

الباب الثالث

النهايات وأتصال الدوال

Limited & continuity of Functions

مفهوم نهاية الدالة واحد من أهم المفاهيم الأساسية التى تفرق بين علم التفاضل عن بالقى علوم الرياضيات الاخرى مثل الهندسة والجبر .
أولا : نهاية الدالة :

فى علم التفاضل وتطبيقاته غالبا مانهتم بتعيين قيم $f(x)$ للدالة f عندما يقترب المتغير المستقل x من عدد معين a . ولكن ليس من الضرورى أن يساويه . فى واقع الامر غالبا ما يكون هذا العدد a خارج نطاق تعريف الدالة أى أن $f(a)$ غير معرفة .
والان دعنا نطرح السؤال الاتى :

- عندما x تقترب بدرجة كافية من العدد a ($x \neq a$) هل تقترب $f(x)$ من عدد معين وليكن L ؟

إذا كانت الاجابة بنعم فانه يقال ان نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من a تساوى L . ونرمز لذلك كالاتى :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \quad (I)$$

والان سوف نوضح هذا المعنى هندسيا .

الخط المماس l عند نقطة P على دائرة يمكن تعريفه على انه الخط الذي يشترك مع الدائرة في نقطة واحدة كما هو موضح فى شكل (1) .

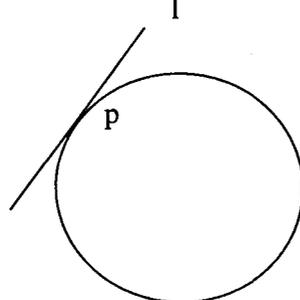


Fig. 1

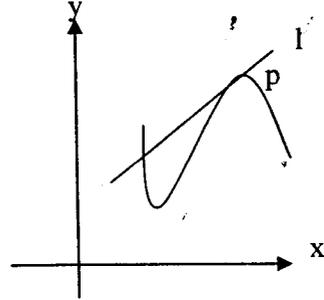


Fig. 2

هذا التعريف لا يكون صحيحا لأى منحنى لأن الخط المماس يمكن أن يقطع منحنى الدالة عدة مرات كما فى شكل (2) .

لتعريف الخط المماسى l عند نقطة P على المنحنى يكفى ذكر ميل الخط m لان ذلك يحدد تماما الخط l .

وللوصول الى ميل الخط m سوف نبدأ باختيار أى نقطة أخرى ولتكن Q على المنحنى ونعتبر الخط الواصل بين P, Q كما فى شكل (3-a) ويسمى هذا الخط بالخط القاطع للمنحنى (secant line) .

وسوف نتابع تغير هذا الخط كلما زادت نقطة Q قربا من P . اذا كانت Q تقترب من P من جهة اليمين سوف يكون عندنا الوضع كما فى شكل (3-b) .

حيث الخطوط المتقطعة تبين المواضع المختلفة لهذا الخط القاطع وهي

تبين أنه إذا كانت Q قريب من P فإن الميل m_{PQ} للخط

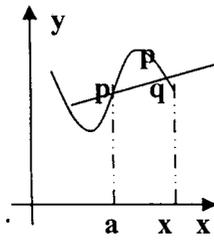
القاطع يكون قريبا من الميل m للخط المماسي l شكل (3-c) يوضح

نفس المعنى ولكن عندما تقرب Q من جهة اليسار من النقطة P .

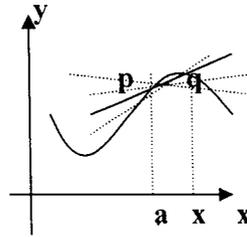
بهذا يمكننا القول أنه إذا كان ميل الخط القاطع m_{PQ} يأخذ قيمة محددة

عندما Q تقرب من P فإن هذه القيمة تعرف بأنها ميل الخط المماسي l

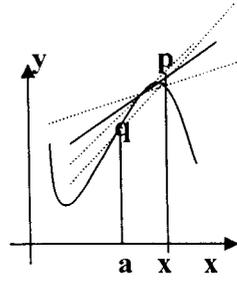
عند النقطة P .



