الباب السادس

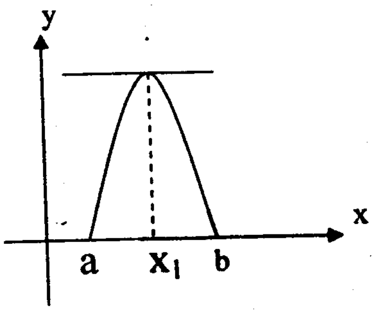
تطبيقات نظرية القيمة المتوسطة

Applications for Mean Value Theorem

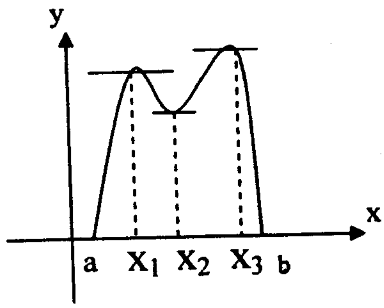
نظرية رول : Roll's Theorem

" اذا كانت $f(x)$ دالة متصلة فى الفترة $a \le x \le b$ وكانت $f(a) = f(b) = 0$ واذا كانت $f'(x)$ معرفة على نفس الفترة مع احتمال انها لاتنشأ احيانا عند نهايتى الفترة فقط فانه توجد قيمة واحدة على الاقل من قيم x مثل $x = x_1$ بين a, b يكون عندها $f'(x) = 0$ ".

ومعنى هذا هندسيا ان هناك نقطة واحدة على الاقل على المنحنى $y = f(x)$ يكون الاحداثى x_1 الواقع بين a, b عنده المماس موازيا لمحور x



المماس عند نقطة واحدة يوازى محور x



المماس عند اكثر من نقطة يوازى محور x

البرهان :

لاثبات النظرية نعتبر الاحتماليين الاتيين :

الاحتمال الاول :

ان تكون $f(x) = 0$ على طول الفترة من a اى b وفى هذه الحالة تكون $f'(x) = 0$ ايضا على طول الفترة .

الاحتمال الثانى :ان تكون $f(a) = f(b) = 0$ تكون متغيرة خلال هذه الفترة فمن الواضح انه حينما تزداد x من a الى b لايمكن للدالة $f(x)$ ان تزداد باستمرار او نقص باستمرار لان

. $f(b) = 0$, $f(x) = 0$

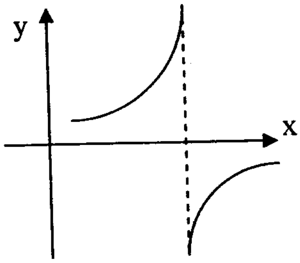
اذا فهناك قيمة واحد على الاقل من قيم x بين a, b يقف عندها ازدياد للدالة وتأخذ فى النقصان او يقف عندها نقصان الدالة وتأخذ فى الزيادة وهند هذه القيمة ولتكن x_1 من قيم x تنعدم المشتقة الاولى للدالة اى $f'(x) = 0$

نتيجة :

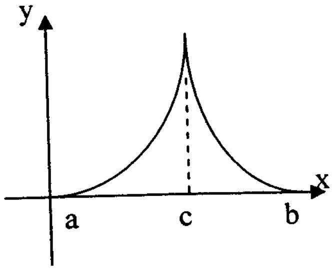
اذا كانت $f(x)$ مستوفاه لشروط نظرية رول غير ان $f(a) = f(b) \neq 0$ ولكن $f(a) = f(b) \neq c$ فان $f'(x) = 0$ لقيمة واحدة على الاقل من قيم x مثل x_1 ، $b \leq x_1 \leq a$.

هذا ومن المهم ان يلاحظ فى تطبيق نظرية رول ان تكون $f'(x)$, $f(x)$ كلتاهما متصلتان ومحدودتان فى الفترة .

الاشكال الاتيه هى حالات لايمكن تطبيق نظرية رول عليها للاخلال بأحد هذه الشروط.



