

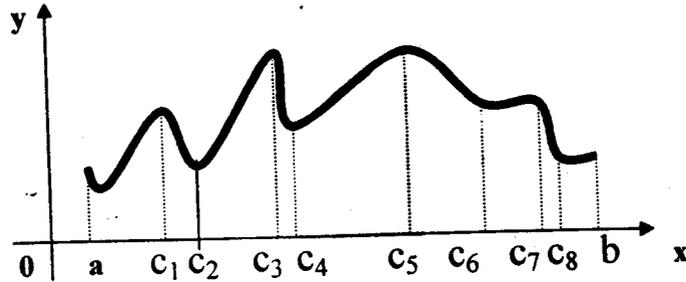
الباب الثامن

تطبيقات على التفاضل

النهايات العظمى والصغرى المحلية

Local Extrema of Functions

اعتبر المنحنى الموضح بشكل (1) والذي يوضح تغير كمية طبيعية بالنسبة للزمن. في هذه الحالة محور x يمثل الزمن بينما يمثل الاحداثى y قيمة هذه الكمية عند مختلف الازمنة . فمثلا قيم y من الممكن ان تمثل قياسات طبيعية مثل درجة الحرارة ، المقاومة في الدوائر الكهربائية ، ضغط الدم لشخص ما أو تعداد البكتريا في البنات ، الخ
كما هو مبين بالشكل التالى:



بالنظر إلى المنحنى نجد ان هذه الكمية تزيد مع الزمن فى الفترة

$[a, C_1]$ بينما تقل في الفترة $[C_1, C_2]$ وتزداد في الفترة $[C_2, C_4]$ وهكذا .

إذا اعتبرنا الفترة $[C_1, C_4]$ نجد ان هذه الكمية تأخذ أقصى قيمة لها عند C_3 وأصغر قيمة (min.) لها عند C_2 . في الفترات الأخرى توجد قيم أخرى عظمى وصغرى .

إذا كان المنحنى في الشكل السابق يمثل منحنى الدالة f وتغيرها مع الاحداثى x فسوف نضع الصيغ الرياضية لتزايد الدالة وتناقصها بتغيير x في التعريف التالي :

تعريف (1) :

بفرض ان الدالة f معرفة على الفترة I وان $x_1, x_2 \in I$ فان:

(i) يقال ان f دالة تزايدية على I اذا كان

$$f(x_1) < f(x_2) \forall x_1 < x_2$$

(ii) يقال ان f دالة تناقصية على I اذا كان

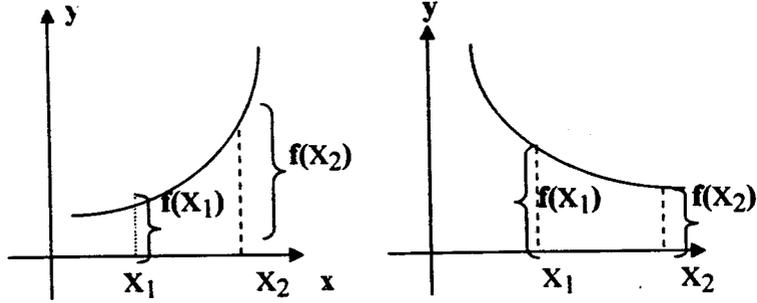
$$f(x_1) > f(x_2) \forall x_1 < x_2$$

(iii) يقال ان f دالة ثابتة على I اذا كان

$$f(x_1) = f(x_2) \forall x_1, x_2 \in I.$$

التمثيل الهندسى لهذا التعريف في الشكل التالي ونلاحظ انه اذا كانت f

دالة ثابتة فانه يمكن تمثيلها بخط افقى موازى لمحور x .



Increasing function

Decreasing function

سوف نستخدم الرمز f او الرمز $f(x)$ للتعبير عن تزايد او تناقص الدالة .

