرنا المتجه $\vec{r_3} = 4\hat{i} + 2\hat{j} + 5\hat{k}$ بدلاً من المتجه $\vec{r_3} = 4\hat{i} + 2\hat{j}$، وإذا اعتبرنا المتجه $\vec{r_3} = 4\hat{i} + 2\hat{j}$ بدلاً من المتجه $\vec{r_4} = 4\hat{i}$، فإن مقدار العزم المحصل لا يتغير، حيث نجد أن

$$\vec{Q_O} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & -5 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} +$$

$$+\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 29\hat{i} - 24\hat{j} + 28\hat{k}$$

وهكذا نجد أن فئة القوى الأربع المتفرقة، والمؤثرة على متوازي المستطيلات قد اختزلت عند نقطة الأصل O بقوة واحدة تؤثر في نقطة الأصل وازدواج محصل عند نقطة الأصل أيضاً هما: $R = 2\sqrt{2},\ Q_0 \approx 46.9$.

✍.

2.7 اختزال فئة من القوى الفراغية إلى قوة وازدواج عند أية نقطة

في الفصل السابق تعرضنا لعملية اختزال فئة من القوى الفراغية المتفرقة عند نقطة الأصل، والسؤال المطروح في هذا الفصل هو: كيف يمكن اختزال نفس فئة القوى الفراغية المتفرقة عند نقطة أخرى غير نقطة الأصل؟ للإجابة عن هذا التساؤل نفرض النقطة G - مثلاً - والتي متجه موضعها بالنسبة إلى نقطة الأصل O هو المتجه $\vec{r}$. بما أن فئة القوى $\{\vec{F_i}\}_{i=1}^{n}$ تكافئ عند O قوة محصلة هي $\vec{R}$، وازدواجاً محصلاً متجه عزمه هو $\vec{Q_O}$، إذن يمكن بنفس طريقة الفصل السابق أن ُندخِل عند نقطة G قوتين هما $\vec{R}, -\vec{R}$. وبالطبع أيضاً فإن هذا لايؤثر على حالة اتزان الجسم. وهكذا نجد أن القوة $\vec{R}$ عند نقطة الأصل O، والقوة $-\vec{R}$ عند النقطة G تكونان معاً ازدواجاً، متجه عزمه هو

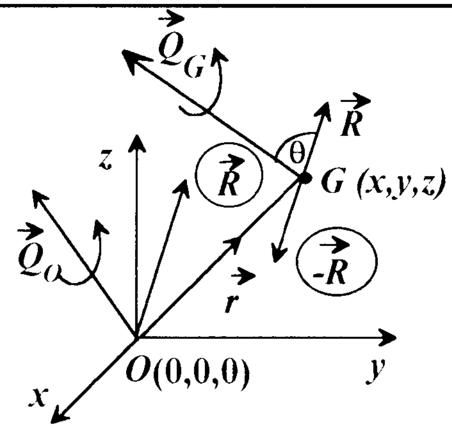
$$-\vec{r} \wedge \vec{R} \tag{2.38}$$

وعلى ذلك فإن فئة القوى الأصلية المعطاة يمكن اختزالها مرة أخرى عند نقطة G إلى نفس القوة $\vec{R}$ ولكن بخط عمل مختلف، بالإضافة إلى ازدواج آخر وحيد عند نفس النقطة G، متجه عزمه $\vec{Q}_G$ هو مجموع العزمين $\left(-\vec{r} \wedge \vec{R}\right)$، $\vec{Q}_O$، أي أن

$$\vec{Q}_G = \vec{Q}_O + \left(-\vec{r} \wedge \vec{R}\right) \tag{2.39}$$

انظر شكل (2.9).

شكل 2.9



اختزال فئة من القوى إلى قوة وازدواج عند النقطة G

هذا، وإذا فرضنا أن النقطة $G(x, y, z)$ هي أية نقطة على خطة عمل المحصلة (القوة الوحيدة $\vec{R}$)، وبما أن $\vec{r}$ هو المتجه $\vec{OG}$، إذا فإن

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \tag{2.40}$$

وهكذا نجد من المعادلتين (2.40), (2.22) وبعد التعويض منهما في المعادلة (2.39) أن

$$\vec{Q}_G = \vec{Q}_O - \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix} \tag{2.41}$$

وإذا فرضنا أيضاً أن

$$\vec{Q}_G = \tilde{L}\ \hat{i} + \tilde{M}\ \hat{j} + \tilde{N}\,\hat{k} \tag{2.42}$$

إذن بالتعويض من (2.22), (2.40), (2.27), (2.42) في المعادلة (2.39) نجد أن

$$\tilde{L}\ \hat{i} + \tilde{M}\ \hat{j} + \tilde{N}\,\hat{k} = L\ \hat{i} + M\ \hat{j} + N\,\hat{k} - \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix} \tag{2.43}$$

وهكذا نجد أن شرط أن تكافيء فئة مكونة من عدد n من القوى الفراغية $\vec{F_i}(X_i, Y_i, Z_i)$، حيث $i = \overline{1,n}$ قوة وحيدة $\vec{R}(X, Y, Z)$ خط عملها يمر بنقطة اختيارية G وازدواجاً محصلاً $\vec{Q_G}(\tilde{L}, \tilde{M}, \tilde{N})$ هو أن تتحقق المعادلات الثلاث الآتية

$$\boxed{\begin{cases} \tilde{L} = L - Zy + Yz \\ \tilde{M} = M - Xz + Zx \quad \forall \ i = \overline{1,n} \\ \tilde{N} = N - Yx + Xy \end{cases}} \tag{2.44}$$

حيث $i = \overline{1,n}$، كما أن $G(x, y, z)$ هي أية نقطة على خط عمل القوة المحصلة $\vec{R}$.

2.8 ملاحظات هامة واستنتاجات

(1) يجب ملاحظة أن المتجه $\vec{Q_O}$ هو متجه حر، وبالتالي يمكن نقله موازياً لنفسه.

(2) القوة الوحيدة (المحصلة) $\vec{R}$ لاتتوقف قيمتها على موضع النقطة الاختيارية G (فالقوة $\vec{R}$ عند O تنتقل إلى نفس القوة $\vec{R}$ عند G، الاختلاف الوحيد هو خط عملها)، بعكس الازدواج المحصل $\vec{Q_G}$،

الذي يعتمد ـ بالتأكيد ـ على موضع النقطة الاختيارية G بالنسبة لنقطة الأصل O.

(3) أيضاً فإن الزاوية θ المحصورة بين الازدواج $\vec{Q}_G$ والقوة $\vec{R}$ تعتمد على موضع النقطة الاختيارية وتتغير بتغيرها.

(4) بما أن

$$\vec{R}\cdot\vec{Q}_G=\vec{R}\cdot\left(\vec{Q}_O+\left(-\vec{r}\wedge\vec{R}\right)\right)$$

$$=\vec{R}\cdot\vec{Q}_O-\left(\vec{R}\cdot\left(\vec{r}\wedge\vec{R}\right)\right)$$

ولكننا نجد من قوانين الضرب الثلاثي القياسي وقوانين حساب المحددات أن

$$\vec{R}\cdot\left(\vec{r}\wedge\vec{R}\right)=0$$

وبالتالي فإن

$$\vec{R}\cdot\vec{Q}_G=\vec{R}\cdot\vec{Q}_O$$

الأمر الذي يعني أن حاصل الضرب القياسي للقوة الوحيدة المحصلة $\vec{R}$ والازدواج المحصل $\vec{Q}_G$ كمية ثابتة لاتتوقف على النقطة الاختيارية.

(5) بما أنه لأية فئة من القوى الفراغية المتفرقة نجد أن مقدار المحصلة $\vec{R}$ مثله مثل مقدار حاصل الضرب القياسي $\vec{R}\cdot\vec{Q}_G$ ، أو $\vec{R}\cdot\vec{Q}_O$ لايتغير بتغير النقطة الاختيارية أو محاور الإسناد، عندئذٍ يمكن اعتبارهما ثوابت لفئة القوى الفراغية، ولذا يطلق عليهما اسم ثوابت *(Invariants)* فئة القوى.

مثال 2.4 استبدل القوى في مثال (2.3) بقوة وازدواج عند نقطة B.

