الباب العاشر

الدالة فى متغيرين

تعريف :

يقال للكمية Z دالة فى المتغيرين المستقلين x, y اذا كان لكل زوج (x, y) من قيم المتغيرين تناظر قيمة واحدة للكمية Z .ويرمز للدالة Z فى المتغيرين المستقلين

$$Z = f(x, y) \quad \text{or} \quad Z = z(x, y)$$

امثلة محلولة Solved Problems

مثال :

مساحة المستطيل الذى طوله x وعرضه y تعطى بالعلاقة

$$z = x\,y$$

وبذلك تكون مساحة المستطيل دالة فى المتغيرين المستقلين x, y

نطاق الدالة فى متغيرين

نطاق الدالة للدالة فى متغيرين هى كل القيم (x, y) الحقيقية التى تعطى قيما حقيقية ونهائية ونهاية للدالة $Z = F(x, y)$.

مثال :اوجد مناطق تعريف الدالة $Z = x + y$

الحـــل :نلاحظ انه لجميع الازواج (x, y) توجد قيم حقيقية للمتغير Z

ولذلك فان نطاق الدالة فى كل القيم الموجودة فى المستوى X O Y

$$-\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty$$

مثال:

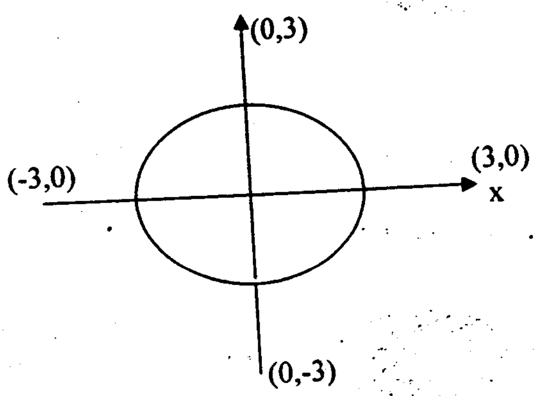
اوجد مناطق تعريف الدالة $Z = \sqrt{x^2 + y^2 - 9}$

الحـــل :

لكى يكون المقدار Z قيمة حقيقية لابد وان يكون

$$x^2 + y^2 - 9 \geq 0$$

$$x^2 + y^2 \geq 9$$



وتكون جميع الازواج (x, y) التى تحقق المتباينة السابقة خارج وعلى محيط الدائرة التى نصف قطرها 3 وحدات .

مثال :

ابحث نطاق الدالة $Z = \text{Ln}\,(x + y)$

الحـــــل :

نلاحظ ان الكمية Z تكون حقيقية اذا كان $x + y > 0$ وذلك لان

$$\text{Ln } 0 = -\infty$$

وهى كمية تخيلية وتكون جميع الازواج التى تحقق المتباينة اعلى الخط المستقيم $x + y = 0$. ومن الجدير بالذكر انه إذا كان :

$f(x,y) \geq 0$ فان $Z = \sqrt{f(x,y)}$

$F(x,y) \neq 0$ فان $Z = \dfrac{1}{\sqrt{f(x,y)}}$

$f(x,y) > 0$ فان $Z = \text{Ln}\{f,y)\}$

نهاية الدالة فى متغيرين

تعريف :

يقال ان العدد L هو نهاية الدالة $Z = f(x, y)$ عند النقطة (x_0, y_0) اذا كان لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث ان :

ويمكن التعبير عما سبق

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = L$$

ومن المعروف انه لاختيار نهاية دالة فى متغير واحد فاننا نوجد النهاية اليمنى واليسرى فان اقتربت من الجهتين نن نفس القيمة قيل ان النهاية موجودة وقيمتها هذه القيمة .

ولكن للدالة ذات متغيرين فعندما نكتب $(x,y)\to(x_0,y_0)$ فاننا نعنى اقتراب (x,y) من (x_0 , y_0) فى اى اتجاه وبذلك فان كانت قيمة

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$$

واحدة لكل الاتجاهات او المسارات ليست الى (x_0 , y_0) فان النهاية تكون غير موجودة .