تعريف (2) :

بفرض ان الدالة f معرفة على الفترة I وكان $C \in I$ فان:

(i) $f(c)$ تكون قيمة عظمى (maximum value) للدالة f على

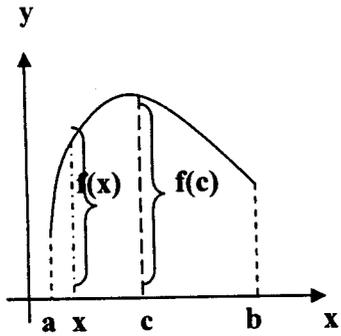
I اذا كان :

$$f(x) \leq f(c) \quad \forall x \in I$$

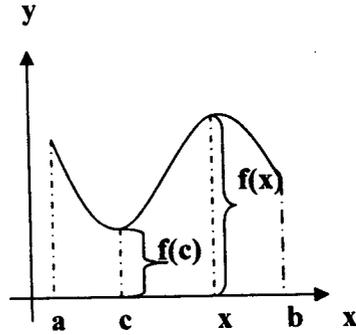
(ii) $f(c)$ تكون قيمة صغرى (minimum value) للدالة f على

I اذا كان :

$$f(x) \geq f(c) \quad \forall x \in I$$



(i) Maximum value $f(c)$



(ii) Minimum value $f(c)$

Fig. 3

القيم العظمى والصغرى للدوال موضحة في Fig. (3) ونلاحظ اننا
رسمنا I على شكل فترة مغلقة $[a, b]$ ولكن تعريف (2) يكون
صحيحا لاي فترة I .

نلاحظ ان المنحنيات في Fig. (3) تكون المماسات لها عند c افقية
(horizontal) عند النقطة $(c, f(c))$ ولكن القيم العظمى والصغرى
للدالة من الممكن ان تحدث ايضا في بعض الاحوال عند ركن من
اركان الدالة Corners او عند نهايتي الفترة
(end – points of domain) دالة يمكن ان تأخذ قيم عظمى أو
صغرى اكثر من مرة فمثلا نجد انه اذا كانت f دالة ثابتة فان $f(c)$

تكون قيمة عظمى وقيمة صغرى عند حقيقي c . بعض الدوال من الممكن ان تأخذ قيمة عظمى ولا يكون لها قيمة صغرى على فترة التعريف والعكس صحيح وهناك ايضا بعض الدوال لا يكون لها قيمة عظمى او قيمة صغرى فمثلا نعتبر الدالة $f(x) = 1/x, x \neq 0$ الموضحة فى الشكل التالى:

Fig. 3

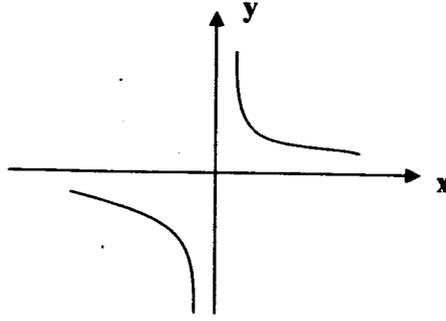


Fig. 4

نلاحظ ان f تكون غير متصلة عند (0) . على الفترة $[-1, 1]$ نجد ان الدالة لا تكون لها قيمة عظمى او قيمة صغرى (لماذا؟).
وايضا على الفترة $(0, 1)$ اذا كان $0 < a < 1$ فانه يوجد دائما عدنان x_1, x_2 فى $(0, 1)$ بحيث يكون

$$f(x_1) > f(a) \text{ and } f(x_2) < f(a)$$

- على الفترة النصف مفتوحة $(0, 1)$ توجد قيمة صغرى $f(1)$ ولكن لا توجد قيمة عظمى للدالة .

- على الفترة النصف مفتوحة $(-1, 0)$ توجد قيمة صغرى $f(-1)$ ولكن لا توجد قيمة صغرى للدالة .

- على الفترة $[1, 2]$ نجد ان f لها قيمة عظمى $f(1)$ وقيمة صغرى $f(2)$ من التحليل السابق نجد ان وجود قيم عظمى أو قيم صغرى للدالة يمكن ان يعتمد على اتصال الدالة وايضا على ما اذا كانت الفترة المعرفة عليها للدالة اذا كانت مفتوحة او مغلقة او نصف مفتوحة . النظرية التالية تحدد شروط وجود نهاية عظمى أو صغرى للدالة على فترة التعريف :

نظرية (1) :

وإذا كانت الدالة f متصلة على الفترة المغلقة $[a, b]$ فإن f تأخذ قيمة صغرى أو قيمة عظمى على الاقل مرة واحدة في $[a, b]$.

