الباب سابع

الاتصال Continuity

بعد تعريفنا لنهاية الدالة f عندما x تؤول إلى عدد معين a ، اى

$$\lim_{x\to a} f(x)$$

مع وضع الشرط $x \neq a$ ، وجدنا فى العدد من الحالات ان

$$\lim_{x\to a} f(x)$$

من الممكن ان تكون موجودة حتى إذا لم تكن معرفة عند a .

ولكن إذا كانت f معرفة عند $x = a$ وكانت $\lim_{x\to a} f(x)$ موجودة فان

هذه النهاية من الممكن ان تساوى f(a) او لا تساويها فإذا كانت

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

فانه يقال ان الدالة f متصلة عند $x = a$ الان نضع التعريف التالى

لاتصال دالة عند نقطة .

<u>**تعريف (1)**</u> :

يقال أن الدالة f تكون متصلة عند العدد a إذا تحققت الشروط الاتية:

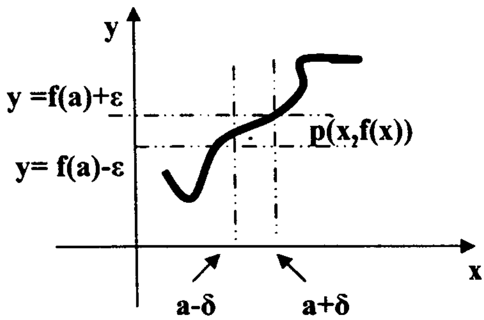
(i) f معرفة على فترة مفتوحة تحتوى العدد a

(بمعنى اخر تكون معرفة فى جوار a)

$\lim_{x \to a} f(x)$ (ii) تكون موجودة .

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \quad \text{(iii)}$$

واذا كانت f لا تحقق أى من الشروط السابقة فيقال انها غير متصلة عند $x = a$ (**discontinuous**) أو أنه يوجد عدم اتصال للدالة عند a .



إذا كانت f متصلة عند a فان النقطة $(a,\ f(a))$ تقطع على منحنى الدالة f. وتكون $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

وبعبارة أخرى (انظر الرسم) (1) Fig لكل زوجين من الخطوط الافقية $y = f(a) \pm \varepsilon$ يوجد زوجين مناظرين من الخطوط الرأسية $x = a \pm \delta$ بحيث إذا كان $a - \delta < x < a + \delta$ فان النقطة $(x, f(x))$ على منحنى الدالة تقطع فى المنطقة المظللة بالشكل 1

تعريف اتصال دالة عند قيمة معينة x_0 كالاتى

<u>مثال :</u>

اثبت أن الدالة $y = \sin x$ متصلة عند أى نقطة $(x_0\ , y_0)$.

الحــــل :

$$y_0 = \sin x_0 , y_0 + \Delta y = \sin(x_0 + \Delta x)$$

$$\therefore \ \Delta y = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0$$

باستخدام المتطابقة

$$\sin a - \sin b = \frac{2}{1}\cos\left(\frac{a+b}{2}\right).\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\Delta y = 2\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right).\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 2 \lim_{\Delta x \to 0}\left(\sin\frac{\Delta x}{2}\right), \lim_{\Delta x \to 0}\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

بما ان $x_0 + \left(\frac{\Delta x}{2}\right)$ محدودة

$$\lim_{\Delta x \to 0}\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right) = 0$$

$$\therefore \quad \lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$$

تعريف (2) :

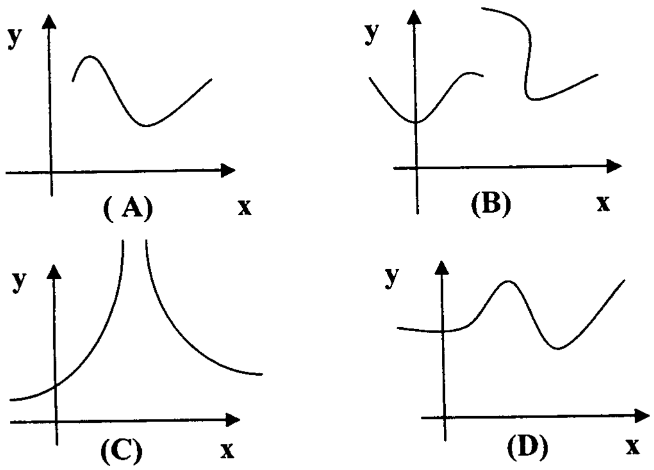
اذا كانت f معرفة على فترة مفتوحة تحتوى العدد **a** فان f تكون متصلة عند a اذا كان لكل $\varepsilon < 0$ يوجد عدد صغير $0 \geq \delta$ بحيث يكون:

