الباب الرابع

نهايات الدوال المثلثية

Limits of the triangle functions

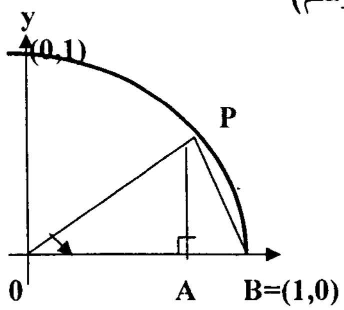
فى هذا الفصل سوف نقدم مفهوم نهايات الدوال المثلثية من خلال الامثلة التالية:

Solved Problems امثلة محلولة

مثال: اثبت ان $\lim_{x \to 0} \sin x = 0$

البرهان : نفرض ان $0 < x < 1$

نأخذ دائرة نصف قطرها الوحدة ومركزها (0) بفرض أن P نقطة على المحيط (انظر الرسم)



من الشكل السابق نجد ان

طول $> A\,P$ طول

$\sin x < A\,P$

$< B\,P$

$<$ طول القوس $B\,P$

$= x$

فى هذا المثال نجد ان

$f(x) = \sin x \ , \quad L = a = 0$

لذلك نجد ان لاى عدد موجب صغير

$|f(x) - L| < \varepsilon \,\forall \quad |x - 0| < \delta$ (1)

بذلك نجد أن

$$\lim_{x \to 0} \sin x = 0 \qquad (2)$$

حــــل آخر : باستخدام النظرية (8) (The sandwich theorem)

$\therefore \quad |\sin x| \ \leq \ |x|$ (i)

وبفرض أن $|x| \to 0 \quad \text{as} \quad x \to 0$

يمكننا وضع المقياسين (i) على الصورة :

$|x| \ \leq \ \sin x \leq \ |x| -$

نأخذ النهاية عند $x \to 0$

$$\lim_{x \to 0} -|x| = 0 = \lim_{x \to 0} |x|$$

فإننا نحصل على $\lim_{x \to 0} \sin x = 0$

مثال : اثبت أن $\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$

الحـــــل :

$$0 \le \left| x\sin\frac{1}{x} \right| = |x| . \left| \sin\frac{1}{x} \right| \le |x| 1 = |x|$$

$$0 \le \left| x\sin\frac{1}{x} \right| \le |x| \qquad , \quad x \ne 0$$

$$-|x| \le x\sin\frac{1}{x} \le |x|$$

لذلك يمكننا كتابة هذه المتباينة على الصورة

$$-|x| \le x\sin\frac{1}{x} \le |x|$$

نأخذ النهاية عندما $x \to 0$

$$\lim_{x\to 0} -|x| \le \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} \le \lim_{x\to 0} |x|$$

$$\because \quad \lim_{x\to 0} \pm |x| = 0 \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$$

مثال: اثبت ان $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$

الحـــــل:

نستخدم نظرية (8) بالاضافة إلى أن

$$\text{if} \quad 0 \le a \le 1, \quad \text{then} \quad 0 \le a \le \sqrt{a} \le 1 \qquad (3)$$

على الفترة $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ نجد ان $\cos x > 0$ لذلك فان

$$0 < 1 - \sin^2 \le \sqrt{1 - \sin^2 x} = \cos x \le 1 \qquad (4)$$

ناخذ النهاية عندما $x \to 0$ نجد ان

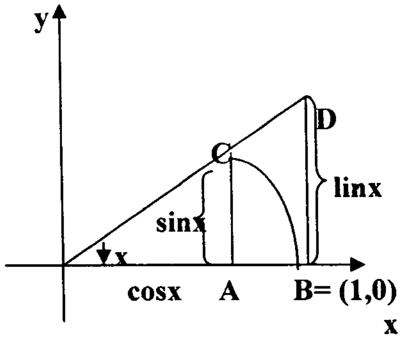
$$\lim_{x\to 0}(1-\sin^2 x) = 1-(\lim_{x\to 0}\sin x) = 1-0 = 1 \qquad (5)$$

باستخدام المتباينة (4) ونظرية (8) نستنتج ان $\lim_{x\to 0}\cos x = 1$

<u>نظرية</u>: إذا كانت x مقاسه بالتقدير الدائرى فان

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \qquad (6)$$

<u>البرهــان</u> : ترسم دائرة مركزها (O) ونصف قطرها الوحدة . نفرض النقطة C على محيط الدائرة حيث $A\hat{O}C = x(\text{radius})$



