الباب الحادى عشر

المشتقات الجزئية

Partial derivatives

<u>تعريف</u> :اذا كانت الدالة $Z = f(x, y)$ دالة فى متغيرين فـان المـشتقة التفاضلية الجزئية بالنسبة الى x تعرف على انها :

$$Z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

مع اعتبار y ثابت وبالمثل يمكن تعريف المشتقة التفاضلية الجزئية للدالة بالنسبة إلى المتغير y مع اعتبار x ثابت .

$$Z_x = \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

<u>المشتقات الجزئية العليا</u> :

اذا كانت الدالة $Z = f(x, y)$ وكانت المشتقات الجزئية الاولى لها Z_x , Z_y فاننا نعرف المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية لها .

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial y})$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x})$$

<u>نظرية</u> :

اذا كانت الدالةً $Z = f(x, y)$ متصلة وكان كل من $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ متصلة

وايضا فان

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

امثلة محلولة Solved Problems

<u>مثال</u> :

اذا كانت $Z = x^2 y^2 - 3x + 2x^3 y + 5$ فاوجد المشتقات الجزئية من الدرجة الاولى والثانية .

<u>الحـــل</u> :

$$z_x = 2xy^2 - 3 + 6x^2 y$$
$$z_{xx} = 2y^2 + 12xy$$
$$z_y = 2x^2 y + 2x^3$$
$$z_{yy} = 2x^2$$

$z_{xy} = 4xy + 6x^2$

$z_{yx} = 4xy + 6x^2$

من الملاحظ ان $z_{xy} = z_{yx}$ وذلك طبقا للنظرية السابقة

مثال :

اذا كانت $z = x^y$ فاوجد z_x , z_y

الحـل :

$z_x = yx^{y-1}$, $z_y = \ln x \cdot x^y$

مثال :

اوجد جميع المشتقات الجزئية للدالة $z = x^2 \sin y$

الحـل :

$z_x = 2x \sin y$, $z_{xx} = 2 \sin y$

$z_y = x^2 \cos y$, $z_{yy} = -x^2 \sin y$

$z_{xy} = z_{yx} = 2x \cos y$

مثال : اذا كان $z = e^x \sin y$

اثبت ان اولا :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

ثانيا :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

الحـــل :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x}\sin y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{x}\cos y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^{x}\cos y \qquad (1)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = e^{x}\cos y \qquad (2)$$

فى (1) ، (2) ثبت المطلوب اولا :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = e^{x}\sin y \qquad (3)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = -e^{x}\sin y \qquad (4)$$

فى (3) ، (4) ينتج ان :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^{x}\sin y + (-e^{x}\sin y) = 0$$

تمرين:

اذا كان $Z = \text{Ln}\,(x^2 + y^2)$ فاوجد : $Z_x , Z_y , Z_{xx}\ Z_{yy}$

التفاضل التام

Complete derivative

تعريف :

يعرف التفاضل التام للدالة $Z = f(x, y)$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

حيث Z_x , Z_y دوال متصلة .

Solved Problems امثلة محلولة

مثال :

اوجد التفاضل التام للدالة $z = x^3 + xy^2 + \sin xy$

الحـل :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + y^2 + y\cos xy$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2xy + x\cos xy$$

وبذلك يكون :

$$dz = (3x^2 + y^2 + y \cos xy)\, dx + (2xy + x \cos xy)dy$$

مشتقة الدوال الضمنية

اذا كانت $f(x, y)$ داله ضمنية فى المتغيرين x, y فان $df = 0$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx = -\frac{\partial f}{\partial y}dy$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\partial f / \partial x}{\partial f / \partial y}$$

$$-\frac{\partial f}{\partial y}dy \neq 0$$

وبذلك فانه يمكن ايجاد المشتقة الاولى للدالة الضمنية باستخدام التفاضل الجزئى .