(3-a)



(3-b)



(3-c)

إذا كان الاحداثي السيني للنقطة P هو a والاحداثي السيني للنقطة Q

هو x فإن الجملة " Q تقترب من P " يمكن استبدالها بـ " x تقترب من

a " وهذا يقودنا الى تعريف ميل الخط المماسي (2)

$$m = \lim_{x \rightarrow a} m_{PQ}$$

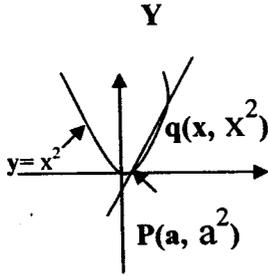
من المهم أن نلاحظ أن $x \neq a$ خلال هذه العملية .
 في الحقيقة إذا كانت $x = a$ فإن $P = Q$ ويكون m_{PQ} لا وجود له .

أمثلة محلولة Solved Problems

مثال :

إذا كان a أي عدد حقيقي استخدم التعريف السابق لإيجاد ميل الخط
 المماسي للمنحنى $y = x^2$ عند النقطة $P(a, a^2)$ ثم أوجد معادلة
 الخط المماسي l للمنحنى عند النقطة $(3/2, 9/4)$.

الحل : منحنى الدالة موضح بالرسم من تعريف الميل



بواسطة نقطتين على الخط المستقيم نجد أن

$$m_{PQ} = \frac{x^2 - a^2}{x - a}$$

ميل PQ هو

وباستخدام التعريف

$$m = \lim_{x \rightarrow a} m_{PQ} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a}$$

بما ان $x - a \neq 0$ وبالتالي فان

$$m = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)(x+a)}{(x-a)}$$

$$m = \lim_{x \rightarrow a} (x+a) = 2a$$

لايجاد معادلة المماسى عند النقطة $(3/2, 9/4)$ نجد ان $a = 3/2$

أى أن

$$M = 2 (3/2) = 3$$

∴ معادلة الخط المماسى l عند هذه النقطة هي

$$y - 9/4 = 3 (x - 3/2)$$

$$12x - 4y - 9 = 0.$$

وللوصول الى التعريف العام لنهاية دالة عندما يؤول المتغير المستقل x

الى قيمة معينة بحيث تكون الدالة غير معرفة عندها (أو معرفة)

مثال

$$f(x) = \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1}, x \neq 1$$

نفرض الدالة

نلاحظ ان الدالة غير معرفة عند $x = 1$ ولذلك سوف نحاول ايجاد قيمة

الدالة عندما تقترب x من 1 ولكن $x \neq 1$ اى نجعل x تأخذ قيما متتابعة

اصغر من أو أكبر من 1 ولكنها قريبة جدا من 1 كما فى

الجدولين التاليين:

x	f(x)
0.9	4.8
0.99	4.98
0.999	4.998
0.9999	4.9998
0.99999	4.99998

x	f(x)
1.1	5.2
1.01	5.02
1.001	5.002
1.0001	5.0002
1.00001	5.00002

نلاحظ ان قيمة الدالة تقترب من العدد 5 عندما تقترب x من العدد 1 ،

لذلك سوف نكون العبارات التالية:

$$\begin{array}{ll} \text{If } 4.8 < f(x) < 5.2 & 0.9 < x < 1.1 \\ 4.98 < f(x) < 5.02 & 0.99 < x < 1.101 \\ 4.998 < f(x) < 5.002 & 0.999 < x < 1.001 \\ 4.9998 < f(x) < 5.0002 & 0.9999 < x < 1.0001 \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{array}$$

باستخدام العددين الحقيقيين الموجبين $\delta > 0, \varepsilon > 0$ فنجد ان كل هذه

العبارات تعنى ان

$$\text{If } 1 - \delta < x < 1 + \delta, \quad \text{then } 5 - \varepsilon < f(x) < 5 + \varepsilon \quad (4)$$

$$\delta = 0.1, \varepsilon = 0.2$$

فمثلا فى العبارة الاولى نجد ان

والعبارة الثانية نجد ان

$$\delta = 0.01, \varepsilon = 0.02$$

$$\delta = 0.001, \varepsilon = 0.002$$

العبارة الثالثة نجد ان

وهكذا .