الحل من مثال (2.3) نجد أن القوة الوحيدة التي تؤول إليها فئة القوى عند النقطة B هي

$$\vec{R} = 2\hat{j} + 2\hat{k} \;\Rightarrow\; R = 2\sqrt{2} \tag{i}$$

وعندئذٍ فإن

$$X = 0,\; Y = 2,\; Z = 2 \tag{ii}$$

أيضاً لدينا

$$\vec{Q}_O = 29\hat{i} - 24\hat{j} + 28\hat{k} \tag{iii}$$

إذن، بالتعويض من (iii) ,(ii) في (2.41) ـ مع اعتبار أن النقطة $(x, y, z) = B(0,0,5)$ هي نقطة على خط عمل المحصلة $\vec{R}$ ـ نجد أن العزم المحصل عند النقطة G هو

$$\vec{Q}_G = 29\hat{i} - 24\hat{j} + 28\hat{k} - \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 19\hat{i} - 24\hat{j} + 28\hat{k}$$

مقدار العزم المحصل هو

$$Q_G = \sqrt{(19)^2 + (24)^2 + (28)^2} = 41.4849$$

وهكذا نجد أن فئة القوى الأربع المتفرقة، والمؤثرة على متوازي المستطيلات قد اختزلت عند النقطة B بقوة واحدة $R = 2\sqrt{2}$ تؤثر في النقطة B وازدواج محصل $Q_G \approx 41.4849$ عند نقطة B.

✍.

2.9 اختزال فئة من القوى الفراغية إلى قوة وحيدة

رأينا مما سبق أن أية قوة $\vec{F}_1$ عند النقطة $P_1(x_1, y_1, z_1)$ ـ مثلا ـ يمكن استبدالها عند نقطة الأصل O بنفس القوة $\vec{F}_1$، بالإضافة إلى ازدواج متجه عزمه هو المتجه $\vec{Q}_1$ حيث $\vec{Q}_1 = \vec{r}_1 \wedge \vec{F}_1$، وحيث $\vec{r}_1$ هو متجه موضع النقطة P_1 ، التي على خط عمل القوة $\vec{F}_1$ بالنسبة إلى

النقطة O. وطبعاً فإن متجه العزم $\vec{Q_1}$ هو متجه عمودي على متجه القوة $\vec{F_1}$.

في الواقع أن عكس هذه النظرية أيضاً صحيح. أي أنه يمكن استبدال المجموعة المكونة من القوة $\vec{F_1}$ والازدواج $\vec{Q_1}$ عند نقطة الأصل O بقوة وحيدة $\vec{F_1}$ عند أية نقطة أخرى؛ بشرط أن يكون متجها كل من القوة $\vec{F_1}$ والازدواج $\vec{Q_1}$ متعامدين أي بشرط أن تكون الزاوية θ بينهما قائمة.

تعميم

الآن، دعنا نقدم تعميماً للنتيجة السابقة. لنفترض أنه قد أمكن اختزال أو استبدال فئة القوى الفراغية $\{\vec{F_i}\}_{i=1}^{n}$، التي تؤثر عند النقط $\{P_i\}_{i=1}^{n}$ المعرّفة بالنسبه لنقطة الأصل O بمتجهات الموضع $\{\vec{r_i}\}_{i=1}^{n}$ إلى قوة وحيدة محصلة هي $\vec{R}$ وازدواج وحيد محصل $\vec{Q_O}$ عند النقطة O، بحيث كان المتجهان $\vec{R},\ \vec{Q_O}$ **متعامدين**، في هذه الحالة فإنه يمكن استبدال القوة $\vec{R}$ والازدواج $\vec{Q_O}$ عند نقطة الأصل O بقوة وحيدة $\vec{R}$ تعمل في خط عمل آخر لايمر بالنقطة O. وعلى ذلك

فالشرط الواجب تحقيقه لكي تؤول فئة القوى الفراغية $\{\vec{F_i}\}_{i=1}^{n}$ إلى قوة وحيدة $\vec{R}$ تعمل في خط عمل آخر لايمر بالنقطة O، هو أن تكون الزاوية بين القوة المحصلة $\vec{R}$ والازدواج المحصل $\vec{Q_O}$ زاوية قائمة، وبلغة الرياضيات فإن هذا الشرط يمكن كتابته ـ باستخدام (2.38) ـ في الصورة

$$\cos(\theta) = \frac{LX + MY + NZ}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}} = 0 \tag{2.45}$$

أو

$$LX + MY + NZ = 0 \tag{2.46}$$

حيث (L, M, N) هي مركبات متجه العزم المحصل $\vec{Q_O}$، بينما (X, Y, Z) فهي مركبات القوة المحصلة $\vec{R}$. **ولإيجاد خط عمل القوة** $\vec{R}(X, Y, Z)$ التي تمر بالنقطة $P(x, y, z)$، نفرض أن متجه موضع النقطة $P(x, y, z)$ على هذا الخط بالنسبة لنقطة O هو

$$\vec{r} = x\,\hat{i} + y\,\hat{j} + z\,\hat{k} \tag{2.47}$$

وبما أن عزم القوة الوحيدة $\vec{R}$، والتي تمر بالنقطة $P(x, y, z)$ حول نقطة الأصل O يساوي مجموع عزوم كل القوى حول O، أي يساوي

$\vec{Q}_O(L, M, N)$، إذن فإن

$$\vec{Q}_O = L\,\hat{i} + M\,\hat{j} + N\,\hat{k} = \vec{r} \wedge \vec{R} \tag{2.48}$$

وهكذا نجد أن

$$L\,\hat{i} + M\,\hat{j} + N\,\hat{k} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix} \tag{2.49}$$

فعلياً

فإن المعادلة (2.49) يمكن الحصول عليها من المعادلة (2.39)، وذلك لأن فئة القوى $\{\vec{F_i}\}_{i=1}^{n}$ تؤول إلى قوة وحيدة $\vec{R}$ فقط عندما ينعدم الازدواج $\vec{Q}_G$ ولا تنعدم المحصلة $\vec{R}$. بوضع $\vec{Q}_G = 0$ في (2.39) نحصل على نفس المعادلة (2.49)، إذ أن

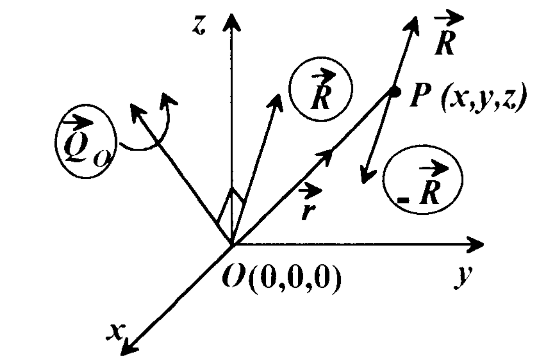
$$\vec{Q}_G = 0 \;\Rightarrow\; \vec{Q}_O - \vec{r} \wedge \vec{R} = 0 \;\Rightarrow\; \vec{Q}_O = \vec{r} \wedge \vec{R}$$

الآن

لنفرض أنه أمكن اختزال أو استبدال فئة القوى الفراغية $\{\vec{F_i}\}_{i=1}^{n}$ إلى القوة $\vec{R}$ والازدواج $\vec{Q}_O$ عند النقطة O، بحيث كان المتجهان

$\vec{Q}_O$ ، $\vec{R}$ متعامدين. فإذا أضفنا ـ الآن ـ القوتين $\vec{R}, -\vec{R}$ عند النقطة $P(x, y, z)$، التي تبتعد مسافة $\frac{Q_O}{R}$ من نقطة الأصل O فإن هذا لن يغير من حالة الجسم المتماسك الواقع تحت تأثير هذه القوى. لكننا ـ في الجانب الآخر ـ نجد أن القوة $-\vec{R}$ عند النقطة $P(x, y, z)$ مع القوة $\vec{R}$ عند النقطة O يكونان معاً ازدواجاً، متجه عزمه هو $-\vec{r} \wedge \vec{R} = -\vec{Q}_O$، وبالتالي فهو يلاشي الازدواج $\vec{Q}_O$ عند O وتتبقى فقط القوة $\vec{R}$ عند النقطة $P(x, y, z)$. انظر شكل (2.10).