مثال : اوجد $\frac{dy}{dx}$ اذا كانت $\mathbf{y^2 \cos\ y + 2x \sin y + 2xy = 3}$

اذا كانت $\mathbf{y^2 \cos\ y + 2x \sin y + 2xy = 3}$

الحـــل :

$$\mathbf{\cos y + 2x \sin y + 2xy - 3 = 0}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2\sin y + 2y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -y^2 \sin y + 2y\cos y + 2x$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2\sin y + 2y}{-y^2 \sin y + 2y\cos y + 2x\cos y + 2x}$$

مثال :اذا كانت $y^x - x^y = 5$ اوجد $\frac{dy}{dx}$

الحـــل :

$$f(x, y) = y^2 - x^2 - 5 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = Lny.y^x - yx^{y-1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = yx^{y-1} - Lnx.x^y$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{Lny.y^x - yx^{y-1}}{xy^{x-1} - Lnx.x^y}$$

تماريـــــن

1- فى كل من الدوال الاتية اوجد :

(a $Z = e^{3x} \cos y$

(b $Z = e^{3x} + \cos x^2 y$

(c $Z = e^x \sinh y + \cos(2x - 3y) + Ln(x + 3y)$

(d $Z = (\sin x)^{\tan y}$

2- اذا كان $Z = (ax + by)^3 + \tanh(ax\, by) + e^{ax + by}$

اوجد : $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$

ثم اثبت ان :
$$b\frac{\partial z}{\partial x} = a\frac{\partial z}{\partial y}$$

3- اوجد , $\frac{dy}{dx}$ اذا كانت

a) $(\cos x)^y + y^{Ln} = 2y$

b) $(\sin^{-1} x)^{\tan y} = (\sec y)^x$

قاعدة السلسلة

اذا كانت $z = f(x, y)$ وكان كل من x, y دوال فى المتغير t وبذلك $x = x(t),\ y = y(t)$ فان التفاضل التام $\frac{dz}{dt}$ للدالة Z يعطى بالعلاقة .

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x},\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}.\frac{dy}{dt}$$

كذلك امتداد لقاعدة السلسلة للتفاضل الجزئى

اذا كان $Z = f(x, y)$ وكان كل من x, y دوال فى المتغيرين (u, v)

$$\mathbf{x = x(u, v)} \quad , \quad \mathbf{y = y(u, v)}$$

فان

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial v}$$

Solved Problems امثلة محلولة

مثال : اوجد $\frac{dz}{dt}$ اذا كانت $z = x^3 + y^3$

$$x = e^{t^2}, \qquad y = \sin 2t$$

الحـــل : فى قاعدة السلسلة

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} , \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} . \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2$$

$$\frac{dx}{dt} = 2te^{t^2}, \qquad \frac{dx}{dt} = 2\cos 2t$$

$$\therefore \frac{dz}{dt} = 6x^2 te^{t^2} + 6y^2 \cos 2t$$

وبالتعويض عن

$$x = e^{t^2},$$
$$y = \sin 2t$$

مثال:

اذا كانت $Z = Ln(x^2 + 3y)$ وكانت

$$\mathbf{X = (u^2 + v)^3 \qquad , \qquad y = \sin u}$$

فاوجد : $\frac{\partial z}{\partial v}, \frac{\partial x}{\partial u}$

الحـــل :

فى قاعدة السلسلة

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial v}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+3y}.\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{3}{x^2+3y}$$

$$\frac{\partial x}{\partial u}=3(u^2+v)^2.2u,\frac{\partial x}{\partial v}=3(u^2+v)^2$$

$$\frac{\partial y}{\partial u}=\cos u.\frac{\partial y}{\partial v}=0$$

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{6x}{x^2+3y}(u^2+v)^2.2u+\frac{3}{x^3+3y}\cos u$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{6x}{x^2+3y}(u^2+v)^2+\frac{3}{x^3+3y}.0$$

وبالتعويض عن قيم x, y بدلالة (u, v)

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{6x}{x^2+3y}(u^2+v)^2.2u+\frac{3}{x^3+3y}\cos u$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{6(u^2+v)^5}{(x^2+v)^6+3\sin u}$$

مثال :اذا كان $z=f(x, y)$ وكان

$x = r\cos\theta \quad , \quad y = r\sin\theta$

اثبت ان :

$$z_r = z_x \cos\theta + z_y \sin\theta$$

$$\frac{1}{r} z_0 = -z_x \sin\theta + z_y \cos\theta$$

الحــــل :

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta \quad . \quad \frac{\partial x}{\partial \theta} = r\sin\theta$$

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta \quad . \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos\theta + \frac{\partial z}{\partial y} \sin\theta$$

وهو المطلوب اولا :

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x} (-r\sin\theta) + \frac{\partial z}{\partial y} r\cos\theta$$

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x} \sin\theta + \frac{\partial z}{\partial y} \cos\theta$$

وهو المطلوب ثانيا :

مثال :اذا كانت $Z = u + x^2$

وكانت $v = Ln\,(x + y)$, $u = x^2 + \sin y$

فاوجد : $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$

<u>الحـــل</u> :