تعريف : (القيم العظمى والصغرى والمحلية)

إذا كان c أى عدد فى نطاق الدالة f فإن :

(i) $f(c)$ تكون قيمة عظمى محلية (local maximum) اذا وجدت فترة مفتوحة (a, b) تحتوى العدد c بحيث يكون :

$$f(x) \leq f(c) \quad \forall x \in (a, b)$$

(ii) $f(c)$ تكون قيمة صغرى محلية (local minimum) اذا وجدت

فترة مفتوحة (a, b) تحتوى العدد c بحيث يكون :

$$f(x) \geq f(c) \quad \forall x \in (a, b)$$

ملحوظة :

كلمة محلية (local) تستخدم لتحديد ان هذه النهاية سواء كانت عظمى أو صغرى تكون موجودة داخل فترة صغيرة مفتوحة وبحيث تأخذ f اكبر أو أصغر قيمة لها داخل هذه الفترة ولكن خارج هذه الفترة من الممكن ان تأخذ f قيما (values) اكبر من او اصغر من القيم التي تأخذها داخل الفترة فمثلا نعتبر شكل الدالة الموضح فى التالى:

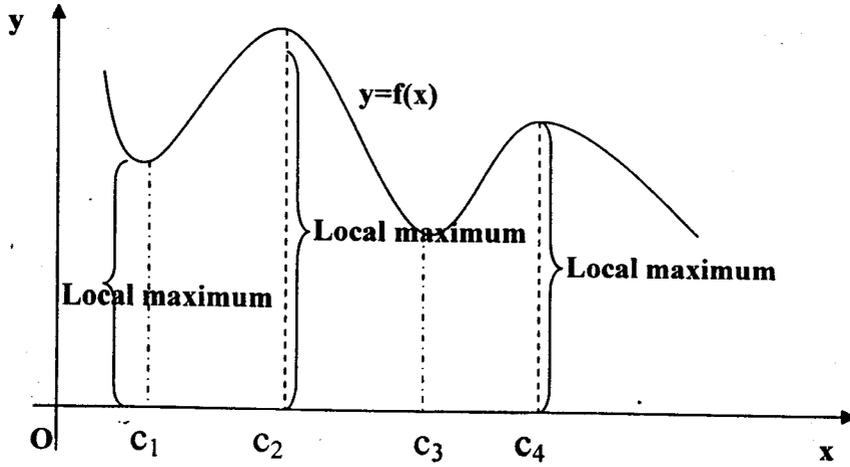


Fig. 5

نجد ان القيمة الصغرى المحلية عند C_1 اكبر من القيمة العظمى المحلية

عند C_4 لذلك سوف نستخدم التعبير الاتى :

القيمة العظمى المطلقة (absolute. max)

والقيمة الصغرى المطلقة (absolute min)

للتعبير عن اكبر أو اصغر قيمتان للدالة فى نطاقها .

فى Fig.(5) نجد ان عند النقاط المناظرة للقيم العظمى والصغرى المحلية يكون المماس للمنحنى اما افقى او ان هناك ركن للمنحنى (corner) كما عند C_3 وبذلك نجد ان الاحداثى x لهذه النقاط يكون عدد بحيث تكون مشتقة الدالة عنده اما صفر او غير موجودة (كما عند C_3) .

نظرية (2) :

اذا كانت f دالة متصلة على فترة مغلقة $[a, b]$ وتأخذ قيمة عظمى أو صغرى عند عدد c داخل الفترة المفتوحة (a, b) فان $f'(c)$ اما تساوى صفر او $f'(c)$ غير موجودة .