شكل 1



شكل 2

ففى شكل (1) : نجد ان الدالة غير متصلة عند $x = c$

وفى شكل (2) : نجد ان المشتقة لانهائية عند (c) (غير محدودة) لان المماس عند (c) يوازى محور y .

Solved Problems امثلة محلولة

مثال: $f(x) = x^3 - 12x$

اختبر امكانية تطبيق نظرية رول على الدالةالمعرفة على الفترة $0 \le x \le 2\sqrt{3}$ واوجد قيمة x_1 التى فى نظرية رول لهذه الدالة ان وجدت.

الحـــل :

$$(a,b) = (0, 2\sqrt{3})$$

$$f(a) = f(0) = 0$$

$$f(b) = f(2\sqrt{3}) = 8x3\sqrt{3} - 12(2\sqrt{3}) = 24\sqrt{3} - 24\sqrt{3} - 24\sqrt{3} = 0$$

$$\mathbf{f(a) = f(b) = 0} \text{ ..}$$

ومن الواضح ان الدالة f(x) مشتقاتها f'(x) متصلتان على الفترة

المرفقة لها . اذن الدالة تكون مستوفاه لشروط نظرية رول .

لايجاد x_1

$$f(x) = x^3 - 12\,x$$
$$\therefore\ f'(x) = 3x^3\,b - 12$$

بوضع $f'(x) = 0$

$$\therefore\ x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow x_1 \pm 2$$

ولكن $-2 \notin [0, 2\sqrt{3}]$

$$\therefore\ x_1 - 2$$

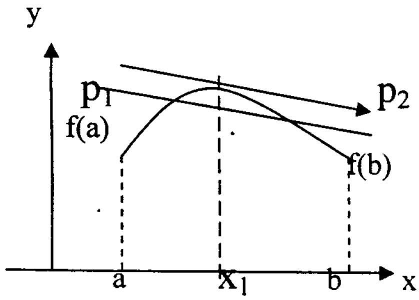
نظرية القيمة المتوسطة

Mean Value Theorem

اذا كانت $f(x)$ متصلة فى الفترة $[a, b]$ واذا نشأت الاولى لهذه الدالة على نفس الفترة (مع احتمال عدم نشوءها عند نهايتى الفترة فقط) فانه يوجد نقطة واحدة على الاقل من قيم x مثل $x = x_1$ بين a, b

بحيث ان: $$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_1)$$

<u>معنى هذا هندسيا</u>



انه اذا كانت p_1, p_2 نقطتان من نقطتان من نقاط اى منحنى متصل فانه توجد نقطة واحدة على الاقل بين p_1, p_2 يكون عندها ميل المماس مساويا لميل المستقيم $p_1\,p_2$ كما بالشكل

البرهـــان :

تحت شروط النظرية فانه يمكن ان تكون الدالة

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.(x - a)$$

.... (1)

حيث من الواضح انها متصلة على الفترة $[a, b]$ بالتعويض فى (1) عن $x = a$ نجد ان

$$\varphi(a) = 0$$

وايضا عندما $x = b$ نجد ان

$$\varphi(b) = 0$$

$$\therefore \varphi(a) = \varphi(b) = 0$$

$\therefore$ يمكن تطبيق نظرية رول على $\varphi(x)$

$$\therefore \varphi'(x_1) = 0 \quad , \quad b \le x_1 \le a \; ...... \; (2)$$

بتفاضل المعادلة (1) نجد ان :

$$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \quad \varphi'\varphi\varphi$$

$$\therefore = f'(x_1) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

وهو المطلوب .

مثال: اختبر امكانية تطبيق نظرية القيمة على الدالة

$$f(x) = 3x^2 + 4x - 3 \quad , \quad 1 \le x \le 3$$

المعرفة على الفترة $1 \le x \le 3$ واوجد قيمة x_1 التى فى النظرية لهذه الدالة ان وجدت .