شكل 2.10



اختزال مجموعة من القوى إلى قوة وحيدة وازدواج عند النقطة O
ومن ثم إلى قوة وحيدة $\vec{R}$ عند النقطة P

ومن ثم، وبعد فك المحدد في (2.49) ومقارنة طرفي المعادلة يمكن أن نحصل على معادلة خط عمل القوة $\vec{R}$ عند النقطة P من معادلتين من المعادلات الثلاث المستقلة خطياً الآتية

$$\boxed{\begin{aligned} L - zY + yZ = 0 \\ M - xZ + zX = 0 \\ N - yX + xY = 0 \end{aligned}} \tag{2.50}$$

وهذه المعادلات المستقلة خطياً *(Linearly Dependent)* طبقاً للشرط (2.47) تمثل مساقط خط عمل القوة الوحيدة $\vec{R}$، التي تمر بالنقطة P على المستويات $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ على الترتيب.

مثال 2.5 يقع مكعب طول ضلعه a تحت تأثير خمس قوى فراغية $\{\vec{F_i}\}_{i=1}^{5}$ مقاديرها ـ على الترتيب ـ هي: $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$، بالإضافة إلى قوة أخرى مجهولة $\vec{F_6}$ خط عملها يمر بالنقطة $(a, a, 0)$ كما في شكل (2.11). أوجد أقل مقدار للقوة $\vec{F_6}$ بحيث تؤول هذه القوى إلى قوة وحيدة.

الحل القوى الخمس المعطاة والمعلومة هي

$$\vec{F_1} = -\hat{k},\ \ \vec{F_2} = -2\hat{i},\ \ \vec{F_3} = -3\hat{j},\ \ \vec{F_4} = 4\hat{j},\ \ \vec{F_5} = 5\hat{i} \tag{i}$$

أما متجهات موضع كـل منهـا فيمكـن أن نجدهـا ـ علـى الـترتيب ـ في الصور

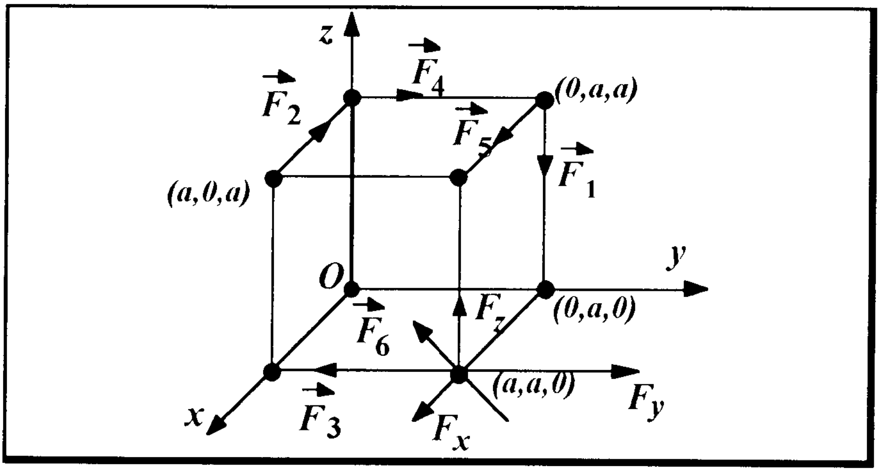
$$\vec{r_1} = 0\hat{i} + a\hat{j} + 0\hat{k},\ \ \vec{r_2} = a\hat{i} + 0\hat{j} + a\hat{k},\ \ \vec{r_3} = a\hat{i} + a\hat{j} + 0\hat{k}$$

$$\vec{r_4} = 0\hat{i} + a\hat{j} + a\hat{k}\ ,\ \vec{r_5} = 0\hat{i} + a\hat{j} + a\hat{k} \qquad \text{(ii)}$$

بالنسبة إلى القوة $\vec{F_6}$ فيمكن تمثيلها في الفضاء ثلاثي الأبعاد ـ باستخدام الصيغة (1.5) في الصورة

$$\vec{F_6} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k} \qquad \text{(iii)}$$

حيث F_x, F_y, F_z هي مركبات القوة $\vec{F_6}$ في اتجاه المحاور الأساسـية $OX,\ OY,\ OZ$. انظر شكل (2.11).



شكل 2.11

كما أن متجه موضع أية نقطة على خط عمل القوة المجهولة $\overrightarrow{F_6}$ مثل النقطة التي احداثياتها $(a,a,0)$ يمكن أن يأخذ الصورة

$$\overrightarrow{r_6} = a\hat{i} + a\hat{j} + 0\hat{k} \tag{iv}$$

الآن نحاول اختزال فئة القوى الخمس $\{\overrightarrow{F_i}\}_{i=1}^{5}$، علاوة على القوة $\overrightarrow{F_6}$ إلى قوة محصلة $\overrightarrow{R}$ وازدواج محصل $\overrightarrow{Q_0}$، عند نقطة الأصل O.

إذن يمكن أن نجد - باستخدام (2.23) - (2.19) - أن

$$\overrightarrow{R} = (F_x - 2 + 5)\hat{i} + (F_y - 3 + 4)\hat{j} + (F_z - 1)\hat{k} \tag{v}$$

وعندئذٍ فإن مركبات القوة المحصلة $\overrightarrow{R}$ هي

$$X = (F_x + 3),\ Y = (F_y + 1),\ Z = (F_z - 1) \tag{vi}$$

أيضاً فإننا نجد ـ باستخدام (2.28) - (2.25), (2.19) ـ أن الازدواج المحصل $\overrightarrow{Q_0}$ هو

$$\overrightarrow{Q_0} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a & 0 & a \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a & a & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & a & a \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & a & a \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a & a & 0 \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \tag{vii}$$

بعد فك المحددات في الطرف الأيمن من (vii) يمكن أن نحصل على الازدواج المحصل في الصورة

$$\vec{Q_0} = (-5a + aF_z)\hat{i} + (3a - aF_z)\hat{j}$$
$$+(-8a + aF_y - aF_x)\hat{k} \tag{viii}$$

من هذه المعادلة الاتجاهية الأخيرة، وباستخدام المعادلة (2.27) نحصل على المعادلات الثلاث

$$L = -5a + aF_z,\ M = 3a - aF_z,\ N = -8a + aF_y - aF_x \tag{ix}$$

وبالتعويض من (ix), (vi) في (2.46) نجد أن الشرط اللازم لكي تؤول المجموعة إلى قوة وحيدة هو

$$(-5a + aF_z)(F_x + 3) + (3a - aF_z)(F_y + 1) +$$
$$(-8a + aF_y - aF_x)(F_z - 1) = 0 \tag{x}$$

وبعد الاختصار نجد أن شرط أن تؤول فئة القوى المعطاة إلى قوة واحدة هو

$$-2F_x + F_y - 3F_z = 2 \qquad \text{(xi)}$$

وبما أنه من (iii) لدينا

$$F_6{}^2 = F_x{}^2 + F_y{}^2 + F_z{}^2 \qquad \text{(xii)}$$

إذن، وبالتعويض عن قيمة F_y من (viii) في (xii) نحصل على

$$(F_6)^2 = F_x^2 + (2F_x + 3F_z + 2)^2 + F_z^2 \qquad \text{(xiii)}$$

نلاحظ هنا أن القوة F_6 تعتمد على المركبات F_x, F_z فقط، إذن، ولكي تكون القوة F_6 أقل ما يمكن فيجب أن نبحث عن المركبات F_x, F_z، التي تحقق المعادلات

$$\frac{\partial F_6}{\partial F_x} = 0, \quad \frac{\partial F_6}{\partial F_z} = 0 \qquad \text{(xiv)}$$

وبإجراء عملية التفاضل ـ جزئياً ـ بالنسبة إلى المركبات F_x, F_z وذلك للدالة في المعادلة (xiii) نجد أن

$$\begin{aligned} 2F_6 \frac{\partial F_6}{\partial F_x} &= 2F_x + 4(2F_x + 3F_z + 2) \\ &= 10F_x + 12F_z + 8 \end{aligned} \qquad \text{(xv)}$$