تعريف (النقطة الحرجة) :

النقطة C فى نطاق الدالة F تسمى النقطة حرجة (Critical point) اذا كان :

$$f'(c) = 0 \text{ أو } f'(c) \text{ غير موجودة .}$$

تزايد وتناقص الدوال باستخدام المشتقة الاولى

نظرية (3) :

إذا كانت f دالة متصلة على الفترة المغلقة $[a, b]$ وقابلة للتفاضل على المفتوحة (a, b) فإن:

(i) إذا كانت $f'(x) > 0$ لكل قيم $x \in (a, b)$ فإن f دالة تزايدية على $[a, b]$

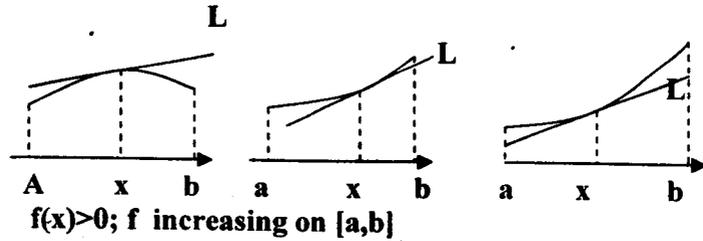
(ii) إذا كانت $f'(x) < 0$ لكل قيم $x \in (a, b)$ فإن f دالة تناقصية على $[a, b]$

التفسير الهندسي لهذه النظرية موضحا في الأشكال الآتية حيث نلاحظ

ان خط المماس للدالة في عند أى نقطة $x \in (a, b)$ يرتفع الى اعلى

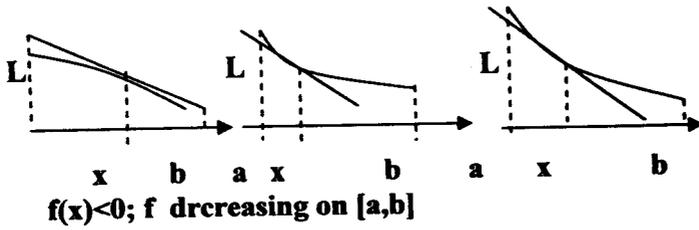
لان $f'(x) > 0$ وبالتالي فإن المنحنى ايضا يرتفع الى اعلى بتزايد x

وعلى ذلك فإن الدالة تزايدية .



وأیضا فى الشكل التالى انه $f'(x) < 0$ لذلك فان كلا من المنحنى

والمماس له عند x يهبطان لاسفل بتزايد x .



لذلك فان الدالة تناقصية عندما $f(x) < 0$.

اختبار المشتقة الاولى The first derivative test

نظرية (4) :

بفرض ان C نقطة حرجة للدالة f , (a, b) فترة مفتوحة تحتوى العدد C وبفرض ان f دالة متصلة على (a, b) مع احتمال عدم حدوث هذا عند c نفسها فان :

(i) If $f'(x) > 0$ for $a < x < c$ and $f'(x) < 0$ for $c < x < b$

فان $f(c)$ تكون قيمة عظمى محلية للدالة f

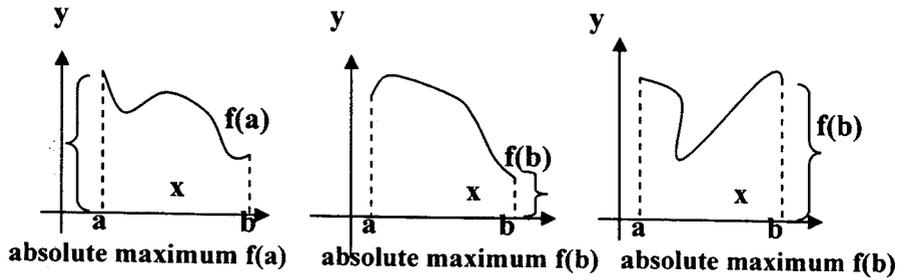
(ii) If $f'(x) < 0$ for $a < x < c$ and $f'(x) < 0$ for $c < x < b$

فان $f(c)$ تكون قيمة صغرى محلية للدالة f

(iii) If $f'(x) > 0$ or if $f'(x) < 0 \quad \forall x \in (a, b); x \neq C$

فان $f(c)$ ليست قيمة عظمى أو صغرى محلية للدالة f

من نظرية (2) نجد انه اذا كانت f دالة متصلة على الفترة المغلقة $[a, b]$ فان القيم العظمى والصغرى المطلقة تحدث عند النقاط الحرجة للدالة f' او عند نهايتى الفترة a أو b الاشكال التالية توضح هذا المفهوم.