امثلة محلولة Solved Problems

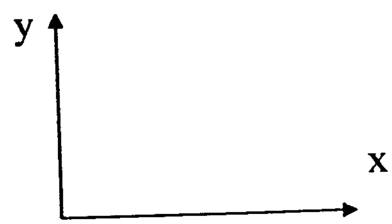
مثال : ابحث نهاية

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

الحل :سوف نحسب قيمة النهاية عند مسارات مختلفان فاذا اختلفت قيمة النهاية فى الحالتين فاننا نقول ان نهاية هذه الدالة غير موجودة .

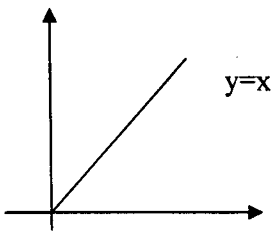
المسار الاول :

$$\lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{(x^2-0^2)}{x^2+0^2} = \lim_{(x,0)\to(0,0)} (x)^2 = 1$$



المسار الثاني :

$$\lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{x^2 - 0^2)}{x^2 + 0^2} = \lim_{(x,x)\to(0,0)} \frac{0}{2x^2} = 0$$



ونلاحظ ان النهاية غير موجودة وذلك قيمتها اختلفت من مسارين مختلفين.

مثال : ابحث النهاية الاتية :

$$Z = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x-y}$$

الحل :. بوضع $\mathbf{y = m\,x}$

$$Z = \lim_{x\to 0} \frac{x+mx}{x-mx} = \lim_{x\to 0} \frac{x(1+m)}{x(1-m)} = \frac{1+m}{1-m}$$

نلاحظ ان النهاية تعتمد على m ولذلك فان النهاية غير موجودة .

مثال : احسب قيمة النهاية

$$Z = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + 2y^2}$$

الحـــل : بوضع **$y = m\,x$**

$$Z = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + 2y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{3mx^3}{x^2(1+2m^2)}$$

نلاحظ ان النهاية لاتعتمد على قيمة m وبذلك يكون للدالة نهاية وهى 0

اتصال الدالة فى متغيرين

تعريف :

يقال للدالة $Z = f(x, y)$ فى متغيرين (x, y) دالة متصلة عند النقطة (x_0 , y_0) اذا كانت $f(x_0, y_0)$ معروفة وتساوى نهاية الدالة $f(x, y)$ عندما تقترب (x, y) من (x_0 , y_0) .

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

مثال : ابحث عن اتصال الدالة :

$$Z = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

عند النقطة $(0, 0)$

الحـــل :

نوجد اولا نهاية الدالة عند النقطة (0, 0) وذلك بوضع **y = m x**

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - m^2x^2}{x^2 + m^2x^2} = \frac{1 - m^2}{1 + m^2}$$

وبذلك فان نهاية الدالة تعتمد على m ولذلك فان الدالة غير متصلة .

مثال : ابحث اتصال الدالة :

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y = 0 \\ \dfrac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

الحـــل :

1- قيمة الدالة عند النقطة (0, 0) $f(0, 0) = 0$

2- ايجاد نهاية الدالة عند النقطة (0, 0) بوضع $y = m x$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - m^2x^2}{\sqrt{x^2 + m^2x^2}} = 0$$

وبذلك فان

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$$

∴ الدالة متصلة عند النقطة (0, 0) .

تمــــارين

1) بين اذا ما كانت Z دالة فى المتغيرات (x, y) فى الحالات الاتية :

a) $2x^2 + 3y^2 + 2z^2 = 4$

b) $\sin \; xy - 2z = -1$

c) $x^2 yz + 3z = 12$

2) اوجد مناطق تعريف الدوال الاتية مستخدما رسما ايضاحيا :

a) $f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$

b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$

c) $f(x, y) = \text{Ln}\,(2 - x - y)$

3) احسب قيمة النهايات الاتية وناقش اتصالها

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)} (x + 5y^2)$

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,4)} \dfrac{x + y}{x - y}$

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^2}$