إذن فإن

$$\frac{\partial F_6}{\partial F_x}=\frac{10F_x+12F_z+8}{2F_6}$$

وبالتعويض في (xiv) نجد أن

$$10F_x+12F_z+8=0 \tag{xvi}$$

أيضاً نجد أن

$$2F_6\frac{\partial F_6}{\partial F_z}=2F_z+6\left(2F_x+3F_z+2\right)$$

$$=12F_x+20F_z+12 \tag{xvii}$$

إذن فإن

$$\frac{\partial F_6}{\partial F_z}=\frac{12F_x+20F_z+12}{2F_6}=0$$

وبالتعويض في (xiv) نجد أن

$$12F_x+20F_z+12=0 \tag{xviii}$$

بحل المعادلتين (xvi), (xviii) - آنياً ـ يمكن أن نحصل على F_x, F_z، ومن ثم، وبالتعويض في (xi) نحصل على F_y، وهكذا نجد أن

$$F_x=-\frac{2}{7},\ F_y=\frac{1}{7},\ F_z=\frac{-3}{7} \tag{xix}$$

وبالتعويض في (iii) نحصل على أقل مقدار للقوة F_6 يسمح لكل فئة القوى أن تختزل إلى قوة واحدة، حيث نجد أنه

$$F_6 = \sqrt{{F_x}^2 + {F_y}^2 + {F_z}^2} = \sqrt{\frac{4+1+9}{49}} = \sqrt{\frac{2}{7}}$$

الآن يمكن لفئة القوى $\{\vec{F_i}\}_{i=1}^{6}$، والتي مقاديرها على الترتيب هي $\left\{1, 2, 3, 4, 5, \sqrt{\frac{2}{7}}\right\}$ أن تختزل إلى قوة واحدة $\vec{R}$. لنفرض أن خط عمل هذه القوة $\vec{R}$ يمر بالنقطة (x, y, z) مثلاً. إذن، للحصول على مقدار هذه القوة يجب التعويض من (xix) في (vi) فنحصل على

$$X = \frac{19}{7},\ Y = \frac{8}{7},\ Z = \frac{-10}{7}$$

وبالتالي فإن مقدارها هو

$$R = \sqrt{\frac{361+64+100}{49}} = \sqrt{\frac{525}{49}} = 5\sqrt{\frac{3}{7}}$$

أما معادلة خط عمل القوة الوحيدة (المحصلة) $\vec{R}$، فيمكن الحصول عليها بسهولة باستخدام المعادلات (2.50). بالتعويض مرة أخرى من (xix) في (ix) نحصل على

$$L = \frac{-38a}{7},\ M = \frac{24a}{7},\ N = \frac{-53a}{7}$$

عندئذٍ فإن (2.50) تعطي

$$8z + 10y = -38a,\ 19z + 10x = -24a,\ 8x - 19y = 53a$$

وبحذف z من المعادلتين الأولى والثانية نحصل على المعادلة الثالثة، وعلى هذا فأي معادلتين من هذه المعادلات يمكن أن تمثل معادلة خط عمل القوة الوحيدة (المحصلة) $\vec{R}$.

✍.

2.11 اختزال فئة من القوى الفراغية المتوازية

نفرض أن هناك فئة من القوى الفراغية المتوازية، والتي توازي محور ـ Z مثلاً، ولنفرض أنها تأخذ الصورة

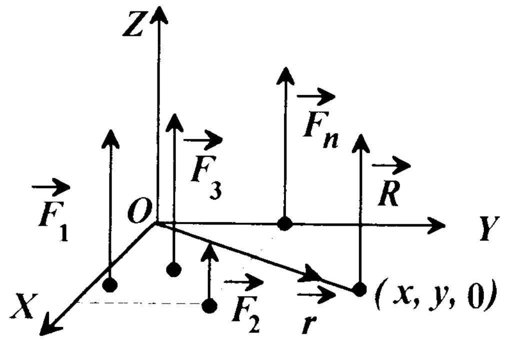
$$\vec{F_i} = 0\hat{i} + 0\hat{j} + f_i\,\hat{k}\ ;\ i = \overline{1, n} \tag{2.51}$$

وتؤثر عند النقط

$$P_1(x_1, y_1),\ P_2(x_2, y_2),\ \ldots,\ P_n(x_n, y_n)$$

الواقعة في المستوى XOY، والمعرفة بالنسبة لنقطة الأصل O بمتجهات الموضع $\vec{r_1}, \vec{r_2}, \ldots, \vec{r_n}$. انظر شكل (2.12).

شكل 2.12



مجموعة من القوى الفراغية المتوازية تختزل إلى
قوة وازدواج عند O ، ومن ثم إلى القوة $\vec{R}$ عند $(x, y, 0)$

إذن

$$\vec{r_i} = x_i\,\hat{i} + y_i\,\hat{j} + 0\hat{k}\;; \quad i = \overline{1,n} \tag{2.52}$$

واضح أن خطوط عمل هذه القــوى الفراغيـة تـوازي محور OZ، وأنهـا تكافيء عند نقطة O قوة محصلة هي $\vec{R}$ والتي توازي أيضـاً محـور OZ، بالإضافة إلى إزدواج $\vec{Q_0}$ عمودياً على المحصلة $\vec{R}$ ، أي يقع في المستوى XOY ، وهكذا نجد أن

$$\vec{R} = f\hat{k}\;;\; f = \sum_{i=1}^{n} f_i \quad \& \quad \vec{Q_0} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r_i} \wedge \vec{F_i} \tag{2.53}$$

وحيث إن $\vec{R}$ عمودي على $\vec{Q_0}$، لذلك فإنه يمكن استبدالهما بقوة منفردة $\vec{R}$، خط عملها يوازي محور OZ ويقطع المستوى XOY في النقطة $(x, y, 0)$. بالتأكيد فإن عزم هذه القوة $\vec{R}$ حول O يساوي مجموع عزوم كل القوى الأخرى حول O، إذن فإن

$$\vec{r} \wedge \vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r_i} \wedge \vec{F_i} \tag{2.54}$$

بما أن

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + 0\hat{k} \tag{2.55}$$

إذن، بالتعويض من المعادلات (2.55), (2.53), (2.52), (2.51) في المعادلة (2.54) نحصل على

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & 0 \\ 0 & 0 & f \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x_i & y_i & 0 \\ 0 & 0 & f_i \end{vmatrix} \tag{2.56}$$

هذا، ويمكن تعيين إحداثيات نقطة التقاطع $(x, y, 0)$ بفك المحددين في الطرفين، ومقارنة معاملات $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ حيث نحصل على

$$y f=\sum_{i=1}^{n} f_i y_i ; \quad x f=\sum_{i=1}^{n} f_i x_i \tag{2.57}$$

أو

$$x=\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{f}, \quad y=\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i y_i}{f} \tag{2.58}$$

مثال 2.6 أوجد القوة الوحيدة المكافئة، وكذلك نقطة تأثيرها للقوى: $\vec{F_1}=10\hat{k}$ والتي تؤثر في النقطة (2,0,0)، والقوة $\vec{F_2}=-14\hat{k}$ والتي تؤثر في النقطة (3,2,0)، والقوة $\vec{F_3}=-20\hat{k}$ والتي تؤثر في النقطة (1,2,0).