طريقة ايجاد القيم العظمى والصغرى المطلقة :

اذا كانت f دالة متصلة على الفترة المغلقة $[a, b]$

- (i) نوجد كل النقاط الحرجة للدالة f
- (ii) نحسب $f(c)$ عند كل النقاط الحرجة c .
- (iii) نحسب $f(a)$, $f(b)$.
- (iv) القيم العظمى والصغرى المطلقة على $[a, b]$ هى اكبر واصغر قيمة للدالة من القيم المحسوبة فى (ii).

امثلة محلولة Solved Problems

مثال: اوجد النقطة الحرجة للدالة

$$f(x) = (x + 5)^2 \sqrt[3]{x-4}$$

الحل :

$$f(x) = (x + 5)^2 (x - 4)^{1/3}$$

نوجد $f'(x)$

$$f'(x) = (x + 5)^2 \left(\frac{1}{3}\right)(x - 4)^{-2/3} + 2(x + 5)(x - 4)^{1/3}$$

$$= \frac{(x + 5)^2}{3(x - 4)^{2/3}} + 2(x + 5)(x - 4)^{1/3}$$

$$= \frac{(x + 5)^2 + 6(x + 5)(x - 4)}{3(x - 4)^{2/3}}$$

$$f'(x) = \frac{(x + 5)(7x - 19)}{3(x - 4)^{2/3}}$$

بوضع $f(x) = 0$ نجد ان $x = -5, x = 19/7$

ايضا نجد ان $f(x)$ غير معرفة عند $x - 4 = 0$ أي عند $x = 4$

فتكون النقط الحرجة هي

$$x_1 = -5, x_2 = \frac{19}{7}, x_3 = 4$$

نوجد قيم f عند النقاط الحرجة

$$f(x_1) = f(-5) = 0$$

$$f(x_2) = f\left(\frac{19}{7}\right) = -114.26$$

$$f(x_2) = f(4) = 0$$

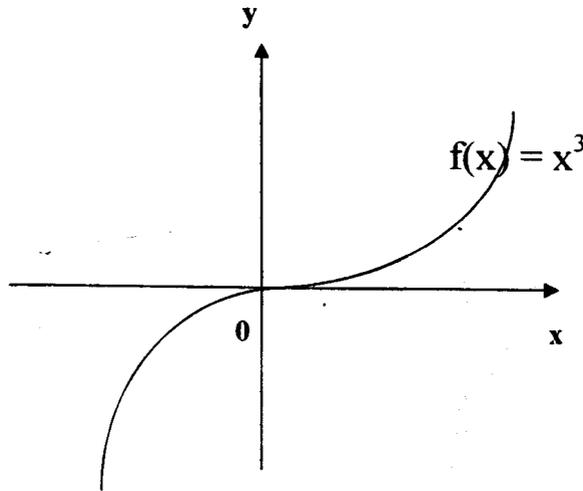
∴ النقاط الحرجة هي $(-5, 0), \left(\frac{19}{7}, -114.26\right), (4, 0)$

مثال:

اثبت ان الدالة $f(x) = x^3$ لاتوجد لها قيم عظمى أو صغرى محلية

الحل: نوجد مشتقة الدالة

$$f'(x) = 3x^2$$



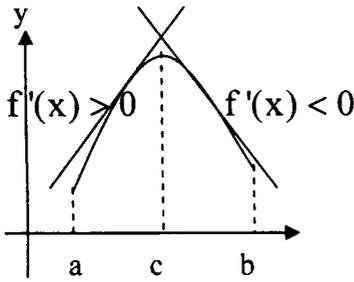
عندما $f(x) = 0$ نجد ان $x = 0$

اى ان $x = 0$ هة النقطة الوحيدة الحرجة للدالة ولكن

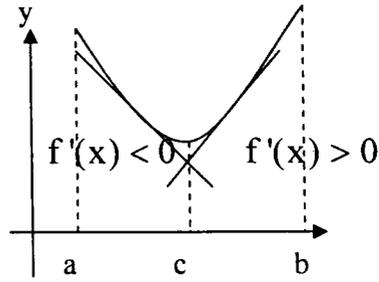
عندما $x < 0$ نجد ان $f(x) < 0$

وعندما $x > 0$ نجد ان $f(x) > 0$

اى انه لاتوجد فترة مفتوحة أو مغلقة تحتوى النقطة $x = 0$ بحيث تكون $f(0) = 0$ هي اكبر أو اصغر قيمة للدالة على هذه الفترة وبالتالي فان هذه الدالة لاتوجد لها قيم عظمى او صغرى محلية .



(i) Local maximum



(ii) local minimum

مثال: اوجد القيم العظمى والصغرى المحلية للدالة

$$F(x) = x^{1/3}(8 - x)$$

الحل:

$$f'(x) = x^{1/3}(-1) + (8 - x)\left(\frac{1}{3}\right)x^{-2/3} = \frac{-3x + 8 - x}{3x^{2/3}} = \frac{4(2 - x)}{3x^{2/3}}$$

النقط الحرجة للدالة عند $x = 0, x = 2$ لذلك نعتبر اشارة $f'(x)$ على الفترات $(-\infty, 0), (0, 2), (2, \infty)$

نكون الجدول التالي وذلك بان نأخذ في كل فترة عدد k ينتمى الى هذه الفترة

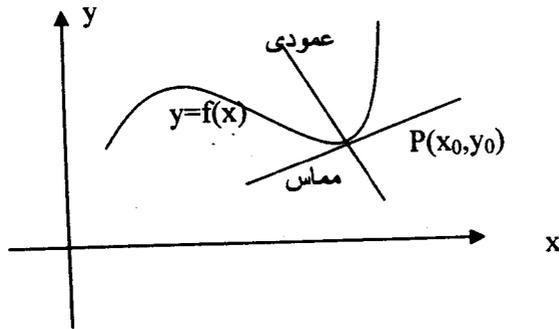
Interval	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
K	-1	1	8
Test value of $f'(x)$	4	$\frac{4}{3}$	-2
Sign of $f'(x)$	+	+	-
Variation of $f(x)$	Increasing on $(-\infty, 0)$	Increasing on $(0, 2)$	Decreasing on $(2, \infty)$

من هذا الجدول نجد ان اشارة $f'(x)$ تتغير عند العدد 2 من + الى - وبالتالي توجد قيمة عظمى محلية للدالة عند $x = 2$ وتساوى $f(x) = 6\sqrt{2}$

تطبيقات هندسية

علمنا فيمات سبق ان اى دالة $y = f(x)$ تمثل معادلة منحنى فاذا كانت نقطة معلومة على هذا المنحنى فان $P(x_0, y_0)$

$$f'_{x_0} = dy/dx |_{(x_0, y_0)}$$



تمثل ميل المماس لهذا المنحنى عند النقطة P .

1- معادلة المماس للمنحنى: معادلة المماس للمنحنى $y = f(x)$ عند

النقطة $P(x_0, y_0)$ هي

$$[y - y_0] / [x - x_0] = f'_{x_0}$$

2- معادلة العمودي للمنحنى: معادلة العمودي $y = f(x)$ عند

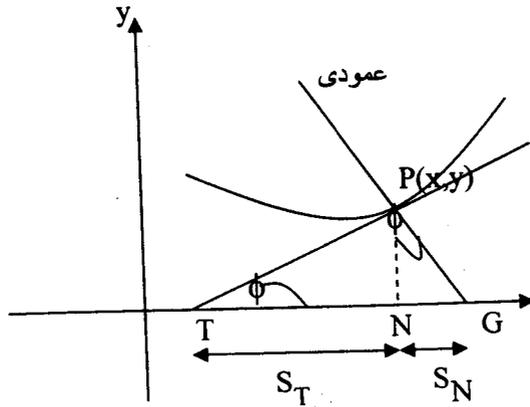
النقطة $P(x_0, y_0)$ هي

$$y - y_0 / x - x_0 = -1 / f'_{x_0}$$

3- طول تحت المماس subtangent وتحت العمودي subnormal

وطول المماس وطول العمودي :