الحـــل :

$$f(x) = 3x^2 + 4x - 3 \quad , \quad 1 \le x \le 3 \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

من الواضح ان هذه الدالة مستوفاة لشروط الاتصال لقيم x فى هذه الفترة

$$\text{at} \quad x = 1 \;\Rightarrow\; f(1) = 3 + 4 - 3 = 4$$

$$\text{at} \quad x = 3 \;\Rightarrow\; s(3) = 27 + 12 - 3 = 36$$

وحيث ان $a = 1 \quad , \quad b = 3$

$$\therefore \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_1)$$

$$\therefore f'(x_1) = \frac{46 - 4}{3 - 1} = \frac{32}{2} = 16 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

وايضا من (2) ، (3) نجد ان

$$5x_1 + 4 = 16 \;\Rightarrow\; 6x_1 = 12 \;\Rightarrow\; x_1 = 2$$

تعميم نظرية القيمة المتوسطة

Generalized low of Theorem

اذا كانت الدالتين $f(x), g(x)$ متصلتين فى الفترة [a, b] واذا نشأت كـــل من $f`(x), g`(x)$ وكانت $g'(x) \neq 0$ على طول الفترة (مع احتمال عدم توافر هذا الشرط عند نهايتى الفترة فقط) فانه توجد قيمة واحدة على الاقل من قيم x مثل $x = x_1$ واقعة بيـــن a, b بحيث ان :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f'(x_1)}{g'(x_1)}$$

ملحوظة :

عندما $g(x)=x$

تصبح النظرية هى نظرية القيمة المتوسطة .

البرهـــان :

شروط النظرية يمكن ان تكون الدالة

$$\psi(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\{g(x)\}-\{f(x)-f(a)\}\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

حيث واضح ان الدالة (1) متصلة لجميع قيم x الواقعة بين a, b

$$\text{at } x=a \Rightarrow \psi(a)=0$$

$$\text{at } x=b \Rightarrow \psi(b)=0$$

بتفاضل المعادلة (1) بالنسبه الى x نجد ان

$$\psi'(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\quad g'(x)-f'(x)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

وحيث ان الدالة تستوفى شروط نظرية رول

$$\therefore \psi'(x_1)=0$$

$$\psi'(x_1)=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(x_1)-f'(x_1)=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

$$\therefore f'(x_1)=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\quad g'(x_1)$$

$$\therefore \frac{f'(x_1)}{g'(x_1)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

وهو المطلوب .

مثال :

اوجد قيمة x_1 فى تعميم نظرية القيمة المتوسطة اذا امكن تطبيقها على الدالتين

$$g(x) = x^2 + 1$$
$$f(x) = 3x + 2$$

المعرفتان على الفترة $1 \le x \le 4$

الحـــل :

الدالتان $g(x)$, $f(x)$ متصلتان وقابلتان للتفاضل على الفترة $[1, 4]$ ومحدودتان عليها كما ان $g(x) \neq 0$ على هذه الفترة

$\therefore$ $f(x), g(x)$ مستوفيان لشروط النظرية

$$g`(x_1) = 2x_1 \ , \ \ f`(x) = 3$$

$$\therefore \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_1)}{g'(x_1)} \ , \ a = 1, \ \ b = 4$$

$$\Rightarrow \frac{f(4) - f(1)}{g(4) - g(1)} = \frac{f'(x_1)}{g'(x_1)}$$

$$\frac{14 - 5}{17 - 2} = \frac{f'(x_1)}{g'(x_1)}$$

$$\frac{9}{15} = \frac{3}{2x_1} \Rightarrow 18x_1 = 45 \Rightarrow x_1 = \frac{5}{2}$$

التطبيق للصور غير المعينة :-

اذا اتخذت الدالة قيمة معينة a من قيم المتغير المستقل لاحدى الصور،

الاتية :

$$\frac{0}{0} \quad , \quad \frac{x}{x} \quad , \quad 0\times\infty \quad , \quad \infty-\infty \quad , \quad 0^0 \quad , \quad \infty^0 \quad , \quad 1^\infty$$

قيل انها غير معينة .