المماسى BD يقابل امتداد OC في نقطة D . من الرسم نجد ان

area of Δ OAC < area of secter OBC < area of Δ OBD

$$\frac{1}{2}\cos x\sin x \le \frac{1}{2}x \le \frac{1}{2}\tan x$$

بالضرب فى 2 والقسمة على $\sin x$ حيث $0 < x < \frac{\pi}{2}$

$$\cos x \le \frac{x}{\sin x} \le \frac{1}{\cos x}$$

بقلب حدود المتباينة نجد ان

$$\frac{1}{\cos x} \ge \frac{\sin x}{x} \ge \cos x \qquad (7)$$

المتباينة (i) صحيحة لقيم x اذا كانت

$$0 < x < \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} < x < 0$$

لذلك سوف نستخدم نظرية (8) وذلك بوضع

$$g(x) = \cos x, f(x) = \frac{\sin x}{x}, h(x) = \frac{1}{\cos x}$$

$$\therefore g(x) \le f(x) \le h(x)$$

نأخذ النهاية عندما $x \to 0$ نجد ان

$$\lim_{x\to 0} \cos x = 1 = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x}$$

بالتالى نحصل على

$$\therefore \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

<u>**نتيجة (1)**</u> :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \qquad (9)$$

البرهـــان :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = 1.1 = 1$$

نتيجة (2) :

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = 0$$

البرهان :

$$\frac{1-\cos x}{x} = \frac{1-\cos x}{x}\left(\frac{1+\cos x}{1+\cos x}\right)$$

$$= \frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)} = \frac{\sin^2 x}{x(1+\cos x)}$$

نأخذ النهاية عندما $x \to 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)}{x} = \lim_{x\to 0}\sin x.\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}.\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}$$

$$= 0.1.\frac{1}{2} = 0.$$

Solved Problems امثلة محلولة

مثال:

أوجد

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 3x}$$

الحـــــل :

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 5x}{\sin 3x}=\left(\lim_{x\to0}\frac{\sin 5x}{5x}\right)\left(\lim_{x\to0}\frac{3x}{\sin 3x}\right)\left(\frac{5x}{3x}\right)$$

$$=1.1.\left(\frac{5}{3}\right)=\frac{5}{3}$$

مثال :

أوجد $$\lim_{x\to0}\frac{x\sin x}{1-\cos x}$$

الحـــــل :

$$\lim_{x\to0}\frac{x\sin x}{1-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{x.2\sin(x/2).\cos(x/2)}{2\sin^2(x/2)}$$

$$=\lim_{\frac{x}{2}\to0}\frac{2(x/2).\cos(x/2)}{\sin(x/2)}=2.\lim_{\frac{x}{2}\to0}\frac{x/2}{\tan(x/2)}=2.1=2$$

مثال:

أوجد . $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cot 5x}{\cot 3x}$$

الحـــــل :

$$\therefore\ \cot\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\tan\theta$$

Put $z = x - \frac{\pi}{2}$, then as $x \to \frac{\pi}{2}$, $z \to 0$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cot 5x}{\cot 3x} = \lim_{z\to 0} \frac{\cot 5(z+\frac{\pi}{2})}{\cot 3(z+\frac{\pi}{2})}$$

النهايات اليمنى واليسرى

Right and left limits

فى التعريف السابق لم يكن هناك اية قيود على كيفية اقتراب (x) من (a) ولكن فى بعض الاحيان يكون من الانسب تحديد كيفية هذا الاقتراب

لنفرض أن x , a نقطتان على المحور الحقيقى حيث a ثابتة و x متغيرة ، لذلك فان x يمكنها ان تقترب من (a) من جهة اليمـــين أو من جهة اليسار. ومن الواضح أنه إذا كانت x تقرب مـــن (a) من جهة اليمين وتكتب $x \to a^+$.