لنفرض ان $y = f(x)$ معادلة منحنى معلوم وان $P(x, y)$ هي نقطة ما على هذا المنحنى ونفرض أن المماس والعمودي P يقطعان محور X في C & T على الترتيب وان N هي مسقط P على المحور X . كما هو مبين في الشكل التالي:



يعرف تحت المماس عند P بأنه TN وتحت

العمودي بأنه NG سوف نضع $S_N = \overline{NG}, S_T = \overline{TN}$

ويعرف طول المماس للمنحنى بأنه PN أي طول الجزء من المماس المحصور بين نقطة التماس ونقطة تقاطعه مع محور X . كما يعرف

طول العمودي بأنه PG . من الرسم نجد أن تحت المماس

$$1) \tan \phi = y/TN = y/S_T = y' \Rightarrow S_T = y/y'$$

تحت العمودي

$$2) S_N / y = y' \quad \Rightarrow S_N = y \cdot y'$$

$$3) PT = \sqrt{(TN)^2 + (NP)^2}$$

طول المماس

$$PT = \sqrt{S_T^2 + y^2} = \sqrt{y^2 / y^2 + y^2} = y / y' \sqrt{1 + y'^2}$$

الطول العمودي

$$4) PG = \sqrt{(SN)^2 + y^2} = \sqrt{(yy')^2 + y^2} = y \sqrt{1 + y'^2}$$

امثلة محلولة Solved Problems

مثال : أوجد معادلتى المماس والعمودى للمنحنى

$$\sqrt{x/y} + \sqrt{y/x} = 5/2 \text{ عند النقطة } (8, 2).$$

الحل :

بالضرب $\times \sqrt{xy}$

$$\sqrt{x/y} + \sqrt{y/x} = 5/2$$

$$x + y = 5/2 \sqrt{xy}$$

بالتفاضل بالنسبة إلى x

$$1 + y = 5/2 \cdot (x \cdot y + y) / 2 \sqrt{xy}$$

نفرض أن $m = y$ ميل المماس عند النقطة (8, 2)

$$1 + m = 5/4 \cdot (8m + 2) / \sqrt{16} \Rightarrow 1 + m = 5/16(8m + 2)$$

$$8 + 8m = 20m + 5 \Rightarrow 12m = 3 \Rightarrow y = m = 1/4$$

معادلة المماس

$$(y - 2)/(x - 8) = 1/4 \Rightarrow x - 8 = 4y = 8 \Rightarrow x = 4y$$

معادلة العمودي

$$(y - 2)/(x - 8) = -4 \Rightarrow y - 2 = -4x + 32 \Rightarrow 4x + y = 34$$

مثال : أوجد طول كل من تحت المماس وتحت العمودي وطول المماس

والعمودي للمنحنى $xy + 2x - y = 5$ عند النقطة $(2, 1)$.

الحل :

$$xy' + y + 2 - y' = 0$$

$$y' = (y + 2) / (1 - x)$$

عند النقطة $(2, 1)$

$$m = y' = 3 / -1 = -3$$

$$S_T = y / y' = 1 / -3$$

طول تحت المماس = $1/3$ لان

طول تحت العمودي = 3

$$S_N = y'y = 1 \times -3 = -3$$

طول المماس

$$\text{طول المماس} = \sqrt{1 + y'^2} \cdot y'/y$$

$$= 1 / -3\sqrt{1+9} = \sqrt{10}/3$$

$$\text{طول العمودى} = y\sqrt{1+y^2} = 1 \times \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