1- تعيين الصورة 0^0 :

واتعيين نهاية الدالة اذا كانت النهاية على هذه الصورة فنستخدم النظرية الاتيه :

نظرية لوبيتال L'Hospital's

لنفرض ان a اى عدد $f(x)\ ,\ g(x)$ دالتان يمكن ايجاد مشتقة الاولى لهما . فاذا كان $g'(x)\neq 0$ لجميع قيم x فى الفترة

$$\lim_{x\to a} g(x)=0 \quad ; \quad \lim_{x\to 0} f(x)=0 \quad ; \quad 5<|x-a|<\delta$$

فاذا نشأت $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ فان

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \ .$$

البرهـــان :

من الواضح ان الدوال متصلة لانه يمكن ايجاد مشتقة كل منهما فحسب تعميمك نظرية القيمة المتوسطة نجد ان

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(x_1)}{g'(x_1)}\ , \quad \text{where} \quad a<x_1<b \ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$\therefore \lim_{x\to a} f(x)=0 \quad ; \quad \lim_{x\to a} g(x)=0$$

فان :

$$g(a) = 0 \quad , \qquad f(a) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

بالتعويض فى (1) بوضع x بدلا من b مع استخدام المعادلتان (2)

$$\frac{f(x)-0}{g(x)-0} = \frac{f'(x_1)}{g'(x_1)} \quad , \quad 0 < x_1 < x$$

فاذا جعلنا $x \to a$ فان $x_1 \to a$

ايضا لان x_1 هى احدى قيم x لان :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x_1 \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

وهو المطلوب .

أمثلة محلولة Solved Problems

مثال :

اوجد قيمة $\lim_{x \to 3} \frac{x^4 - 81}{x-3}$

الحـــل :

من الواضح ان عندما $x = 3$ فان النهاية تكون على الصورة $\frac{0}{0}$

بتطبيق نظرية لوبيتال نجد ان :

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^4 - 81}{x-3} = \lim_{x \to 3} \frac{\frac{d}{dx}(x^4 - 81)}{\frac{d}{dx}(x-3)}$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{4x^2}{1} = 4x(3)^3 = 4 \times 27 = 108$$

2- الصورة الغير معينة $\frac{\infty}{\infty}$:

نظرية لوبيتال تظل صحيحة اذا حدث احدى التعديلين الاتيين فى فروض النظرية او اذا حدث التعديلين معا وهما :

أ) إذا استبدل الفرض

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \quad , \quad \lim_{x\to a} g(x) = 0$$

بالشروط البديلة

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \quad , \quad \lim_{x\to a} g(x) = \infty$$

ب) اذا استبدلنا العــدد a باللانهايــة اى $\pm\infty$ واذا اســتبدلنا ايــضا $0 < |x-a| < \delta$ بالشرط $|x| > M$ حيث M كمية موجبة .

<u>**مثال**</u> :

اوجد قيمة $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x}$

<u>**الحــــل**</u> :

المقدار $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x}$ كمية غير معينة على الصورة $\frac{\infty}{\infty}$

$\therefore$ **بتطبيق نظرية لوبيتال** نجد ان

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^\infty} = 0$$

<u>**مثال**</u> : اوجد قيمة

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{Log}x}{\mathrm{Cot}x}$$

الحــل :

المقدار بعد اخذ النهاية يكون على الصورة $\frac{\infty}{\infty}$

∴ **بتطبيق نظرية لوبيتال**

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{Log}x}{\mathrm{Cot}x} = \lim_{x\to 0} \frac{1/x}{-\mathrm{Cosec}^2 x} = -\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x}$$

$$= -\lim_{x\to 0} \frac{2\sin x \mathrm{Cos}x}{1} = 0$$

3- الصورة الغير معينة $0 \times \infty$:

