

الباب الخامس

نظرية رول ونظرية لاجرانج

1. نظرية رول ونظرية لاجرانج

سوف نستخدم الرمز $[a, b]$ للدلالة على الفترة المغلقة $a \leq x \leq b$

والرمز $]a, b[$ للدلالة على الفترة المفتوحة $a < x < b$.

نقول ان الدالة $y = f(x)$

تفاضلية (او قابلة للاشتقاق) عند نقطة ما

$x = x_0$ اذا كانت $f'(x_0)$ موجودة ومحدودة . وتبعاً لتعريف المشتقة

الاولى فان هذا يعنى ان النهاية

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

موجودة ومحدودة . وكما تعلم فان وجود هذه النهاية يكافىء وجود

النهايتين

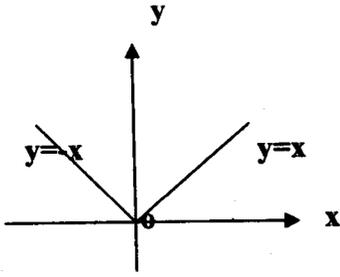
$$f'(x_0^+) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, f'(x_0^-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

حيث تسمى $f'(x_0^+)$ بالمشتقة اليمنى عند x_0 و $f'(x_0^-)$ بالمشتقة

اليسرى وتساويها. لتوضيح ذلك نعبر الدالة

$$y = |x|$$

أى ان



$$y = \begin{cases} -x & \text{if } x < 0 \\ x & \text{if } x \geq 0 \end{cases}$$

هذه الدالة متصلة عند جميع نقط محور x ، وتفاضلية عند جميع نقط هذا

المحور ما عدا ربما عند $x = 0$. ندرس تفاضلية هذه الدالة عند $x = 0$

$$f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - 0}{x} = 1,$$

$$f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1.$$

اذن الدالة $y = |x|$ غير تفاضلية عند $x = 0$. من هذا المثال تتضح

حقيقية هامة جدا وهي أن اتصال الدالة عند نقطة غير كاف لكي تكون

تفاضلية عند هذه النقطة .

نظرية رول Rolle's Theorem

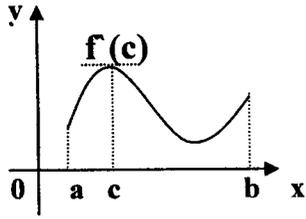
إذا كانت الدالة $y = f(x)$ متصلة في الفترة $[a, b]$ وتفاضلية في

الفترة $]a, b[$ وكانت $f(a) = f(b)$ فإنه توجد على الأقل نقطة واحدة c

تنتمي الى $]a, b[$ بحيث ان

$$f'(c) = 0$$

تتضح صحة هذه النظرية من انه يوجد احتمالان للدالة $y = f(x)$ فى



الفترة $]a, b[$:

الاول : الدالة $y = f(x)$ ثابتة فى هذه الفترة وبالتالي تتلاشى مشتقاتها الاولى عند جمع نقط هذه الفترة .

الثانى : الدالة لاتساوى ثابتا فى الفترة وبالتالي نتيجة لذلك توجد على الاقل نقطة واحدة فى الفترة $]a, b[$ تكون عندها للدالة $f(x)$ نهاية عظمى أو صغرى وكما هو معلوم فان المشتقة الاولى تتلاشى عند نقط النهايات العظمى والصغرى .

والمعنى الهندسى لهذه النظرية هو أنه يوجد على الاقل اساس افقى واحد بين a و b اذا حققت $f(x)$ جميع شروط هذه النظرية .

امثلة محلولة Solved Problems

مثال : هل تحقق الدالة $y = x^2 |x|$ شروط نظرية رول فى الفترة $[-1, 1]$.