ومن الواضح ان العبارة (4) يمكن وضعها على الصورة

$$\text{If } -\delta < x < \delta, \quad \text{then } -\varepsilon < f(x) - 5 < \varepsilon \quad (5)$$

باستخدام القيمة المطلقة يمكننا وضعها على الصورة

$$|x - 1| < \delta, \quad \text{then } |f(x) - 5| < \varepsilon \quad (6)$$

وبما ان $f(x)$ غير معرفة عندما $x = 1$ فيجب اضافة الشرط ان $x \neq 1$

اي نضع

$$\text{If } 0 < |x - 1| < \delta, \quad \text{then } |f(x) - 5| < \varepsilon \quad (7)$$

من التحليل السابق

$$\text{If } 0 < |x - 1| < 0.1, \quad \text{then } |f(x) - 5| < 0.2$$

$$\delta = 0.1, \varepsilon = 0.2 \quad \text{وذلك بوضع}$$

$$\text{If } 0 < |x - 1| < 0.001, \quad \text{then } |f(x) - 5| < 0.002$$

$$\delta = 0.001, \varepsilon = 0.002 \quad \text{وذلك بوضع}$$

وهكذا يمكننا اعطاء ε اى كمية صغيرة نحصل على الكمية المناظرة

للمقدار الصغير δ بحيث تتحقق العلاقة

$$\text{If } 0 < |x - 1| < \delta, \quad \text{then } |f(x) - 5| < \varepsilon$$

فاننا نقول ان نهاية الدالة $f(x)$ عندما x تقترب من العدد 1 تساوى 5

ونكتب ذلك كالاتى

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5$$

والان يمكننا اعطاء التعريف العام لنهاية دالة .

تعريف (1) (نهاية الدالة)

بفرض أن f دالة معرفة على الفترة المفتوحة I التى تحتوى العدد a

مع احتمال عدم تعريفها عند a نفسها ، وبفرض ان L عدد حقيقى

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

فالعبرة

تعنى ان لاي $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ يعتمد على ε بحيث يكون

$$\text{If } 0 < |x - a| < \delta, \text{ then } |f(x) - L| < \varepsilon \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

اذا كانت

فانه يقال ان نهاية الدالة $f(x)$ عندما تؤول x الى a هى L .

ملاحظة :

العبرة $|f(x) - L| < \varepsilon$ تعنى ان $f(x) \in N(L, \varepsilon)$ أى تقع فى الجوار

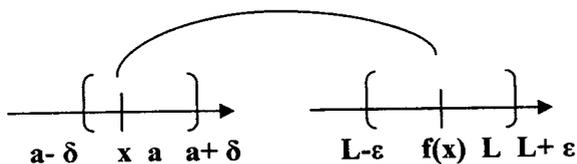
$N(L, \varepsilon)$ وايضا $|x - a| < \delta$ تعنى ان $x \in N(a, \delta)$ بذلك يمكن إعادة

صياغة تعريف نهاية الدالة على النحو التالى :

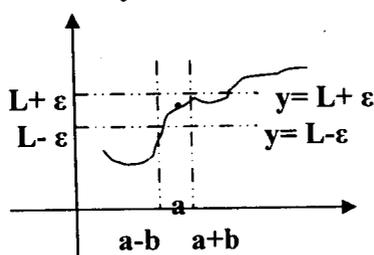
تعريف (2) : يقال أن

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

إذا كان لكل $\varepsilon > 0$ فإنه يوجد $\delta(\varepsilon) > 0$ بحيث
 $f(x) \in N(L, \varepsilon)$ for every $x \in N(a, \delta)$ (9)



الرسم التالي يوضح مفهوم النهاية



$$\lim f(x) = L$$

ملاحظات :

1- من التعريف السابق نجد ان الدالة $f(x)$ تؤول الى النهاية L عندما
 x تؤول الى a ولكن هذه الدالة من الممكن الا تكون معرفة عند
 $x = a$ ، معنى ذلك ان وجود نهاية للدالة عند نقطة معينة ليس
معناه ان الدالة معرفة عند هذه النقطة ولكن عموما عند وجود
نهاية للدالة عند نقطة معينة ولتكن a تكون الدالة معرفة فى أى
جوار لهذه النقطة a وليس من الضروري ان تكون معرفة عند a
نفسها .