نحول هذه الصورة الى احدى الصورتين $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$

4- الصورة الغير معينة $\infty - \infty$:

نحول هذه الصورة الى احدى الصورتين $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$

مثال : اوجد قيمة

$$\lim_{x\to 1} (1-x)\tan\frac{\pi x}{2}$$

الحــل:

هذه النهاية على الصورة $0 \times \infty$ لذلك نحولها الى الصورة الاتية :

$$\lim_{x\to 1} (1-x)\tan\frac{\pi x}{2} = \lim_{x\to 1} \frac{(1-x)}{\mathrm{Cot}\frac{x\pi}{2}}$$

ثم **بتطبيق نظرية لوبيتال** نجد ان :

$$\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)}{\operatorname{Cot}\frac{x\pi}{2}}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{-\frac{\pi}{2}\operatorname{Cosec}^2\frac{\pi x}{2}}$$

$$=\frac{2}{\pi}\lim_{x\to 1}\operatorname{Sin}^2\frac{\pi x}{2}=\frac{2}{\pi}$$

مثال :

اوجد قيمة

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{Secx}-\tan x)$$

الحـــــل :

هذه النهاية على الصورة $(\infty-\infty)$ لذلك نحولها الى الصورة الاتية :

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\cos x}-\frac{\sin x}{\cos x}\right)$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1-\sin x}{\cos x}\right)$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{-\cos x}{-\sin x}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\cot x=0$$

الصورة الغير معينة $0^0, \infty^0, 1^\infty$:

بأخذ اللوغاريتم لهذه القيم تتحول الصور على الترتيب الى

$0\times\operatorname{Log}0 \quad , \quad 0\times\operatorname{Log}\infty \quad , \quad \infty\operatorname{Log}1$

$0\times-\infty \quad , \quad 0\times\infty \quad , \quad \infty\times 0$

ثم نحولها بعد ذلك الى احدى الصورتين $\frac{\infty}{\infty},\frac{0}{0}$.

مثال :اوجد قيمة $\lim\limits_{x\to 0} x^x$

الحـــل :

هذه النهاية تكون على الصورة 0^0

$$\text{put } y = x^x \Rightarrow ;og y = x\log x$$

$$\lim_{x\to 0}\log y = \lim_{x\to 0} x\log x = \lim_{x\to 0}\frac{\log x}{1/x}$$

وهذه الاخيرة على الصورة $\frac{\infty}{\infty}$

∴ يمكن تطبيق **نظرية لوبيتال**

$$\therefore \lim_{x\to 0}\log y = \lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0}(-x) = 0$$

$$\therefore \log y \to \text{as } x \to 0$$

∴ بالرفع الى الدالة الاسية نجد ان

$$e^{\log y} \to e^0 \text{ i.e. } y \to 1$$

$$\therefore \lim_{x\to 0} x^x = 1$$

مثال : اوجد قيمة

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\tan x)^{\cos x}$$

الحـــل :هذه الدالة تكون على الصورة ∞^0

$$\therefore \text{put } y = (\tan x)^{\cos x} \Rightarrow \log y = \cos x \ \log\tan x$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\log y = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\cos x.\log(\tan x)) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\log(\tan x)}{\sec x}$$

وهذه النهاية على الصورة $\frac{\infty}{\infty}$

$\therefore$ بتطبيق نظرية لوبيتال

$$\therefore \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \log y = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\sec^2 x}{\tan x}}{\sec x \tan x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 x}{\tan x}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x}$$

$$\therefore \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \log y = 0$$

بأخذ الدالة الاسية للطرفين

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} e^{\log y} = e^0$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} y = 1 \to \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} x^x = 1$$

<u>مثال</u> : اوجد قيمة

$$\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{(x-1)}}$$

<u>الحـــل</u> :