وكذلك هنا تقترب x من (a) بحيث تكون قيمها المتعاقبة اقل من (a) فاننا نقول ان x تقترب من (a) من جهة اليسار وتكتب $x \to a$ وإذا كانت

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L_2 \quad , \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = L_1$$

فإننا نقول بأن L_1 , L_2 تمثلان النهايتان اليمنى واليسرى على الترتيب

ويكون $\lim_{x\to 0} f(x) = L$ إذا وإذا فقط تساوت النهايتين اليمنى واليسرى

أى أن

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

إذا وإذا فقط كانت

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to a} f(x) = L$$

<u>تعريف (النهاية اليمنى):</u>

يقال أن الدالة $f(x)$ تؤول إلى النهاية L_1 من جهة اليمين إذا كان لاى عدد صغير $\varepsilon > 0$ يوجد عدد صغير $\delta > 0$ بحيث ان

$$|f(x) - L_1| < \varepsilon \quad \forall 0 < x - a < \delta$$

وفى هذه الحالة تكتب

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L_1 \quad \text{or} \quad f(a^+) = L_1$$

<u>تعريف (النهاية اليسرى) :</u>

يقال أن الدالة $f(x)$ تؤول إلى النهاية L_2 من جهة اليمين إذا كان لاى عدد صغير $\varepsilon > 0$ يوجد عدد صغير $\delta > 0$ بحيث ان

$$|f(x) - L_2| < \varepsilon \quad \forall 0 < a - x < \delta$$

وفى هذه الحالة تكتب

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L_2 \quad \text{or} \quad f(a^-) = L_2$$

Solved Problems امثلة محلولة

<u>مثال</u>: باستخدام التعريف اثبت أن

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=4$$

<u>الحـــل</u> :

$$|f(x)-L|=\left|\frac{x^2-4}{x-2}-4\right|=\left|\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)}-4\right|$$

$$|x+2-4|<\varepsilon \Rightarrow |x-2|<\varepsilon$$

$$\therefore\ |f(x)-4|<\varepsilon \quad \forall x-2<\delta$$

$$\therefore\ \lim_{x\to 2} f(x)=4$$

<u>مثال</u>: باستخدام التعريف اثبت ان

$$\lim_{x\to 1} f(x)=1$$

اذا كانت $f(x)$ معرفة بالقاعدة

$$f(x)=\begin{cases}4x-3, x\neq 1\\ 7, x=1\end{cases}$$

<u>الحـــل</u> :

$$|f(x)-1|<\varepsilon \Rightarrow |(4x-3)-1|<\varepsilon \Rightarrow 4|x-1|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow |x-1|<\frac{\varepsilon}{4} \Rightarrow |x-1|=\delta, \delta=\frac{\varepsilon}{4}$$

<u>مثال</u> :

اثبت ان $\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$ غير موجودة.

الحـــل :

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{x}=1 & \text{if } x>0\\ \frac{-x}{x}=-1 & \text{if } x<0\end{cases}$$

نبحث نهاية الدالة عندما $x=0$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^+}(1)=1$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^-}(-1)=-1$$

$$\therefore \lim_{x\to 0^+}f(x)\neq \lim_{x\to 0^-}f(x)$$

لذلك فان النهاية تكون غير موجودة.

مثال :

. اذا كانت

$$f(x)=\begin{cases}3x-2 & \text{if } x<2\\ x^2 & \text{if } x>2\end{cases}$$

اوجد

$$\lim_{x\to 2}f(x)$$

الحـــل :

$$\lim_{x\to 2^-}f(x)=\lim_{x\to 2^-}(3x-2)=6-2=4$$

$$\lim_{x\to 2^+}f(x)=\lim_{x\to 2^+}x^2=4$$

$$\lim_{x\to 2^-}f(x)=\lim_{x\to 2^+}f(x)=4 \quad \therefore \lim_{x\to 2^+}f(x)=4$$

مثال:

اذا كانت

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2 & :x<-2 \\ 2x+3 & :x>-2 \end{cases}$$

اوجد

$$\lim_{x\to -2} f(x)$$

الحـــل :

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}(x^2+2)=6$$

$$\lim_{x\to -2^+} f(x)=\lim_{x\to -2^+}(2x+3)=-4+3=-1$$

$$\lim_{x\to -2^-} f(x)\neq \lim_{x\to -2^+} f(x)$$

النهاية غير موجودة.

مثال : اذا كانت

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1 & \text{if} \quad x<-2. \\ 4x+5 & \text{if} \quad -2<x<3 \\ 6x-1 & \text{if} \quad 3<x \end{cases}$$

أوجد النهايات

$$\lim_{x\to 3} f(x) \quad , \quad \lim_{x\to -2} f(x)$$

الحـــل :

اولا نوجد

$$\lim_{x\to -2} f(x)$$

$$\lim_{x\to -2} f(x) = \lim_{x\to -2}(x^2-1) = 4-1 = 3$$

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+}(4x+5) = -8+5 = -3$$

$$\therefore \lim_{x\to -2^-} f(x) \neq \lim_{x\to -2^+} f(x)$$

f(-2) غير موجودة .