$$\text{if} \ \ |x - a| < \delta, \ \ \text{then} \ \ |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

ملحوظة : فى هذا التعريف نلاحظ اننا لم نضع الشرط $0 < |x - a|$ لان f تكون معرفة عند a وأيضا عند $x = a$ فان

$$| f(x) - f(a) | = | f(a) - f(a) | = 0 < \varepsilon$$

منحنيات بعض الدوال الغير متصلة موضح بالاشكال الاتية :



اسباب عدم الاتصال

فى الشكل (A) الدالة غير متصلة لانها غير معرفة عند $x = a$

∴ (B)/(C) الدالة غير معرفة عند a لان $\lim_{x \to a} f(x)$ غير موجودة

∴ (D) قيمة الدالة عند a لا تساوى قيمة النهاية عند a .

اذا كانت الدالة f معرفة عند كل عدد فى الفترة المفتوحة (a, b) فانها يقال ان f متصلة على الفترة المفتوحة (a, b) .

<u>تعريف (4)</u>: إذا كانت الدالة f معرفة على الفترة المغلقة $[a, b]$ فان

الدالة f تكون متصلة على [a, b] إذا كانت متصلة على (a, b)

وبالاضافة لذلك يجب ان يكون

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a), \lim_{x\to b} f(x) = f(b)$$

إذا كانت f لها نهاية يمنى أو نهاية يسرى كما ذكرنا فى التعريف السابق فانه يقال ان الدالة متصلة من اليمين عند a أو متصلة على اليسار من b .

مثـــال :إذا كانت

$$f(x) = \sqrt{9 - x^2}$$

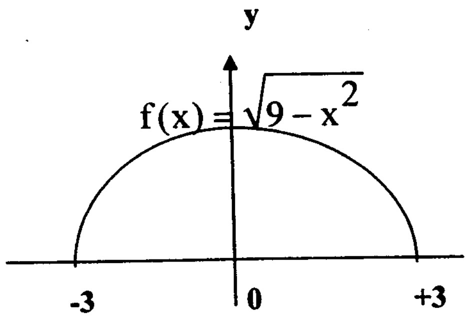
ارسم منحنى الدالة f وبين أن الدالة متصلة على الفترة المغلقة [-3, 3] . [-3, 3]

الحـــل :

$$y = \sqrt{9 - x^2} > 0$$

$$y^2 = 9 - x^2 \Rightarrow x^2 + y^2 \geq 9 = (3)^2$$

وهذه معادلة دائرة نصف قطرها 3 ومركزها نقطة الاصل وبما ان $y > 0$ فان المنحنى يمثل الجزء العلوى من الدائرة فقط



اذا كانت $-3 < C < 3$ فان

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} \sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-c^2} = f(c)$$

من التعريف نجد ان f متصلة عند $C: -3 < C < 3$ - يبقى اثبات أن النهايات عند بداية ونهاية الفترة تكون موجودة .

الدالة متصلة من اليمين :

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-9} = 0 = f(-3)$$

الدالة متصلة من اليسار :

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-9} = 0 = f(3)$$

بذلك تكون الدالة متصلة على الفترة المغلقة [-3, 3] .