2- التعريف السابق لايمكننا من تعريف نهاية دالة عند عدد معين ولكن يمكننا فقط من اثبات ان هذه النهاية صحيحة .

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \quad \text{-3 إذا كان}$$

فإذا وضعنا $x = a + h$ فان $h \rightarrow 0$ as $x \rightarrow a$,

$$\therefore \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \quad \text{iff} \quad \lim_{h \rightarrow 0} f(a + h) = L$$

أمثلة محلولة Solved Problems

مثال

$$f(x) \in N(4, \varepsilon), f(x) = 3x + 7 \quad \text{إذا كانت}$$

$$\text{لكل } x \in N(-1, 0.1) \text{ اوجد } \varepsilon.$$

الحل :

$$f(x) \in N(4, \varepsilon)$$

تعنى ان

$$|(3x + 7) - 4| < \varepsilon$$

$$\text{i.e. } |3x + 3| < \varepsilon; 3|x + 1| < \varepsilon$$

أى أن

$$|x + 1| < \varepsilon/3$$

(i)

ولكن معطى ان

$$x \in N(-1, 0.1), \text{ then } |x - (-1)| < 0.1$$

$$|x + 1| < 0.1 \quad (ii)$$

$$\varepsilon/3 = 0.1 \Rightarrow \varepsilon = 0.3 \quad \text{من (i), (ii) نستنتج ان}$$

مثال: باستخدام التعريف اثبت ان

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} = 1$$

الحل: باستخدام التعريف نجد ان

$$\left| \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} - 1 \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)} - 1 \right| < \varepsilon$$

$$\therefore |x - 2 - 1| < \varepsilon \Rightarrow |x - 3| < \varepsilon \quad (1)$$

$$\forall |x - 3| < \delta \quad (2)$$

وبوضع $\varepsilon = \delta$ من (1),(2) نحصل على

$$\text{i.e } \lim_{x \rightarrow \delta} f(x) = 1$$

أمثلة محلولة Solved Problems

2- نظريات على النهايات Theorems on limits

لايجاد نهاية دالة عندما يؤول المتغير المستقل إلى عدد معين سوف

نستخدم نظريات النهايات وذلك لانه كما سبق وان ذكرنا فان التعريف

لايمكننا من ايجاد هذه النهاية .

نظرية (1) إذا كان a, c عددين حقيقيين فإن :

$$\lim_{x \rightarrow a} c = c \quad (10)$$

أى أن نهاية المقدار الثابت هي نفس المقدار الثابت

$$\lim_{x \rightarrow 2} 8 = 8, \quad \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{2} = \sqrt{2}, \dots$$

نظرية (2) إذا كان a, b, m اعداد حقيقية فإن

$$\lim_{x \rightarrow a} (mx + b) = ma + b \quad (11)$$

$$* \lim_{x \rightarrow a} x = a$$

$$* \lim_{x \rightarrow 4} (3x - 5) = 3(4) - 5 = 7$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (13x + \sqrt{2}) = 13\sqrt{2} + \sqrt{2} = 14\sqrt{2}$$

نظرية (3) :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$$

إذا كانت

فإن

$$(i) \quad \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = L \pm M \quad (12)$$

$$(ii) \quad \lim_{x \rightarrow a} [f(x).g(x)] = M.L \quad (13)$$

$$(iii) \quad \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{L}{M}; M \neq 0 \quad (14)$$

أمثلة محلولة Solved Problems

مثال: اوجد

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x + 4}{5x + 7}$$

الحل:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x + 4}{5x + 7} = \frac{3(2) + 4}{5(2) + 7} = 10/17$$

نظرية (4):

$$\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = [\lim_{x \rightarrow a} f(x)]^n \quad (15)$$

بفرض ان $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ موجودة .