الحل من المعادلتين (2.51), (2.53) نجد أن

$$f=\sum_{i=1}^{3} f_i=10-14-20=-24$$

وبالتالي فإن $\vec{R}$ (القوة الوحيدة المكافئة) أو المحصلة هي القوة

$$\vec{R}=f\hat{k}=-24\hat{k} \quad \Rightarrow \quad R=24$$

الآن، لنفرض أن المحصلة تؤثر في النقطة (x, y, z)، وأن متجه عزم

المحصلة $\vec{R}$ حول نقطة الأصل O هو $\vec{M}_O$، إذن فإن

$$\vec{M}_O = \vec{r} \wedge \vec{R} = \left(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}\right) \wedge \left(-24\hat{k}\right)$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & z \\ 0 & 0 & -24 \end{vmatrix}$$

وهكذا نجد أن

$$\vec{M}_O = (-24y)\hat{i} + (24x)\hat{j} \tag{i}$$

أيضاً لنفرض أن مجموع متجهات عزوم القوى الثلاث المعطاة حول نقطة الأصل O هو المتجه $\vec{Q}_O$، إذن فإن

$$\vec{Q}_O = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -14 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -20 \end{vmatrix}$$

$$= \left(-20\hat{j}\right) + \left(-28\hat{i} + 42\hat{j}\right) + \left(-40\hat{i} + 20\hat{j}\right)$$

أو

$$\vec{Q}_O = -68\hat{i} + 42\hat{j} \tag{ii}$$

وبما أن مجموع عزوم القوى حول أية نقطة يساوي عزم المحصلة حول نفس النقطة. إذن من (ii) ,(i)، وبالمقارنة نحصل على

$$\begin{cases} -68 = -24y \\ 42 = 24x \end{cases} \Rightarrow \quad x = \frac{7}{4},\ y = \frac{17}{6}$$

وعندئذٍ فإن نقطة تأثير المحصلة هي

$$(x, y, z) = \left(\frac{7}{4}, \frac{17}{6}, 0\right)$$

بطريقة أسهل يمكن الحصول على نقطة تأثير المحصلة باستخدام المعادلات (2.58). بما أن

$$f_1 = 10,\ f_2 = -14,\ f_3 = -20$$

كما أن

$$\begin{cases} (x_1, y_1, z_1) = (2, 0, 0) \\ (x_2, y_2, z_2) = (3, 2, 0) \\ (x_3, y_3, z_3) = (1, 2, 0) \end{cases}$$

إذن فإن

$$y\ (\text{-}24) = \sum_{i=1}^{3} f_i\, y_i$$

$$= (10)\ (0) + (-14)\ (2) + (-20)(2) = -68$$

ومنها نجد أن

$$y = \frac{68}{24} = \frac{17}{6}$$

وأيضاً لدينا

$$x(-24) = \sum_{i=1}^{3} f_i \, x_i$$

$$= (10)\ (2) + (-14)\ (3) + (-20)(1) = -42$$

ومنها نجد أن

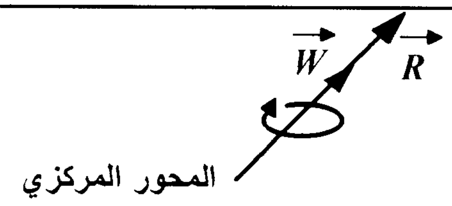
$$y = \frac{42}{24} = \frac{7}{4}$$

✍.

2.11 القوة البريمية ـ Force - Screw

في هذا الفصل نتعرض لتكنيك آخر من اختزال القوى الفراغية، حيث يمكن اختزال فئة من القوى الفراغية إلى ما يسمى القوة البريمية *(Force - Screw)* وأحياناً يسمى اللولبية *(Wrench)*، وهي عبارة عن قوة وازدواج على خط عمل واحد. بمعنى أن محور الازدواج (يسمى محور اللولبية أو المحور المركزي) هو نفسه خط عمل القوة، ومن هنا جاءت التسمية اللولبية أو القلاوظ لأن عمل القوة والازدواج معاً يشبهان عمل مسمار القلاوظ. انظر شكل (2.13).

شكل 2.13



اللولبية *(Wrench)*

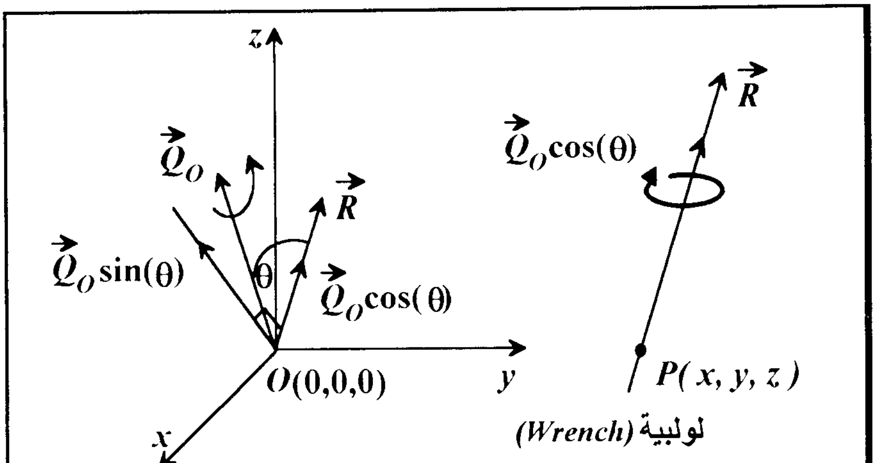
هذا وتوجد للولبية شدة معينة تساوي مقدار القوة، كما يوجد ما يسمى خطوة اللولبية *(Pitch)*، وهي تعتمد على مقداري كل من القوة والازدواج كما سنرى.

لنفرض أن فئة القوى $\{\vec{F_i}\}_{i=1}^{n}$ قد أمكن اختزالها إلى القوة $\vec{R}$ والازدواج $\vec{Q_O}$ عند نقطة الأصل O، بحيث كانت الزاوية بينهما θ.

الآن، إذا كانت $\theta = \frac{\pi}{2}$ فإن القوة $\vec{R}$ والازدواج $\vec{Q_O}$ يمكن اختزالهما إلى نفس القوة $\vec{R}$ فقط ولكن في خط عمل آخر، أما إذا كانت الزاوية بينهما ليست قائمة $(\theta \neq \frac{\pi}{2})$ فالأمر يختلف.

لِذا دعنا نقوم بتحليل متجه الازدواج $\vec{Q_O}$ في اتجاهي خط عمل القوة $\vec{R}$، والاتجاه العمودي عليه كما في شكل (2.14).

شكل 2.14



اختزال فئة من القوى إلى لولبية (Wrench)

وفي هذه الحالة يمكن اختزال القـوة $\vec{R}$ والازدواج $\vec{Q_O}\sin(\theta)$ بقـوة وحيدة $\vec{R}$ مقدارها يسمى "**شدة اللولبية**"، وهي تعمل في خط عمل آخر يقع في مستوى يمر بالنقطة $P(x,y,z)$ وعمودي علـى المسـتوى الذي يقع فيه كـل مـن $\vec{Q_O}$, $\vec{R}$، وبحيـث تبعـد النقطـة $P(x,y,z)$ عن نقطة الأصل O المسافة $\dfrac{Q_O\sin(\theta)}{R}$.

أما بالنسبة لمركبة الازدواج $\vec{Q_O}\cos(\theta)$ فيمكن نقلها موازية لنفسـها لتعمل في خط عمل القوة $\vec{R}$ عند النقطة $P(x,y,z)$، وهـي تحـدث دوراناً في المسـتوى العمـودي علـى خـط عمـل القـوة $\vec{R}$ عنـد النقطـة

$P(x, y, z)$. فإذا رمزنا لمركبة الازدواج في اتجاه $\vec{R}$ بالرمز $\vec{W}$، أي إذا كان $\vec{W} = \vec{Q_O}\cos(\theta)$، فإننا نجد أن فئة القوى $\{\vec{F_i}\}_{i=1}^{n}$ قد أمكن اختزالها إلى قوة $\vec{R}$ وازدواج $\vec{W}$ يعملان في خط عمل واحد، وهو ما يطلق عليه اللولبية.