الحل : لدينا أن

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{if } x \geq 0 \\ -x^3 & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

هذه الدالة متصلة في كل من الفترتين $[-1, 0[$ و $]0, 1]$. ندرس

اتصالها عند $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0, f(0) = 0$$

وانه في متصلة عند $x = 0$ وعلى ذلك فهذه الدالة متصلة في الفترة $[-1, 1]$ ما عدا ربما $x = c$ التي يجب دراستها على حدة :

$$f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x} = 0,$$

$$f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^3}{x} = 0.$$

ان الدالة تفاضلية عند $x = 0$ بالاضافة إلى أن $f'(0) = 0$.

الدالة تفاضلية في الفترة $[-1, 1]$ كما ان

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2, & x \geq 0 \\ -3x^2, & x < 0 \end{cases} \quad (i)$$

أخيرا لدينا ان $f(-1) = f(1) = 1$.

ان تتحقق جميع شروط نظرية رول

وبالتالي فلا بد من وجود نقطة واحدة c على الأقل في الفترة

[-1, 1] تكون عندها $f'(0) = 0$ من (i) نجد انه توجد نقطة

واحد هـ دة

$$f'(0) = 0 \Rightarrow c = 0$$

مثال : هل تحقق الدالة

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{if } x \geq 1 \\ 6 - 4x & \text{if } x < 1 \end{cases}$$

شروط نظرية رول فى الفترة [0, 2] .

الحل :

هذه الدالة متصلة فى الفترة [0, 2] لان

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = 2.$$

كما أن $f(0) = f(2) = 6$ من ناحية أخرى

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{if } x \geq 1 \\ -4 & \text{if } x < 1. \end{cases}$$

عند النقطة $x = 1$ لدينا أن

$$f'(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 + x) - 2}{x - 1} = 3,$$

$$f'(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(6 - 4x) - 2}{x - 1} = -4.$$

اذن الدالة غير تفاضلية عند $x = 1$

وبالتالى فان شروط رول لا تتحقق جميعها .

نظرية لاجرانج (أو القيمة المتوسطة)

Lagrange's (Mean Value Theorem)

إذا كانت الدالة $y = f(x)$

متصلة فى الفترة $[a, b]$ وتفاضلية فى

الفترة $[a, b[$ فانه توجد نقطة c فى الفترة $]a, b[$ بحيث ان

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \dots \quad (1)$$

البرهان : نعتبر الدالة

$$g(x) = f(b) - f(x) - (b-x) \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

بما ان $f(x)$ متصلة وتفاضلية فان $g(x)$ ايضا متصلة وتفاضلية ، كما أن

$$g(a) = g(b) = c$$

أذن جميع شروط نظرية رول تتحقق وبالتالي

$$g'(c) = -f'(x) + \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \Big|_{x=c} = 0.$$

$$\Rightarrow \frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(c)$$

وهذا يبين صحة النظرية .

تسمى (1) أحيانا بقانون لاجرانج كما تسمى $f'(c)$ بالقيمة المتوسطة

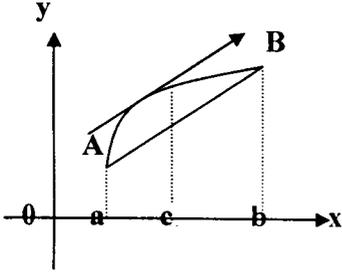
لمشتقة الدالة في الفترة $[a, b]$.

المعنى الهندسي لنظرية القيمة المتوسطة

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

بما ان ميل الوتر AB هو

و $f'(c)$ هو ميل المماس للمنحنى



عند النقطة $(c, f(c))$ فان $y = f(x)$

النظرية تعنى وجود مماس موازى للوتر AB . اذا وضعنا فى (1)

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x + \theta \Delta x) \Delta x \quad \dots(2)$$

مثال: هل تحقق الدالة $y = \ln x$ شروط نظرية القيمة المتوسطة فى

الفترة $[1, 3]$ واذا كانت تحققها فأوجد c الموجودة فى قانون لاجرانج

(1) .