نظرية (5):

إذا كانت f دالة كثيرة حدود وكان a عدد حقيقي فان

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \quad (16)$$

مثال: اوجد

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{5x^2 - 2x + 1}{6x - 7}$$

الحل :

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{5x^2 - 2x + 1}{6x - 7} = \frac{5(3)^2 - 2(3) + 1}{6(3) - 7} \\ = \frac{45 - 6 + 1}{18 - 7} = \frac{40}{11}$$

نظرية (6) :

إذا كان $a < 0$ وكان n عدد صحيح موجب
أو إذا كان $a \leq 0$ وكان n عدد صحيح فردي فإن

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a} \quad (17)$$

نظرية (7) :

إذا كانت الدالة f لها نهاية عندما x تقرب من a فإن

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} \quad (18)$$

وبفرض ان n عدد زوجي او عدد فردي

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) > 0$$

مثال: أوجد

$$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x^{2/3} + 3\sqrt{x}}{4 - (16/x)}$$

الحل :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x^{2/3} + 3\sqrt{x}}{4 - (16/x)} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 8} (x^{2/3} + 3\sqrt{x})}{\lim_{x \rightarrow 8} (4 - 16/x)} \\ &= \frac{(8)^{2/3} + 3\sqrt{8}}{4 - (16/8)} = \frac{4 + 6\sqrt{2}}{4 - 2} = 2 + 3\sqrt{2}\end{aligned}$$

مثال: أوجد

$$\lim_{x \rightarrow 5} \sqrt[3]{x^2 - 4x + 9}$$

الحل:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 5} \sqrt[3]{x^2 - 4x + 9} &= \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow 5} (x^2 - 4x + 9)} \\ &= \sqrt[3]{75 - 20 + 9} = \sqrt[3]{64} = 4\end{aligned}$$

مثال: أوجد

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{\frac{x^3 + 2x + 3}{x^2 + 5}}$$

الحل:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{\frac{x^3 + 2x + 3}{x^2 + 5}} = \sqrt{\frac{8 + 4 + 3}{4 + 5}} = \frac{\sqrt{15}}{3}$$

نظرية (8):

The Sandwich Theorem

إذا كانت $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ لكل قيم x فى الفترة المفتوحة I

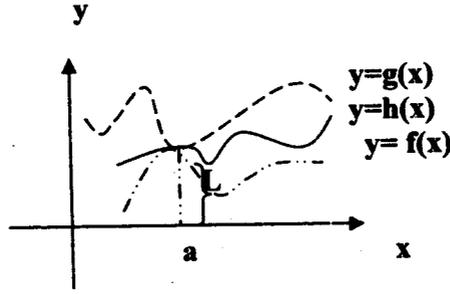
التي تحتوى العدد a مع احتمال عدم تحقق ذلك عند a نفسها وكان

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow a} g(x) \quad (19)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$$

فان

الشكل التالى يوضح النظرية :



ملاحظات :

1- اذا كانت f دالة كسرية جبرية وكان المطلوب هو ايجاد النهاية $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ نتبع الخطوات التالية :

نوجد $f(a)$ فنحصل على احدى الحالات الاتية :

$$(i) \quad f(a) = \frac{\text{real number}}{\text{real number} \neq 0} \quad , \quad \text{فى هذه الحالة تكون نهاية الدالة هى}$$

$f(a)$ التى حصلنا عليها كما فى الامثلة السابقة .

$$(ii) \quad f(a) = \frac{\text{real number} \neq 0}{\text{zero}} \quad \text{فى هذه الحالة ليس للدالة نهاية عندما}$$

$x \rightarrow a$ ويقال النهاية غير موجودة .

$$(iii) \quad f(a) = \frac{\text{zero}}{\text{zero}} \quad \text{فى هذه الحالة تكون } x = a \text{ احد جذور كثيرتى}$$

الحدود فى كل من البسط والمقام لذلك يجب ان نأخذ $(x - a)$

عاملا مشتركا من كل من البسط والمقام ، بما ان $x \neq a$ فيمكننا ان نقسم كل من البسط والمقام على $(x - a)$. بذلك نحصل على دالة جديدة (من الممكن ان تكون كسرية) ولتكن $g(x)$ ثم نوجد $g(x)$ للحصول على النهاية المطلوبة عندما $x \rightarrow a$ فاذا وجدنا ان $g(a) = \frac{\text{zero}}{\text{zero}}$ مرة اخرى فاننا نكرر العملية السابقة حتى نحصل على احدى الحالتين (i) أو (ii) .