ثانيا نبحث وجود النهاية

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-}(4x+5) = 12+2 = 17$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+}(6x-1) = 18-1 = 17$$

$$\therefore \lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x)$$

$$\therefore f(3) = 17$$

مثال:

اوجد النهاية

$$\lim_{x\to 5}\frac{|x-5|}{x-5}$$

الحـــل :

يمكننا تعريف قاعدة الدالة كالاتى :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-5}{x-5} & ; x > 5 \\ -\dfrac{(x-5)}{x-5} & ; x < 5 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 5^-} f(x) = \lim_{x\to 5^-} \frac{(5-x)}{x-5} = -1$$

$$\lim_{x\to 5^+} f(x) = \lim_{x\to 5^+} \frac{x-5}{x-5} = 1$$

$$..f(5^+) \neq f(5^-)$$

ليست موجودة.

مثال :

اذا كانت
$$f(x) = \frac{x^2 - |x|}{(x+1)(x+2)}$$

ابحث وجود النهايات الاتية :

$$\lim_{x\to -1} f(x) \qquad \lim_{x\to 1} f(x) \qquad \lim_{x\to (1)1} f(x)$$

الحـــــل :

يمكننا تعريف الدالة كالاتى :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + x}{(x+1)(x+2)}, & x < 0 \\ \dfrac{x^2 - x}{(x+1)(x+2)}, & x > 0 \end{cases}$$

$$\therefore \lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} \frac{x(x+1)}{(x+1)(x+2)} = \lim_{x\to -1} \frac{x}{x+2}$$

$$= \frac{-1}{-1+2} = -1$$

النهاية موجودة

$$f(-1) = -1$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x(x-1)}{(x+1)(x+2)} = 0$$

$f(1) = 0$ **النهاية موجودة**

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x(x+1)}{(x+1)(x+2)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x+2} = \frac{0}{2} = 0 \quad \&$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x(x+1)}{(x+1)(x+2)} = \frac{0}{1\times 2}$$

$$\Rightarrow f(0^-) = f(0^+) = 0$$

النهاية موجودة

(Limit of a function at infinity) نهاية دالة عند اللانهاية

تعريف :

يقال أن الدالة $f(x)$ تؤول إلى النهاية L عند $x\to\infty$ وإذا استطعنا أن نجعل الفرق بين $f(x)$ والعدد L اصغر ما يمكن عندما تأخذ x قيم كبيرة جدا (اكبر مايمكن) أى أن :

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \quad \text{if } \forall\ \varepsilon > 0 \ \text{ exists } \delta > 0 \quad \text{such that}$$

$$|f(x) - L| > \varepsilon \quad \forall\ x < \delta$$

ملحوظة :

1- يمكننا بسهولة أن نلاحظ أن $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$

وبالتالى يكون $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \;,\; n \in z^+$

حيث n عدد صحيح موجب

2- للحصول على دالة **جبرية كسرية** عندما $x \to \infty$

- نقسم كلا من البسط والمقام على المتغير x المرفوع لاكبر قوة فـــى الدالة

- نستخدم الملحوظة (1) وخواص النهايات للحصول على النهاية المطلوبة ان وجدت.

امثلة محلولة Solved Problems

<u>**مثال**</u>:اوجد النهايات الاتية :

a) $\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2 - 3x + 6}{2x - 7x^2}$

b) $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - 5x}{2x^3 - 6x^2 + 4x - 1}$

<u>**الحـــــل**</u> : بقسمة كل من البسط والمقام على x^2

a) $\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2 - 3x + 6}{2x - 7x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{5 - \frac{3}{x} + \frac{6}{x^2}}{\frac{2}{x} - 7}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2-3x+6}{2x-7x^2}=\frac{5-0+0}{0-7}=-\frac{5}{7}$$

b) $$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-5x}{2x^3-6x^2+4x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}}{2-\frac{6}{x}+\frac{4}{x^2}-\frac{1}{x^3}}=\frac{0-0}{2-0+0-0}$$