هذه النهاية على الصورة 1^∞

$$\text{put} \quad y = x^{\frac{1}{(x-1)}}$$

$$\log \quad y = \frac{1}{x-1} \log x$$

$$\lim_{x\to1} \log y = \lim_{x\to1} \frac{\log x}{x-1}$$

هذه النهاية تكون على الصورة $\frac{0}{0}$

$\therefore$ **يمكن تطبيق نظرية لوبيتال**

$$\therefore \; \log y = \lim_{x\to1} \frac{1/x}{1} = 1$$

$$\log y \to 1 \text{ as } x \to 1$$

$$e^{\log y} \to e^1 \Rightarrow y \to e$$

$$\therefore \; x^{\frac{1}{(x-1)}} = e$$

تمارين

1- اختبر امكانية تطبيق نظرية رول على الدوال الاتيه واوجد قيمة x_1 فى نظرية رول اذا وجدت :

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x}{x+2} \quad (i)$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x}{x-2} \quad (ii)$$

2- اختبـــر امكانية تطبيق نظرية القيمة المتوسطة على الدالة $y = x^3$ المعرفة على الفترة [0, 6] ثم اوجد قيمة x_1 التى فى النظرية ان وجدت.

3- اوجد قيمة x_1 فى تعميم نظرية القيمة المتوسطة اذا امكن تطبيقها على الدالتين

$$F(x) = x^2 + 2x - 3 \qquad \& \qquad g(x) = x^2 - 4x + 6$$

المعرفتان على الفترة $0 \le x \le 1$

4- اوجد قيمة النهايات الاتية :

(i) $\lim\limits_{n\to 2} \dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}$

(ii) $\lim\limits_{n\to 0} \dfrac{e^x + e^{-x} - x^2 - 2}{\sin x^2 - x^2} \sqrt{b^2 - 4ac}$

(iii) $\lim\limits_{n\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1}\right)$

(iv) $\lim\limits_{n\to 0^+} \left(\dfrac{\log \sin x}{\log \tan x}\right) \sqrt{b^2 - 4ac}$

(v) $\lim\limits_{n\to 0^+} x^{\sin x}$

(vi) $\lim\limits_{n\to 0} (e^{ax} + bx)^{c/x}$

* * *

تطبيقات على التفاضلات والتقريب

Applcations for Differentiations & Approximations

لنعتبر الدالةُ $y = f(x)$ القابلة للاشتقاق على الفترة $[a, b]$ مشتقة هذه الدالة عند نقطة x فى الفترة $[a, b]$ هى :

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

أى أن النسبة $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ تقترب من قيمة محددة $f'(x)$ عندما $\Delta x \to 0$

وعلى ذلك فان :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$$

حيث $\alpha \to 0$ عندما $\Delta x \to 0$

بضرب جميع الحدود فى Δx نحصل على

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha \Delta x$$

الحد $f'(x)\Delta x$ له اهمية ويرمز له بالرمز dy ويسمى تفاضله y .

أى أن :-

$$dy = f'(x)\Delta x$$

الدالة $y = x$ أو $f(x) = x$ ومنها $f'(x) = 1$

أى أن $dy = \Delta x$ وتسمى ايضا تفاضله x وعلى ذلك فان

$$\mathbf{dy = f'(x)\,dx}$$

فمثلا اذا كانت $y = x^2$ ، $y = \sin x$ فان

$$\mathbf{Dy = \cos x\,dx \quad , \quad dy = 2x}$$

Solved Problems امثلة محلولة

مثال: اوجد Δy , dy للدالة $y = x^2$

لاى قيمة اختيارية للمتغير Δx , x وايضا عندما $\Delta x = 0.1$, $x = 20$

الحـــل :

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2$$

$$dy = 2x\Delta x$$

$$x = 20 \quad , \quad \Delta x = 0.1$$

$$\Delta y = 2(20)(0.1) + (0.1)^2 = 4.01$$

$$dy = 4$$

أى أن الخطأ هو 0.01.