(2) اذا احتوى البسط أو المقام أو كليهما على مقدار على الصورة

$$(\sqrt{f(x)} \pm b) \text{ or } (\sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)})$$

لايجاد نهاية الكسر عندما $x \rightarrow a$ فاننا نضرب كل من البسط والمقام

في مرافق هذا المقدار

$$(\sqrt{f(x)} \pm b) \text{ or } (\sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)})$$

وبعد تبسيط الكسر نأخذ النهاية عندما $x \rightarrow a$ كما سوف يتضح من

الامثلة التالية :

امثلة محلولة Solved Problems

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{x + 1}$$

مثال: اوجد

الحل :

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{x + 1} = \frac{1 - 2 + 1}{-1 + 1} = \frac{0}{0}$$

∴ نحل البسط للحصول على $(x + 1)$ عاملا مشتركا فنجد أن

$$\begin{aligned}x^4 - 2x^2 + 1 &= (x^2 - 1)^2 = (x^2 - 1)(x^2 - 1) \\ &= (x - 1)(x + 1)(x - 1)(x + 1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{x + 1} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)(x + 1)(x - 1)^2}{(x + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} (x - 1)^2 (x + 1) = 0\end{aligned}$$

مثال: أوجد

$$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^4 + 2x^2 + 1}{x + 4}$$

الحل:

$$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^4 + 2x^2 + 1}{x + 4} = \frac{256 + 23 + 1}{-4 + 4} = \frac{579}{0}$$

∴ لا توجد نهاية لهذه الدالة عندما $x \rightarrow -4$

مثال: أوجد نهايات الدوال الآتية

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9} - 3}{x^2 + 2x}$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{2x}$$

$$(iii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{\sqrt{x+6} - 3}$$

الخط: بالضرب في مرافق البسط

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+9}-3)(\sqrt{x+9}+3)}{x(x+2)(\sqrt{x+9}+3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+9-9}{x(x+2)(\sqrt{x+9}+3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(x+2)(\sqrt{x+9}+3)}$$

$$= \frac{1}{(2)(\sqrt{9}+3)} = \frac{1}{12}$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{2x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)-(1-x)}{2x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{2x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = \frac{1}{2}$$

$$(iii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x+6}-3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)(\sqrt{x+6}+3)}{(\sqrt{x+6}-3)(\sqrt{x+1}+2)(\sqrt{x+6}+3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1-4)(\sqrt{x+6}+3)}{(x+6-9)(\sqrt{x+1}+2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+6}+3}{\sqrt{x+1}+2} = \frac{3+3}{2+2} = \frac{3}{2}$$

نظرية (9) : اذا كان a عدد حقيقي ، n عدد صحيح $n \neq 0$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}, n \neq 0 \quad (20)$$

نتيجة : إذا كانت m, n اعداد حقيقية لا تساوى الصفر فان :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x^m - a^m} = \frac{n}{m} a^{n-m}, n, m \neq 0$$

مثال : اوجد النهايات الاتية

الحل :

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{32(x^5 - 1/3)}{2(x - 1/2)} &= 16 \lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{x^5 - (1/2)^5}{x - (1/2)} \\ &= 16 \cdot 5(1/2)^{5-1} = 5(1/2)^4 (16) \\ &= \frac{5}{16} (16) = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9} &= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{(x)^{1/2} - (9)^{1/2}}{x - 9} \\ &= \frac{1/2}{1} (9)^{1/2-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{9}} \right) = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

تمارين

باستخدام تعريف النهاية اثبت أن :

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} (2x + 3) = 5$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} = 1$$

4) اذا كانت الدالة $f(x)$ معرفة كالاتى

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1, & x \neq 0 \\ 4, & x = 0 \end{cases}$$

اثبت باستخدام التعريف أن $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 7$

* * *