نظرية القيمة الوسيطية

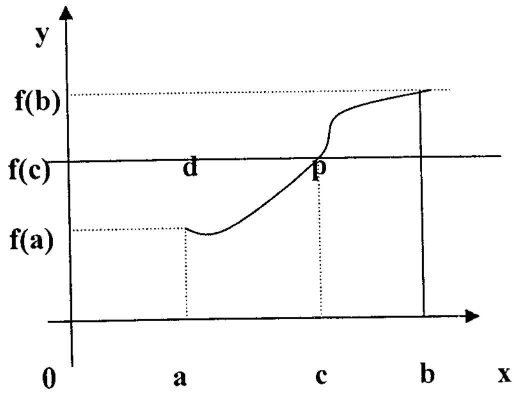
Intermediate value theorem

إذا كانت الدالة f دالة متصلة على الفترة المغلقة [a, b] وكانت

$f(a) \neq f(b)$

انه يوجد على الاقل عدد واحد $C \in (a,b)$ بحيث يكون

$f(c) = d$



ومعنى هذه النظرية ان الدالة المتصلة لاتتخطى أى أعداد أثناء مرورها من نقطة البداية إلى نقطة النهاية فإذا كانت $f(a) \neq f(b)$ وكان العدد d محصورا بين $f(a), f(b)$ فان النقطتين $Q_1 = (a, f(a))$.
$Q_2 = (b, f(b))$ ـــع فى جهتين مختلفتين من الخط الافقى $y = d$ كما بالشكل وبما أن f دالة متصلة على الفترة $[a, b]$ فان المنحنى $y = f(x)$ حيث $a \le x \le b$ يكون منحنى متصل من Q_1 إلى Q_2 لذلك فهو يقطع الخط $y = d$
عند نقطة ما ولتكن $Pz(c, d)$ حيث $a < c < d$ وأيضا بما ان P تقطع على المنحنى فهى تحقق معادلتين أى أن $f(c) = d$

Solved Problems امثلة محلولة

مثال : إذا كانت الدالة $f(x) = \sqrt{x^3 + 1}$ متصلة على الفترة المغلقة

[0, 2] فاوجد قيمة x عندما $f(x)=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

<u>الحـل</u> :

$$f(0)=\sqrt{0+1}=1$$

$$f(2)=\sqrt{8+1}=3$$

$$1<\frac{\sqrt{5}}{2}<3, \text{put} \quad d=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$f(0)\neq f(3)$$

فان الدالة تحقق النظرية . وبوضع $d=\frac{\sqrt{5}}{2}$ بما ان $1<\frac{\sqrt{5}}{2}<3$ يوجد

عدد $C\in[0,2]$ بحيث يكون

$$f(c)=d$$

$$f(c)=\frac{\sqrt{5}}{2} \qquad \therefore \sqrt{c^3+1}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$c^3=\frac{5}{2}-1=\frac{1}{4} \qquad c=\left(\frac{1}{4}\right)^{1/3}=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$$

<u>مثـال</u> :حقق نظرية القيمة الوسيطية للدالة $f(x)=\sqrt{x+1}$ على الفتـرة المغلقة [3, 2 4] .

<u>الحـل</u> : نلاحظ ان الدالة متصلة على الفترة المعطاه كما أن

$$f(3)=\sqrt{3+1}=2 \qquad f(24)=\sqrt{24+1}=5$$

$$\therefore f(3)\neq f(24)$$

فهى تحقق شروط النظرية .

إذا كانت d عدد حقيقى بين 5 ,2 فيجب ان نجد عـــدد $c \in [3,24]$ بحيث يكون $\mathbf{f(c) = d}$ أى $\sqrt{c+1} = d$ بالتربيع

$$\Rightarrow \quad C+1 = d^2 \Rightarrow c = d^2 - 1$$

$$4 < d^2 < 25 \therefore 2 < d < 5$$

$$3 < c < 24 \therefore 3 < d^2 - f < 24$$

أى أن $C \in (3,24)$ كما ان

$$f(c) = f(d^2 - 1) = \sqrt{d^2 - 1 + 1} = d$$

<u>نتيجة</u> : إذا كانت الدالة f متصلة ليس لها اصفار على الفترة [a, b] فان

$\mathbf{f(x) < 0, f(x) > 0}$ **لكل** $x \in [a,b]$.