مثال : اوجد

a) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^x$, b) $\lim_{x\to\infty}\frac{3(2)^x-5^x}{4(3)^x+2(5)^x}$

c) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1'+7^{x-1}x(3)}{7^3-1}$ d) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[5]{x^5+x^3}}{\sqrt[5]{x^7-x^2}}$

الحـــل : ملحوظة : يجب ملاحظة أن

(i) $\lim_{x\to\infty} r^x=0$ if $|r|<1$

(ii) $\lim_{x\to\infty} r^x=\infty$ if $r>1$

وذلك لان

a) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^x=0 \qquad -1<\frac{3}{4}<1$

b) $\lim_{x\to\infty}\frac{3(2^x)-(5^x)}{4(3^x)+2(5^x)}$

بالقسمة على (5^x) بسطا ومقاما

$$\therefore \text{L.H.S} = \lim_{x\to\infty} \frac{3\left(\frac{2}{5}\right)^x - 1}{4\left(\frac{3}{5}\right)^x + 2} = \frac{0-1}{0+2} = -\frac{1}{2}$$

c) $$\lim_{x\to\infty} \frac{2^{x+1} + 7^{x-1}x(3)}{7^x - 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{(2^x)(2) + (7^x)(7^{-1})(3)}{(7^x) - 1}$$

بالقسمة بسطا ومقاما على 7^x

$$\therefore \text{L.H.S} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\left(\frac{2}{7}\right)^x + \left(\frac{3}{7}\right)^x}{1 - \left(\frac{1}{7}\right)}$$

وبما أن $\frac{1}{7} < \frac{2}{7} < 1$

$$\therefore \text{L.H.S} = \frac{0 + 3/7}{1-0} = \frac{3}{7}$$

d) $$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[5]{x^5 + x^3}}{\sqrt[7]{x^7 - x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[5]{x^5(1 + \frac{1}{x^2})}}{\sqrt[7]{x^7(1 - \frac{1}{x^5})}} \rightarrow$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[5]{1 + \frac{1}{x^2}}}{\sqrt[7]{1 - \frac{1}{x^5}}}$$

$$= \frac{\sqrt{1+0}}{\sqrt{1-0}} = \frac{1}{1} = 1.$$

للحصول على نهاية دالة عندما $x \to -\infty$

نتبع نفس الخطوات للحصول على النهاية عندما $x \to -\infty$

أى أننا نقسم كل من البسط والمقام على x المرفوعة لاكبر قوة فى الدالة المعطاة مع ملاحظة أن

$$\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x & \text{if} \quad x > 0 \\ -x & \text{if} \quad x < 0 \end{cases}$$

وبما ان x كمية سالبة نجد ان

$$\sqrt{x^2} = -x, \qquad \sqrt[4]{x^4} = -x, \ldots..$$

مثال: أوجد

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt[3]{8x^3 - 5x + 1}}{3x - 2}$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5x - 6}{\sqrt{9x^2 + 7}}$

الحـــل :

(a) بقسمة كل من البسط والمقام على $x = \sqrt[3]{x^3}$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt[3]{8x^3 - 5x + 1}}{3x - 2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt[3]{8 - \frac{5}{x^2} + \frac{1}{x^3}}}{3 - 2(\frac{1}{x})} = \frac{\sqrt[3]{8}}{3} = \frac{2}{3}$$

(b) بقسمة كل من البسط والمقام على $\sqrt{x^2} = -x$ نحصل على

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{5x - 6}{\sqrt{9x^2 + 7}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-5 + 6/x}{\sqrt{9 + 7/x^2}} = \frac{-5}{\sqrt{9}} = -\frac{5}{3}$$

مثال : اذا كانت

$$f(x)=\frac{2(3)^x-4(5)^x}{3(5)^x-2(3)^x}$$

a) $\lim_{x\to\infty} f(x)$, b) $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ فاوجد كلا من