من قاعدة السلسلة

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}.\frac{\partial y}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}.\frac{\partial y}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \cos y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 1 \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial v} = 2v$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{x + y} \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{x + y}$$

النهايات العظمى والصغرى لدالة فى متغيرين

<u>تعريف</u> :

يقال للدالة $z = f(x, y)$ نهاية عظمى عند النقطة (a, b) اذا كان

$$\mathbf{f(a, b) > f(x, y)}$$

وذلك لجميع النقط (x, y) القريبة قربا كافيا من النقط (a, b)

ويقال للدالة $z = (x, y)$ نهاية صغرى هند النقطة (a, b) اذا كان :

$$f(a, b) < f(x, y)$$

وذلك لجميع النقط (x, y) القريبة قلابا كافيا من النقط (a, b) .

بفرض ان الدالة $z = f(x, y)$ لها نهاية عظمى او صغرى عند النقطة (a, b) .

فان كلا من التفاضل $f_x(a, b)$, $f_y(a, b)$ ينعدم أو يكون غير موجود

$$f_x(a, b) = 0 ,$$
$$f_y(a, b) = 0$$

غير موجود $f_x(a, b)$ or $f_y(a, b)$

وتسمى النقطة التى تنعدم عندها المشتقات الجزئية الاولى بالنقطة الحرجة .

<u>نظرية</u> :

اذا كانت الدالة $z = f(x, y)$ لها تفاضلات جزئية حتى الرتبة الثانية ومتصلة فى نطاق تعريفها والذى يحتوى النقطة (a, b) والتى عندها

$$f_x(a, b) = 0 \quad , \quad f_y(a, b) = 0$$

فانه للقيم $x = a$, $y = b$ يكون :

1- للدالة $z = f(x, y)$ نهاية عظمى اذا كان :

$$f_{xx}(a, b) \,.\, f_{yy}(a, b) - [f_{xx}(a, b)]^2 > 0$$
$$f_{xx}(a, b) > 0$$

2- للدالة $z = f(x, y)$ نهاية صغرى اذا كان :

$$f_{xx}(a, b) \,.\, f_{yy}(a, b) - [f_{xx}(a, b)]^2 > 0$$
$$f_{xx}(a, b) < 0$$

3- للدالة $z = f(x, y)$ نهاية عظمى ولا صغرى اذا كان :

$$f_{xx}(a, b) \,.\, f_{yy}(a, b) - [f_{xx}(a, b)]^2 < 0$$

4- يفشل الاختيار اذا كان

$$f_{xx}(a, b) \,.\, f_{yy}(a, b) - [f_{xx}(a, b)]^2 = 0$$

Solved Problems امثلة محلولة

مثال :

اوجد النهايات العظمى والصغرى للدالة

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

الحـــل :

1- نوجد اولا النقط الحرجة للدالة $f(x, y)$

$$f_x = 3x^2 - 3y = 0$$
$$f_y = 3x^2 - 3y = 0$$

بحل المعادلتين نجد ان النقط الحرجة هى $(0, 0), (1, 1)$.

ايجاد التفاضلات الجزئية من الرتبة الثانية

$$f_{xx} = 6x \quad f_{yy} = 6x \quad f_{xy} = -3$$

$$f_{xx}(0, 0) = 0 \quad f_{yy}(0, 0) = 0 \quad f_{xy}(0, 0) = -3$$

$$f_{xx}(1, 1) = 6 \quad f_{yy}(1, 1) = 6 \quad f_{xy}(1, 1) = -3$$

دراسة النقط الحرجة $(0, 0)$

$$\mathbf{f_{xx}(0, 0) \ , \ f_{yy}(0, 0) - [f_{xy}(0, 0)]^2}$$
$$\mathbf{= (0) \ , \ (0) - (-3)^2 = -9 < 0}$$

وبذلك لا يكون للدالة $f(x, y)$ عند النقطة $(0, 0)$ نهاية عظمى ولا صغرى عند النقطة $(1, 1)$ نجد أن :

$$\mathbf{f_{xx}(1, 1) \ , \ f_{yy}(1, 1) - [f_{xy}(1, 1)]^2}$$
$$\mathbf{= 6 \ . \ 6 - (-3)^2 = 36 - 9 = 27 > 0}$$
$$\mathbf{f_{xx}(1, 1) = 6 > 0}$$

اذن للدالة نهاية عظمى عند النقطة $(1, 1)$.

* * *