صيغة تيلور

<u>نظرية</u> : إذا كانت f(x) دالة كثيرة حدود من الدرجة n وكـــان a اى عدد حقيقى فان :

$$f(x) = f(a) + (x-a)\frac{f'(a)}{1!} + (x-a)^2 \frac{f''(a)}{2!} + \dots + (x-a)^n \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

وتسمى هذه الصيغة بمفكوك $\mathbf{f(x)}$ فى قوى $\mathbf{(x-a)}$.

<u>البرهان</u> :

حيث ان $f(x)$ كثيرة حدود من الدرجة n فى x فانه يمكن كتابتها كالآتي

$$\mathbf{f(x) = C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + \dots + C_n(x-a)^n.}$$

حيث $C_0, C_1, C_2, \dots, C_n$ ثوابت حقيقية $C_n \neq 0$.

باجراء عملية التفاضل بالتتابع نحصل على

$$f'(x) = C_1 + 2C_2(x-a) + 3C_3(x-a)^2 + \dots + nC_n(x-a)^{n-1}$$

$$f''(x) = 2C_2 + 3 \times 2C_3(x-a) + \dots + n(n-1)C_n(x-a)^{n-2}$$

$$f'''(x) = 3 \times 2C_3 + \dots + n(n-1)(n-2)C_n(x-a)^{n-3}$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$f^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)\dots 3 \times 2 \times 1C_n.$$

بالتعويض عن $x = a$ نحصل على

$$f(a) = C_0, \qquad f'(a) = C_1, \qquad f''(a)2!C_2,$$

$$f'''(a) = 3!C_3, \qquad \dots\ ., \qquad f^{(n)}(a) = n!C_n$$

وبالتعويض عن هذه الثوابت نحصل على

Solved Problems امثلة محلولة

مثال : اوجد مفكوك كثيرة الحدود $\mathbf{x^4 - 3x^2 + 2x - 5}$

فى قوى $(x-1)$.

الحـــل: put x-1=0 then x=1

$$f(x) = x^4 - 3x^2 + 2x - 5, \qquad f(1) = -5$$
$$f'(x) = 4x^3 - 6x + 2, \qquad f'(1) = 0$$
$$f''(x) = 12x^2 - 6, \qquad f''(1) = 6$$
$$f'''(x) = 24x, \qquad f'''(1) = 24$$
$$f^{(4)}(x) = 24, \qquad f^{(4)}(1) = 24$$

والان

$$f(x) = -5 + (x-1)(0) + (x-1)^2 \frac{6}{2!} + (x-1)^3 \frac{24}{3!} + 9x-1)^4 \frac{24}{4!}$$
$$f(x) = -5 + 3(x-1)^2 + 4(x-1)^3 + (x-1)^4$$

نظرية : إذا كانت $f(x)$ دالة حيث $f^{(n)}(a)$ لها وجود وكانت $p_n(x)$ دالة كثيرة حدود من درجة n فى x حيث

$$p_n(a) = f(a), \qquad p_n^{(r)}(a) = f^{(r)}(a), \qquad r=1,2,3,\ldots,n$$

فان

$$p_n(x) = f(a) + (x-a)\frac{f'(a)}{1!} + (x-a)^2 \frac{f''(a)}{2!} + \ldots + (x-a)^n \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

* هذه النظرية نتيجة مباشرة من النظرية السابقة .
* تسمى $p_n(x)$ **بكثيرة حدود تيلور** من درجة n للدالة $f(x)$ عند a.

مثال : اوجد كثيرة حدود تيلور من درجة n للدالة e^x عند $x = 0$.

الحــــل :

$$f^{(r)}(x) = e^{x}, \qquad f^{(r)}(0) = 1$$

$$\therefore\ p_n(x) = f(0) + x\frac{f'(0)}{1!} + x^2\frac{f''(0)}{2!} + \ldots + x^n\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

$$\therefore\ p_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots = \frac{x^n}{n!}.$$

مثال : اوجد كثيرة حدود تيلور من الدرجة الثالثـــة للدالـــة $\sin x$ عنـــد $x = \frac{\pi}{4}$