مثال :

اذا كانت $y = \sqrt{x^2 + 2x + 22}$ فاوجد قيمة y التقريبية عندما $x = 1.0007$

الحـــل :

$$y' = \frac{2x + 2}{2\sqrt{x^2 + 2x + 22}} = \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 22}}$$

نأخذ

$$\Delta x = 0.0007 = 0.00028$$

$$\Delta y = y'.\Delta x = \frac{2}{5}.0.0007 = 0.00028$$

$\therefore$ القيمة التقريبية المطلوبة هى

$$y + \Delta y = 5 + 0.00028$$

مثال : ذا كانت

$$y = \sqrt{x^2 + 2x + 17}$$

فاوجد قيمة تقريبية للدالة y عندما $x = 1.9993$

<u>الحـــل</u> :

نأخذ $x = 2 \quad , \quad \Delta x = -0.0007$

$$y' = \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + 2x + 17}} \quad \Delta y \simeq y'.\Delta x$$

$$\Delta y \simeq \frac{3}{5} \cdot (-0.0007) = -0.00042$$

∴ القيمة التقريبية المطلوبة هى

$$y + \Delta y = 5 - 0.00042 = 4.99958$$

<u>مثال</u> :

اوجد قيمة مقربة للمقدار $\mathbf{(2.003)^{2.003}}$ اذا علم ان :

$$\mathbf{Ln\ 2 = 0.693}$$

<u>الحـــل</u> :

نفرض ان $y = x^x$

$$\mathbf{Ln\ y = x\ Ln\ x}$$

$$\frac{1}{y} y' = x.\frac{1}{x} + \text{Ln } x$$

$$\mathbf{y' = y\ (1 + Ln\ x) = x^x\ (1 + ln\ x)}$$

نأخذ $x = 2 \quad , \quad \Delta x = 0.003$

$$\Delta y = y'\Delta x = 4(1 + \text{Ln}2)(0.003)$$

$$= 4(1.693)(0.003) = 0.020316$$

∴ القيمة التقريبية المطلوبة هى :

$$y + \Delta y = 4 + 0.020316 = 4.020316$$

<u>مثال</u> :اذا علم $1^0 = 0.01745$ بالتقدير الدائرى فاوجد قيم تقريبية لكل

من : $\tan 46^0$, $\tan 43^0$

الحـــل :

نأخذ $y = \tan x$, $y` = \sec^2 x$

$$\Delta y \simeq y'\Delta x$$

نأخذ $x = 45^0$, $\Delta x = 1^0$ بالتقدير الدائرى

$$\Delta x = 0.01745 \quad , \quad x = \frac{\pi}{4}$$

$$y = \tan\ x = \tan\ \frac{\pi}{4} = 1$$

$$\Delta y = \sec^2 x.\Delta x = \sec^2 \frac{\pi}{4}(0.01745)$$

$$= 2(0.01745 = 0.0349$$

$$\therefore\ \tan 46^0 = y + \Delta y = 1.0349$$

ولايجاد $\tan 43^0$ نأخذ $x = 45^0$ ولكن $\Delta x = -2^0$

. وفى هذه الحالة نجد أن :

$$y = 1 \quad , \quad \Delta y = y`.\Delta x = 2(-2)(0.01745) = -0.0698$$

$$\therefore\ \tan\ 43^0 = 1 - 0.0698 = 0.9303$$

تمارين

اوجد باستخدام حساب التفاضل القيمة التقريبية لكل من :-

1- $\sqrt{7.992}$, $\sqrt{81.342}$

2- $x = 1.984$, $x = 2.048$ $\sqrt{7x^2 + x + 6}$

3- $(2.19)^{2.19}$, $(2.007)^{2.007}$, $\text{Ln}\ 2 = 0.693$

4- $\sin 48^0$, $\cot 42^0$, $1^0 = 0.01745$