الحــــل :

a) $f(x)=\frac{2(3)^x-4(5)^x}{3(5)^x-2(3)^x}$

بقسمة كل من البسط والمقام على (5^x) نحصل على

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2(3)^x-4(5)^x}{3(5)^x-2(3)^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\left(\frac{3}{5}\right)^x-4}{3-2\left(\frac{3}{5}\right)^x}$$

$$\frac{3}{5}<1\Rightarrow\therefore\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^x=0$$

$$\therefore L.H.S=\frac{-4}{3}$$

b) $\lim_{x\to-\infty}=\frac{2(3)^x-4(5)^x}{3(5)^x-2(3)^x}$

بقسمة كلا من البسط والمقام على $(3)^x$ اى اقل عدد مرفوع للقوة x

مع ملاحظة ان

if $x < 0$, then $\lim\limits_{x \to -\infty} r^x = 0$ when $r > 1$

$$\therefore \ \text{L.H.S} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2 - \left(\frac{5}{3}\right)^x}{3\left(\frac{5}{3}\right)^x - 2} = \frac{2}{-2} = -1$$

مثال : أوجد

a) $\lim\limits_{x \to \infty} (\sqrt{9x^2 + 2} - 3x)\sqrt{4x^2 + 1}$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} x(\sqrt{4x^2 + 3} - \sqrt{4x^2 - 3})$

الحـــــل :

(a) بضرب كلا من البسط والمقام فى مرافق القوس الاول

$$\therefore \text{L.H.S} = \lim_{x \to \infty} \left[\frac{(\sqrt{9x^2 + 2} - 3x)(\sqrt{9x^2 + 2} + 3x)\sqrt{4x^2 + 1}}{\sqrt{9x^2 + 2} + 3x} \right]$$

$$= \lim_{x \to \infty} \left[\frac{(9x^2 + 2 - 9x^2)\sqrt{4x^2 + 1}}{\sqrt{9x + 2} + 3x} \right]$$

$$= \lim_{x \to \infty} \left[\frac{2\sqrt{4x^2 + 1}}{\sqrt{9x^2 + 2} + 3} \right]$$

بقسمة كلا من البسط والمقام على x مع ملاحظة ان $\sqrt{x^2} = x$

$$L.H.S. = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{2\sqrt{4+1/x^2}}{\sqrt{9+2/x^2}+3}\right] = \frac{2\sqrt{4+0}}{\sqrt{9+0}+3}$$

$$= \frac{2\times 2}{3+3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

(b) بضرب كلا من البسط والمقام فى مرافق القوس

$$L.H.S = \lim_{x\to-\infty} x\left[\frac{(\sqrt{4x^2+3}-\sqrt{4x^2-3})(\sqrt{4x^2+3}+\sqrt{4x^2-3})}{\sqrt{4x^2+3}+\sqrt{4x^2-3}}\right]$$

$$= \lim_{x\to-\infty} x\left[\frac{(4x^2+3)-(4x^2-3)}{\sqrt{4x^2+3}+\sqrt{4x^2-3}}\right]$$

$$= \lim_{x\to-\infty} x\left[\frac{6x}{\sqrt{4x^2+3}+\sqrt{4x^2-3}}\right]$$

بقسمة كلا من البسط والمقام x مع ملاحظة ان $\sqrt{x^2} = -x$

$$\therefore L.H.S = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-6}{\sqrt{4+\frac{3}{x^2}}+\sqrt{4-\frac{3}{x^2}}}\right) = \frac{-6}{2+2} = -\frac{3}{2}$$

تمـــــارين

اوجد النهايات الاتية ان وجدت:

1) $\lim_{x\to0^+}(x^{5/2}-5x^{3/2})$

2) $\lim_{x\to2}\sqrt{x+2}$

3) $\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x}+x^{4/3}}{6-x^{3/4}}$

4) $\lim_{x\to2^-}\frac{x^2-4x+4}{x-2}$

5) $\lim\limits_{x\to 1}$ ...

6) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{|x-3|}{x-3}$

7) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{3\sqrt{x}+4x^2-6}{\sqrt{x}+\sqrt{x+4}}$

8) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$

9) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2-4}{\sqrt{x-2}}$

10) $\lim\limits_{x\to 0^+}\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

11) اذا كانت F معرفة بالقاعدة

$$F(x)=\begin{cases}\cos x & x\le 0\\ 1-x & x>0\end{cases}$$

أوجد $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ هل $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ أم لا

12) اذا كانت $f(x)=\dfrac{\sin x}{|x|}$ اوجد

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ (b) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ (c) $\lim\limits_{x\to a} f(x)$

13) اذا كانت f معرفة بالقاعدة

$$f(x)=\begin{cases}2 & x\le 1\\ -x & -1<x\le 1\\ -x^2 & 1<x\end{cases}$$

فارسم منحنى الدالة f

***