الحــل :

$$p_3(x) = f(\frac{\pi}{4}) + (x - \frac{\pi}{4})\frac{f'(\frac{\pi}{4})}{1!} + (x - \frac{\pi}{4})^2\frac{f''(\frac{\pi}{4})}{2!} + (x - \frac{\pi}{4})^3\frac{f'''(\frac{\pi}{4})}{3!}$$

$$f(x) = \sin x, \qquad f(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f'(x) = \cos x, \qquad f'(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f''(x) = \sin x, \qquad f''(\frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f'''(x) = -\cos x, \qquad f'''(\frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore\ p_3(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}(x - \frac{\pi}{4}) - \frac{1}{2\sqrt{2}}(x - \frac{\pi}{4})^2 - \frac{1}{6\sqrt{2}}(x - \frac{\pi}{4})^3.$$

اذا كانت $p_n(x)$ هى كثيرة حدود تيلور من درجة n للدالة

$p_n(a) = f(a)$ أى أن كثيرة الحدود $p_n(x)$ تعطى نفس قيمة الدالة $f(x)$ عند $x = a$ ولكن لقيم $x \neq a$ أى ان قدر من الدقة تكـــون $p_n(x)$ كتقريب للدالة $f(x)$. من الطبيعى اذا كانت x_1 قريبة مـــن a فان الفرق $f(x_1) - p_n(x_1)$ يكون صغيرا .

قانون تيلور بالباقى

نظرية :

اذا كانت $f(x)$ دالة بحيث ان $f^{(n)}(x)$ متـــصلة فـــى الفتـــرة $[a, b]$ وايضا $f^{(n+1)}(x)$ لها وجـــود فـــى الفتـــرة $]a, b[$ فانـــه لكـــل $x \in [a,b]$ يوجد عدد حقيقى ξ يقع بين a, x بحيث ان

$$f(x) = f(a) + (x-a)\frac{f'(a)}{1!} + (x-a)^2\frac{f''(a)}{2!} + \dots$$

$$+ (x-a)^n\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + R_{n+1}(x)$$

حيث

$$R_{n+1}(x) = \begin{cases} (x-a)^{n+1}\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}, & x \neq a \\ 0, & x = a \end{cases}$$

تسمى الصيغة السابقة **بقانون تيلور بالباقى** .

Solved Problems امثلة محلولة

مثال : اوجد قانون تيلور بالباقى للدالة $f(x) = \sin x$

فى قوى عند $(x - \frac{\pi}{4})$

الحـل :

$$f(x) = \sin x, \qquad f(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f'(x) = \cos x, \qquad f'(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f''(x) = \sin x, \qquad f''(\frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f'''(x) = -\cos x, \qquad f'''(\frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$$

$$f^{(n)}(x) = \sin(x + n\frac{\pi}{4}), \qquad f^{(n)}(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{4})$$

$$f^{(n+1)}(x) = \sin(x + (n+1)\frac{\pi}{4}), \qquad f^{(n+1)}(\xi) = \sin(\xi + (n+1)\frac{\pi}{4})$$

$$f(x) = f(\frac{\pi}{4}) + (x - \frac{\pi}{4})\frac{f'(\frac{\pi}{4})}{1!} + (x - \frac{\pi}{4})^2\frac{f''(\frac{\pi}{4})}{2!} + (x - \frac{\pi}{4})^3\frac{f'''(\frac{\pi}{4})}{3!} + \ldots +$$

$$+(x - \frac{\pi}{4})^2\frac{f^{(n)}(\frac{\pi}{4})}{n!} + (x - \frac{\pi}{4})^{n+1}\frac{f^{(n+1)}(\frac{\pi}{4})}{(n+1)!}.$$

$$\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}(x-\frac{\pi}{4}) - \frac{1}{2\sqrt{2}}(x-\frac{\pi}{4})^2 - \frac{1}{6\sqrt{2}}(x-\frac{\pi}{4})^3 + \dots +$$

$$+ (x-\frac{\pi}{4})^n \frac{\sin(\frac{\pi}{4}+n.\frac{\pi}{2})}{n!} = (x-\frac{\pi}{4})^{n+1} \frac{\sin(\xi+(n+1).\frac{\pi}{2})}{(n+1)!}$$

مثال :

فى المثال السابق ، اوجد قانون تيلور بالباقى للدالـــة $\sin\ x$ فـــى قـــوى $(x-\frac{\pi}{6})$ ، ثم استخدم هذا المفكوك لحساب $\sin 31^0$.