هذا، وتعرف **خطوة اللولبية** *(Step-Size)* (يرمز لها عادة بالرمز h) على أنها المقدار

$$h = \frac{W}{R} \quad \Rightarrow \quad W = hR \tag{2.59}$$

الأمر الذي يعني أن مقدار عزم اللولبية W ما هو إلا خطوة اللولبية مضروباً في R، أما اتجاهها فهو نفس اتجاه $\vec{R}$ عند $P(x, y, z)$، أي أن

$$\vec{W} = W\hat{R} = W\frac{\vec{R}}{R} = hR\frac{\vec{R}}{R} = h\vec{R} \tag{2.60}$$

أيضاً فإن

$$W = Q_O\cos(\theta) = \frac{RQ_O\cos(\theta)}{R} = \frac{\vec{R}\cdot\vec{Q_O}}{R} \tag{2.61}$$

وإذا كان $\vec{R}(X, Y, Z)$، وكان $\vec{Q_O}(L, M, N)$، عندئذٍ نجد أن

$$W = \frac{LX + MY + NZ}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}} \tag{2.62}$$

وهكذا نجد أن

$$h = \frac{W}{R} = \frac{LX + MY + NZ}{X^2 + Y^2 + Z^2} \tag{2.63}$$

هذا، ولتعيين إحداثيات النقطة $P(x, y, z)$ على خط عمل القوة $\vec{R}$، أو بالأحرى على المحور المركزي نجد أن المسافة بين نقطة الأصل وأية نقطة $P(x, y, z)$ على خط عمل $\vec{R}$ هي $\frac{Q_O \sin(\theta)}{R}$، وبالتالي فإن

$$|\vec{OP}| = \frac{Q_O \sin(\theta)}{R} = \frac{RQ_O \sin(\theta)}{R^2} \tag{2.64}$$

ولأن المتجه $\vec{OP}$ عمودي على المستوى الذي يحوي كل من $\vec{R}, \vec{Q_O}$ إذن فإن

$$\vec{OP} = \frac{\vec{R} \wedge \vec{Q_O}}{R^2} \tag{2.65}$$

أو

$$x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = \frac{1}{R^2}\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ X & Y & Z \\ L & M & N \end{vmatrix} \tag{2.66}$$

حيث نجد بمقارنة الطرفين أن

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{R^2}(YN - ZM) \\ y &= \frac{1}{R^2}(ZL - XN) \\ z &= \frac{1}{R^2}(XM - YL) \end{aligned} \tag{2.67}$$

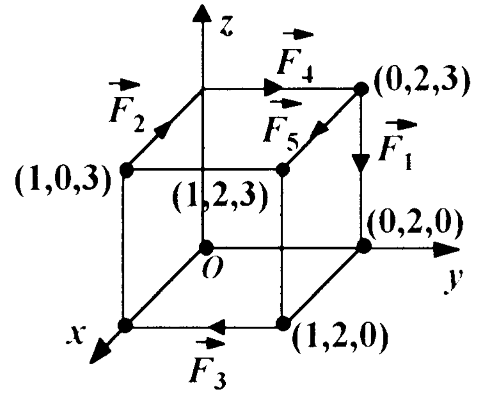
فإذا كانت إحداثيات أية نقطة مجهولة على المحور المركزي هي $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$، وكانت (X, Y, Z) هي مركبات القوة في اتجاه المحاور الأساسية، عندئذٍ يمكن ـ بمعلومية النقطة $P(x, y, z)$ ـ أن نوجد معادلة المحور المركزي (معادلة خط عمل $\vec{R}$) القياسية في الصورة

$$\frac{\tilde{x} - x}{X} = \frac{\tilde{y} - y}{Y} = \frac{\tilde{z} - z}{Z} \tag{2.68}$$

مثال 2.7

تؤثر خمس قوى فراغية $\{\vec{F_i}\}_{i=1}^{5}$ مقاديرها ـ على الترتيب ـ هي: $1, 2, 3, 4, 5$ من وحدات الباوند في متوازي مستطيلات أبعاده هي: $1, 2, 3$ من الأقدام، كما في شكل (2.15). اختزل فئة القوى إلى لولبية، وأوجد المعادلة القياسية لمحورها المركزي.

شكل 2.15



الحل

نختزل فئة القوى المعطاة إلى قوة $\vec{R}$ ، وازدواج $\vec{Q}_0$، عند نقطة الأصل O. بما أن

$$\vec{F}_1 = -\hat{k},\ \vec{F}_2 = -2\hat{i},\ \vec{F}_3 = -3\hat{j},\ \vec{F}_4 = 4\hat{j},\ \vec{F}_5 = 5\hat{i} \tag{i}$$

إذن فإن

$$\vec{R} = 3\hat{i} + \hat{j} - \hat{k} \tag{ii}$$

وعندئذٍ فإن

$$X = 3,\ Y = 1,\ Z = -1 \tag{iii}$$

أيضاً فإن الازدواج المحصل $\vec{Q}_0$ هو

$$\overrightarrow{Q_0} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad \text{(iv)}$$

بعد فك المحددات في الطرف الأيمن من (iv) يمكن أن نحصل على الازدواج المحصل $\overrightarrow{Q_0}$ في الصورة

$$\overrightarrow{Q_0} = -14\hat{i} + 9\hat{j} - 13\hat{k} \qquad \text{(v)}$$

إذن، من الصورة (2.27) نجد أن

$$L = -14,\ M = 9,\ N = -13 \qquad \text{(vi)}$$

واضح طبعاً من المعادلتين (v) ,(ii) أن الزاوية بين $\overrightarrow{R}$ والازدواج $\overrightarrow{Q_0}$ ليست قائمة حيث أن

$$\overrightarrow{R} \cdot \overrightarrow{Q_0} = (3,1,-1) \cdot (-14,9,-13)$$

$$= -42 + 9 + 13 = -20 \neq 0$$

وبالتالي فإن فئة القوى لايمكن اختزالها إلى قوة مفردة. لكن على أية حال سوف نختزلها إلى لولبية. من المعادلة (ii) نجد أن شدة اللولبية هو

المقدار

$$R = \sqrt{9+1+1} = \sqrt{11} \qquad \text{(vii)}$$

أيضاً من المعادلة (2.61) نجد أن عزم اللولبية هو المقدار

$$W = \frac{\vec{R} \cdot \vec{Q_O}}{R} = \frac{-20}{\sqrt{11}} \qquad \text{(viii)}$$

أما خطوة اللولبية فنجدها ـ طبقاً للمعادلة (2.63) ـ في الصورة

$$h = \frac{-20}{11} \qquad \text{(ix)}$$

هذا، ولتعيين معادلتي خط عمل المحور المركزي (خط عمل القوة $\vec{R}$) نوجد ـ أولاً ـ إحداثيات أيه نقطة (x, y, z) على هذا الخط، وذلك باستخدام (2.67)، حيث نجد أن

$$x = \frac{-22}{11}, \quad y = \frac{-25}{11}, \quad z = \frac{23}{11} \qquad \text{(x)}$$

وهكذا نجد أن المعادلة القياسية للمحور المركزي للولبية هي

$$\frac{\tilde{x}+2}{3} = \frac{11\tilde{y}-25}{11} = \frac{11\tilde{z}-23}{-11} \qquad \text{(xi)}$$

حيث $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ هي أية نقطة مجهولة على خط عمل المحور المركزي.

.✍

2.12 شـــــروط اتـزان جســـــم متماسـك تـحت تـأثير فئـة من القـوى الفراغية

رأينا فيما سبق أن أية فئة من القوى الفراغية يمكن أن تختزل إلى قوة واحدة (تسمى المحصلة) وازدواج محصل وحيد عند نقطة معينة، فإذا كانت هذه القوة عمودية على ذلك الازدواج فإنه يمكن عندئذٍ اختزالهما إلى نفس هذه القوة الوحيدة فقط، ولكن بخط عمل مختلف. أما إذا كانت الزاوية بين القوة والازدواج ليست قائمة ففي هذه الحالة يمكن الاختزال إلى لولبية.

انطلاقاً من هذا المفهوم نجد أنه، لدراسة اتزان جسم واقع تحت تأثير فئة من القوى الغراغية المتفرقة، يكون من الأسهل أن نقوم بدراسة القوة المحصلة الوحيدة، والازدواج المحصل، أو دراسة القوة المحصلة فقط (في حالة ما تكون هذه القوة عمودية على ذلك الازدواج المحصل).