الحل: بما أن الدالة $y = \ln x$ متصلة فى الفترة $[1, 3]$

وتفاضلية فى الفترة $[1, 3]$ (لاحظ أن $y' = \frac{1}{x}$) اذن تتحقق نظرية

لاجرانج . لدينا أن

$$f'(c) = \frac{1}{c} = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{\ln 3 - \ln 1}{2}$$

$$\Rightarrow c = \frac{2}{\ln 3}$$

2- قاعدة اوبيتال

L'Hopital's Rule

تنص هذه القاعدة على أنه إذا كانت الدالتان $f(x)$, $g(x)$ تفاضليتين في

فترة تحوى بداخلها النقطة $x = a$ بحيث ان $g'(a) \neq 0$ وإذا كانت

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \text{ or } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$$

فان

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

وقبل اثبات هذه القاعدة نلاحظ انها تطبق فقط عندما يكون كمية $\frac{f(a)}{g(a)}$

غير معينة من الصورة $\frac{0}{0}$ أو الصورة $\frac{\infty}{\infty}$ اما فى الحالات الاخرى

فيجب فى البداية تحويلها جبريا الى هاتين الصورتين .

اثبات قاعدة اوبيتال :

$$f(a) = g(a) = 0$$

نفرض ان

تبعاً لنظرية لاجرانج فانه توجد نقطة c_1 بحيث ان

$$a < c_1 < x$$

$$f(x) - f(a) = (x - a)f'(c_1)$$

$$\Rightarrow f(x) = (x - a)f'(c_1)$$

وبالمثل توجد نقطة c_2 حيث $a < c_2 < x$

$$g(x) = (x - a)g'(c_1)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a)f'(c_1)}{(x - a)g'(c_2)}$$

ولكن عندما $x \rightarrow a$ تؤول كل من c_1, c_2 الى a

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

وهو المطلوب اثباته اولاً ،

يمكن اثبات هذه القاعدة في الحالة الثانية اذا كتبنا

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1/g(x)}{1/f(x)}$$

امثلة محلولة Solved Problems

مثال : احسب النهايات التالية :

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{4x^2} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 2x}{8x} = \frac{0}{0}$$
$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \cos 2x}{8} = \frac{1}{2}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} x(\ln x) = 0 \cdot (-\infty)$$

نستطيع هنا تطبيق قاعدة اوبيتال ولكن بايجاد فكتابتها على الصورة
التالية يمكننا تطبيقها .

$$\lim = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{1/x} = \frac{-\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0.$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\csc x} = 1^\infty$$

حالات عدم التعيين من الصورة 1^∞ أو 0^0 أو ∞^0 نحولها الى عدم
تعيين من الصورة $0 \cdot \infty$ باستخدام اللوغاريتمات . نضع

$$y = (\cos x)^{\csc x} \Rightarrow \ln y = \csc x \ln(\cos x)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \ln y &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{\sin x} = \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{\cos x \cdot \cos x} = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} y = e^0 = 1.$$

تمارين

(1) اكتب منطوق نظرية رول وحققها على الدالة $y = x^2 - 4x + 3$
في الفترة $[1, 3]$.

(2) اكتب منطوق نظرية لاجرانج وحققها على الدالة $y = x^3$ في الفترة
 $[-1, 2]$.

(3) هل تحقق الدوال الاتية شروط نظرية رول في الفترات المذكورة واذا

لم تحققها اذكر لماذا؟:.

i) $y = 1 - x$; $[-1,1]$

ii) $y = \ln \sin x$; $[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$

4) هل تحقق الدوال الآتية شروط نظرية لاجرانج في الفترات المذكورة

وإذا كانت تحققها أوجد c الموجودة في قانون لاجرانج وإذا لم تحققها

اذكر السبب ؟:

i) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$; $[0,1]$.

ii) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 5 & \text{if } x \leq 0 \\ 5 & \text{if } x > 0 \end{cases}; [-1,2]$

iii) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{if } x \leq 1 \\ 1 - x & \text{if } x > 1 \end{cases}; [0,2]$

iii) $f(x) = x |x|$; $[-2,1]$

باستخدام قاعدة اوبيتال احسب النهايات التالية :

5) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x^2 - 3)}{x^2 + 3x - 10}$

6) $\lim_{x \rightarrow 1} (\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{\ln x})$

* * *