الحـــل :

بنفس الطريقة فى المثال السابق ولكن $a=\frac{\pi}{6}$.

$$\sin x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}(x-\frac{\pi}{6}) - \frac{1}{4}(x-\frac{\pi}{6})^2 - \frac{\sqrt{3}}{12}(x-\frac{\pi}{6})^3 + \dots +$$

$$+ (x-\frac{\pi}{6})^n \frac{1}{n!}\sin(\frac{\pi}{6}+n\frac{\pi}{2}) + (x-\frac{\pi}{6})^{n+1}\frac{1}{(n+1)!}\sin(\xi+.(n+1)\frac{\pi}{2})$$

لحساب $\sin 31^0$ نحولها **للتقدير الدائرى**

$$x = 31^0 = \frac{31}{180}\pi$$

$$\sin 31 = \sin\frac{31\pi}{180} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}(\frac{\pi}{180}) - \frac{1}{4}(\frac{\pi}{180})^2 - \frac{\sqrt{3}}{12}(\frac{\pi}{180})^3 + \dots +$$

$$+ \frac{\sin(\frac{\pi}{6}) + n(\frac{\pi}{2})}{n!}(\frac{\pi}{180})^n$$

متسلسلة تيلور

فى قانون تيلور بالباقى للدالة f(x) فى قوى a−x وهو

$$f(x)=f(a)+(x-a)\frac{f'(a)}{1!}+(x-a)^2\frac{f''(a)}{2!}+\ldots+(x-a)^n\frac{f^{(n)}(a)}{n!}+R_{n+1}(x)$$

قد يحدث أن $R_{n+1}(x)\to 0$ عندما $n\to\infty$ وتكون المتسلسلة

$$f(x)=f(a)+(x-a)\frac{f'(a)}{1!}+(x-a)^2\frac{f''(a)}{2!}+\ldots+(x-a)^n\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

تقاربية .

* تسمى هذه المتسلسلة **بمتسلسلة تيلور** للدالة f(x) فى قوى $(x-a)$

وبأخذ a نحصل على

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(a)}{1!}x+\frac{f''(a)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^n(a)}{n!}x^n+\ldots$$

وتسمى هذه **بمتسلسلة مكلورين Maclaurin** للدالة f(x) فى قوى x

<u>مثال</u> : اوجد متسلسلة مكلورين للدالة cos x والدالة ln(1 + x) فـــى قوى x التصاعدية .

<u>الحـــل</u> :

$$f(x)=\cos x,\qquad f(0)=1$$
$$f'(x)=-\sin x,\qquad f'(0)=0$$
$$f''(x)=-\cos x,\qquad f''(0)=-1$$
$$f'''(x)=\sin x,\qquad f'''(0)=0$$

$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$

$$f^{(n)}(x) = \cos(x + n.\frac{\pi}{2}), \qquad f^{(n)}(0) = 0, \quad n \text{ is odd}$$

$$f^{(n)}(0) = \pm 1, \quad n \text{ is even.}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} + \dots$$

$$\mathbf{f(x) = \ln(1 + x), \qquad f(0) = 0}$$

$$f'(x) = \frac{1}{(1+x)}, \qquad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = \frac{1}{(1+x)^2}, \qquad f''(0) = -1$$

$$f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}, \qquad f'''(0) = 2$$

$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}, \qquad f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

وتكون متسلسلة مكلورين لهذه الدالة هى

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots$$

تمارين

1-اوجد مفكوك $x^4 - x + 5$ فى قوى $2-x$.

2- استخدم متسلسلة مكلورين لاثبات أن

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

3- اوجد متسلسلة مكلورين لكل من الدوال $\sin x,\ \cosh x$.

4- اوجد متسلسلة مكلورين لكل من الدوال $\tan x\ ,\ \cos x$ فـــى قـــوى $x - \pi/4$.

5- اوجد متسلسلة مكلورين لكل من الدوال $e^x \sin x,\ e^x \cos x$.

* * *