وهكذا نجد أن شروط اتزان جسم متماسك تحت تأثير فئة من القوى الفراغية هو أن يتلاشى كل من القوة المحصلة $\vec{R}$، والازدواج المحصل $\vec{Q}$؛ وبلغة المعادلات فهذا يعني أن شرط اتزان جسم هو

$$\vec{R} = 0, \quad \vec{Q} = 0 \tag{2.69}$$

وإذا ما استخدمنا المعادلات (2.29) - (2.19) فإن الشرط (2.69) يتحول إلى الست معادلات

$$X = 0,\ Y = 0,\ Z = 0,\ L = 0,\ M = 0,\ N = 0 \tag{2.70}$$

إذا كانت فئة القوى مختزلة عند نقطة الأصل. أما إذا كان اختزال القوى يتم عند نقطة أخرى فإن الشرط (2.69) يتحول ـ باستخدام (2.42) ـ إلى الست معادلات

$$X = 0,\ Y = 0,\ Z = 0,\ \tilde{L} = 0,\ \tilde{M} = 0,\ \tilde{N} = 0 \tag{2.71}$$

أما شرط اتزان جسم متماسك تحت تأثير فئة من القوى المتلاقية في نقطة فهو أن تتلاشى محصلة القوى فقط، بمعنى أن يكون

$$\vec{R} = 0 \tag{2.72}$$

أو

$$X = 0,\ Y = 0,\ Z = 0 \tag{2.73}$$

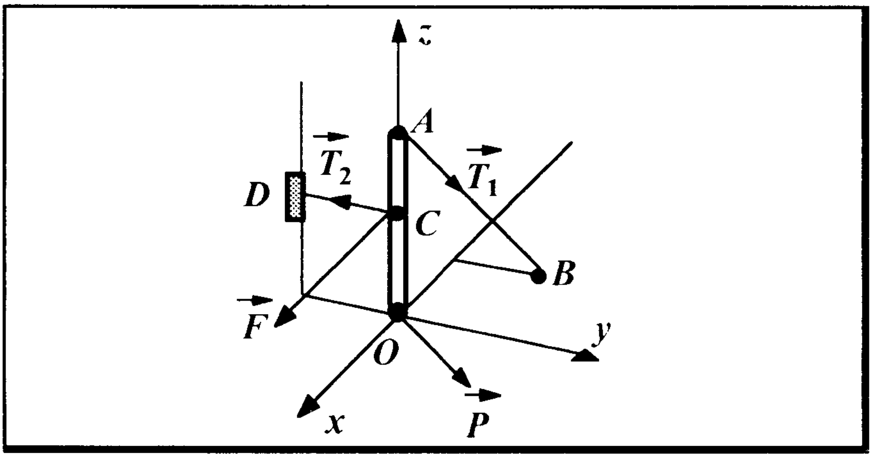
وذلك لأنه في حالة القوى المتلاقية في نقطة أو القوى المتوازية فإن الازدواج المحصل يكون منعدماً.

مثال 2.8 ذراع خفيفة AO طولها 10 أمتار، وضعت رأسياً منطبقة على محور ـ Z، بحيث ترتكز على مفصل كروي عند نقطة الأصل O.

تؤثر القوة $\vec{F} = 10\hat{i}$ في منتصف الذراع عند النقطة $C(0,0,5)$. ولحفظ توازن الذراع تم ربطها من المنتصف عند C إلى مقبض ثابت عند النقطة $D(0,-4,5)$ بواسطة الكابل CD، وربطها من نقطة $A(0,0,10)$ إلى الوتد الثابت عند النقطة $B(-4,4,0)$. أوجد الشدين في الكابلين، وكذلك مقدار رد فعل المفصل الكروي عند O.

الحل نفرض أن قوى الشد في الكابلين هما $\vec{T_1}, \vec{T_2}$، وأن رد فعل المفصل عند O هو القوة $\vec{P}$ المجهولة في المقدار والاتجاه. انظر شكل (2.16).

شكل 2.16



القوى المؤثرة على الذراع هي

$$\vec{F} = 10\hat{i},\ \ \vec{T_1} = T_1\hat{T}_1,\ \ \vec{T_2} = -T_2\hat{j},\ \ \vec{P}$$

وبما أن

$$\hat{T}_1 = \hat{AB} = \frac{-4\hat{i} + 4\hat{j} - 10\hat{k}}{\sqrt{132}} = \frac{-2\hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k}}{\sqrt{33}}$$

إذن القوى الأربع المؤثرة على الذراع هي

$$\vec{F} = 10\hat{i},\ \vec{T_1} = \frac{T_1}{\sqrt{33}}\left(-2\hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k}\right),\ \vec{T_2} = -T_2\hat{j},\ \vec{P}$$

بما أن عزم القوة $\vec{P}$ حول نقطة O يساوي صفراً لأن القوة تمر بالنقطة O، إذن فإن متجه العزم المحصل أو مجموع متجهات عزوم القوى الثلاث المعطاة حول نقطة الأصل O هو

$$\vec{Q_O} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 5 \\ 10 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \frac{T_1}{\sqrt{33}}\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 10 \\ -2 & 2 & -5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & -T_2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \left(50\hat{j}\right) + \frac{T_1}{\sqrt{33}}\left(-20\hat{i} - 20\hat{j}\right) + \left(5T_2\hat{i}\right)$$

أو

$$\vec{Q_O} = \left(-\frac{20T_1}{\sqrt{33}} + 5T_2\right)\hat{i} + \left(50 - \frac{20T_1}{\sqrt{33}}\right)\hat{j} \qquad \text{(ii)}$$

وبالتالي نجد من (2.27) أن

$$L = -\frac{20T_1}{\sqrt{33}} + 5T_2, \ M = 50 - \frac{20T_1}{\sqrt{33}}$$

وبما أن المجموعة متزنة، إذن من (2.70) نجد أن المركبتين L, M يجب أن تتلاشيا، إذن فإن

$$-\frac{20T_1}{\sqrt{33}} + 5T_2 = 0, \ 50 - \frac{20T_1}{\sqrt{33}} = 0$$

ومن هاتين المعادلتين نجد أن

$$T_1 = \frac{5\sqrt{33}}{2}, \quad T_2 = 10$$

أيضاً، بما أن المجموعة متزنة، إذن، من (2.70) نجد أن محصلة كل قوى المجموعة يجب أن تتلاشى، أي أن

$$10\hat{i} + \frac{T_1}{\sqrt{33}}\left(-2\hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k}\right) - T_2\hat{j} + \vec{P} = 0$$

وبالتالي فإن قوة رد فعل المفصل هي

$$\vec{P} = -10\hat{i} + \frac{5}{2}\left(-2\hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k}\right) + 10\hat{j} = -15\hat{i} + 15\hat{j} - \frac{25}{2}\hat{k}$$

إذن

$$P \approx 24.6$$

✍.

2.13 مسائل

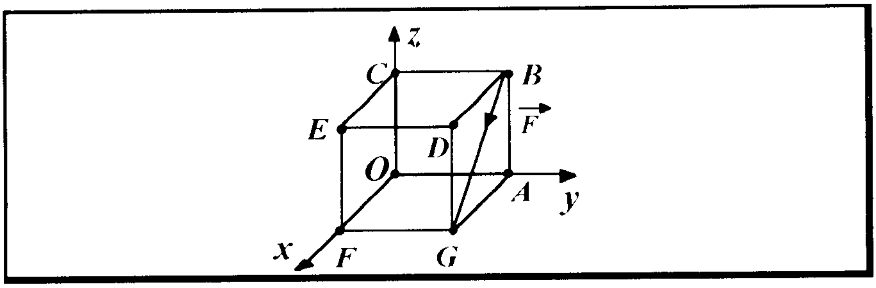
(1) إذا أثرت القوة $\vec{F} = 3\hat{i} - \hat{j} + 7\hat{k}$، في نقطة الأصل فما هو عزمها حول النقطة $P(4,4,6)$.

(2) أوجد العزم حول نقطة الأصل لقوة مقدارها 40 KN وتصنع زاوية 45° مع محور y وزاوية 60° مع محور z وتمر بالنقطة $(1,0,0)$.

(3) أوجد العزم حول النقطة $G(2,2,-3)$ لقوة مقدارها 4 وحدة نيوتن، و تمر بالنقطة $P(3,2,-1)$ وتتناسب جيوب تمام خط عملها مع $(2,3,1)$

(4) عين عزم القوة المؤثرة في المكعب كما في شكل (2.17) حول المحور EA.

شكل 2.17

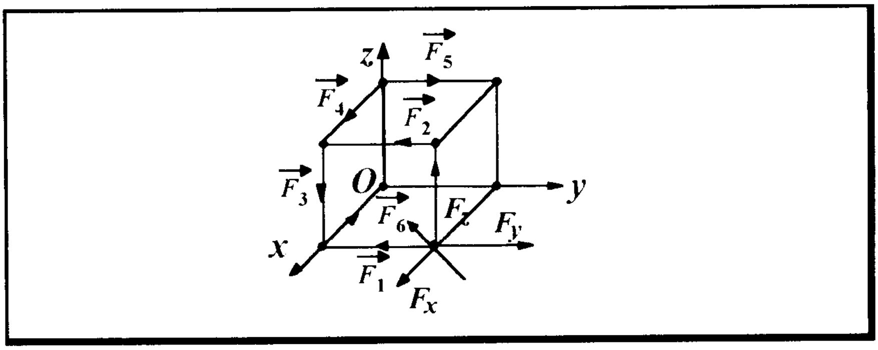


(5) أوجد متجه عزم القوة $\vec{E} = -\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$، والتي تؤثر في النقطة $(1,2,1)$ حول محور يمر بنقطة الأصل في اتجاه المتجه $\vec{B} = 2\hat{i} - 3\hat{k}$.

(6) اختزل فئة القوى المكونة من $\overrightarrow{F_1} = 10\hat{i}$ التي تمر بالنقطة $(0,1,0)$، والقوة $\overrightarrow{F_2} = 30\hat{k}$ التي تمر بالنقطة $(1,0,0)$ إلى قوة وازدواج عند نقطة الأصل.

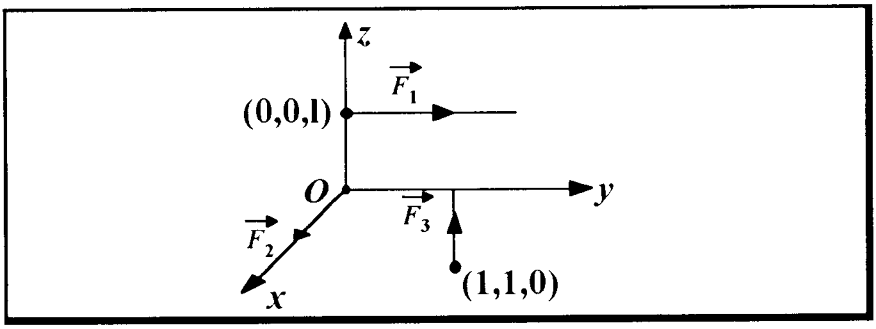
(7) فئة من القوىالفراغية تتكون من قوة $\overrightarrow{F_1}$ مقدارها F، وخط عملها ينطبق على محور OXــ في الاتجاه الموجب، وقوة $\overrightarrow{F_2}$ مقدارها $2F$ وتؤثر في المستقيم الذي يمر بالنقطة $(0,2,0)$ في اتجاه محور Z، وقوة $\overrightarrow{F_3}$ مجهولة المقدار خط عملها يمر بالنقطة $(2,2,0)$. أوجد شرط أن تؤول هذه المجموعة من القوى إلى قوة وحيدة، ثم احسب أقل مقدار للقوه $\overrightarrow{F_3}$.

(8) تؤثر خمس قوى فراغية $\{\overrightarrow{F_i}\}_{i=1}^{5}$ مقاديرها - على الترتيب - هي: $1,2,4,8,16$، بالإضافة إلى قوة مجهولة $\overrightarrow{F_6}$ كما في شكل (2.18). أوجد مقدار القوة $\overrightarrow{F_6}$ بحيث تؤول هذه القوى إلى قوة وحيدة.



شكل 2.18

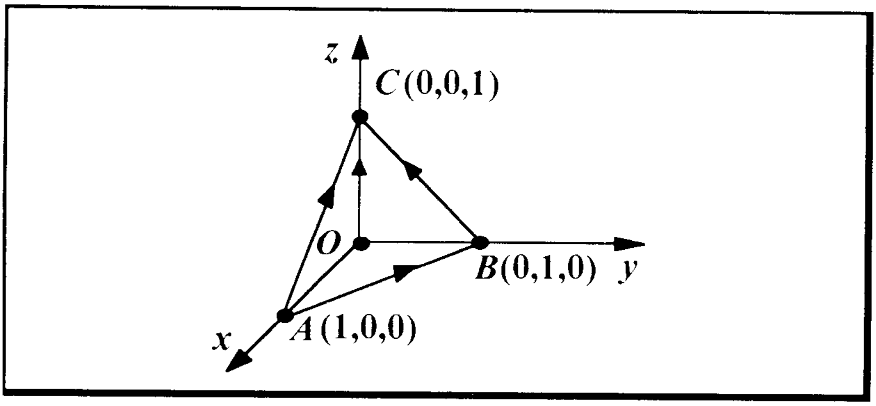
(9) تؤثر ثلاث قوى فراغية $\{\vec{F_i}\}_{i=1}^{3}$ متساوية، مقدار كل منها واحد نيوتن على جسم متماسك كما في شكل (2.19). اختزل فئة القوى إلى لولبية، وأوجد المعادلة القياسية لمحورها المركزي.



شكل 2.19

(10) تؤثر أربع قوى متساوية في الهرم الثلاثي $OABC$، حيث O هي نقطة الأصل كما في شكل (2.20). اختزل فئة القوى إلى لولبية، وأوجد المعادلة القياسية لمحورها المركزي.

شكل 2.20

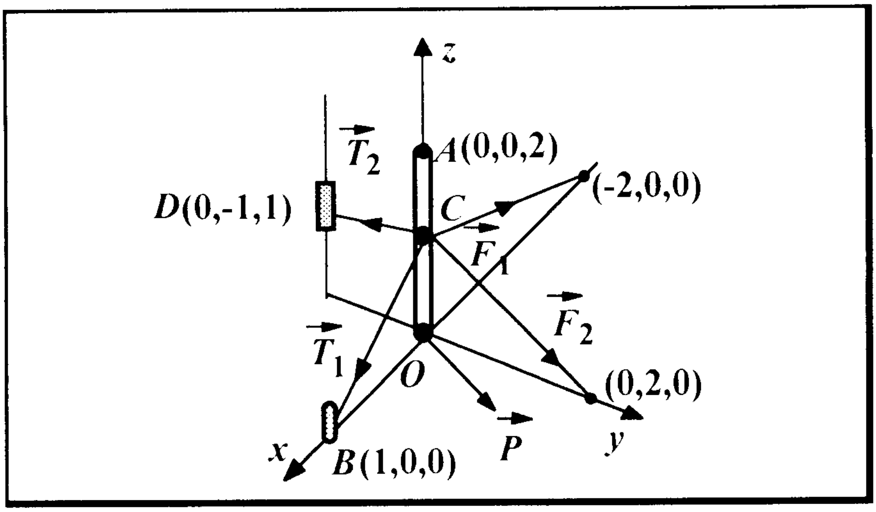


(11) ترتكز ذراع خفيفة AO طولها $10\,ft.$ على مفصل كروي عند نقطة الأصل O. لحفظ اتزان الذراع ربطت عند النقطة $B(5,0,0)$ بواسطة كابل CB طرفه الآخر مثبت عند النقطة $C(0,0,5)$، كما ربطت الذراع ـ أيضاً ـ عند النقطة $E(0,0,7)$ بواسطة كابل آخر DE طرفه الآخر مثبت عند النقطة $D(0,-5,7)$. تؤثر القوتان $\vec{F_1} = -F\hat{i},\ \ \vec{F_2} = 2F\hat{j}$ على الذراع عند النقطة C، اثبت أنه يجب أن يتحقق الشرط: $\frac{T_1}{T_2} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$ لكي تظل المجموعة متزنة.

(12) ترتكز ذراع خفيفة AO على مفصل كروي عند نقطة الأصل O. لحفظ اتزان الذراع ربطت عند النقطة B بواسطة كابل CB طرفه الآخر مثبت في منتصف الذراع عند C، كما ربطت الذراع ـ أيضاً ـ عند النقطة C بواسطة كابل آخر DC طرفه الآخر مثبت عند النقطة

D . تؤثر القوتـان $\vec{F_2}$ ، $\vec{F_1}$ المتسـاويتان في المقـدار علـى الـذراع عنـد النقطة C كما في شكل (2.21)، أوجد الشدين في الكابلين.

شكل 2.21



****

لاتؤجل عمل اليوم إلى الغد

Never put off till tomorrow what can be done today