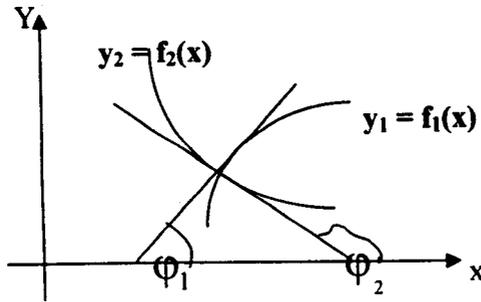
ثانيا : زاوية تقاطع منحنين

لنفرض ان P هي نقطة تقاطع المنحنين

$$y_1 = f_1(x) \text{ \& } y_2 = f_2(x)$$

فتكون الزاوية بينهما عند النقطة P هي الزاوية المحصورة بين المماسين

المرسومين للمنحنين عند هذه النقطة اى ان:



$$\phi = \phi_2 - \phi_1$$

$$\tan \phi = \tan(\phi_2 - \phi_1)$$

$$= \left[\frac{\tan \phi_2 - \tan \phi_1}{1 + \tan \phi_2 \tan \phi_1} \right]$$

ولكن بما ان

$$\tan \phi_1 = y_1 \text{ \& } \tan \phi_2 = y_2$$

عند هذه النقطة

$$\tan \phi = [y_2 - y_1] / [1 + y_2 \cdot y_1] |_p$$

مثال : أوجد زاوية تقاطع المنحنيين

$$y = x \text{ \& } x^2 + y^2 = 2$$

الحل : نعين اولا نقط المنحنيين بحل معادلتيهما

$$(x = y) \Rightarrow x^2 + x^2 = 2 \Rightarrow 2x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$x = 1 \Rightarrow y = 1$$

$$x = -1 \Rightarrow y = -1$$

\therefore نقط التقاطع هي $(1, 1)$ & $(-1, -1)$

- نعين ميل المنحنى الاول

- نعين ميل المنحنى الثانى $y_1 = 1$

$$2x + 2yy' = 0 \Rightarrow y'_2 = -x/y$$

عند النقطة $(-1, -1)$	عند النقطة $(1, 1)$
$y'_1 = 1, y'_2 = -1$ $\tan \phi_2 = (1 - 1) / (1 + 1) = 0$ $\therefore \phi_2 = 0$	$\tan \phi_1 = (y'_1 - y'_2) / (1 + y'_1 y'_2)$ $= (1 + 1) / (1 - 1) = \infty$ $\therefore \phi_1 = \pi / 2$

مثال : أوجد زاوية تقاطع المنحنيين:

$$y = \tan^{-1} (2x + 1) \text{ \& } y = \tan^{-1} x$$

الحل :

نقرب ان ميل المنحنى الاول m_1 وميل المنحنى الثانى m_2

$$m_1 = \tan \theta_1, m_2 = \tan \theta_2$$

∴ زاوية تقاطع المنحنيين هي $(\theta_2 - \theta_1)$

$$\tan(\theta_2 - \theta_1) =$$

$$(\tan \theta_2 - \tan \theta_1) / (1 + \tan \theta_2 \tan \theta_1)$$

$$= (m_2 - m_1) / (1 + m_2 m_1)$$

$$y_1 = \tan^{-1} x, m_1 = dy_1 / dx = 1 / (1 + x^2)$$

$$y_2 = \tan^{-1} (2x + 1),$$

$$m_2 = dy_2 / dx = 1 / [1 + (2x + 1)^2]$$

$$= 1 / (4x^2 + 4x + 2)$$

$$= 1 / (2x^2 + 2x + 1)$$

لايجاد نقطة تقاطع المنحنيين نحل معادليتهما

$$\tan x = \tan(2x + 1) \Rightarrow 2x + 1 = x \Rightarrow$$

$$x = -1$$

$$m_1 = 1 / (1 + x^2) |_{x=-1} = 1/2$$

$$m_2 = 1 / (2x^2 + 2x + 1) |_{x=-1} = 1$$

$$(\theta_2 - \theta_1) = \varphi$$

لذلك تكون زاوية التقاطع

هي

$$\tan \varphi = (m_2 - m_1) / (1 + m_2 m_1) = 1/3$$

ثالثاً : تطبيقات المشتقات على الاحداثيات القطبية (r, θ)

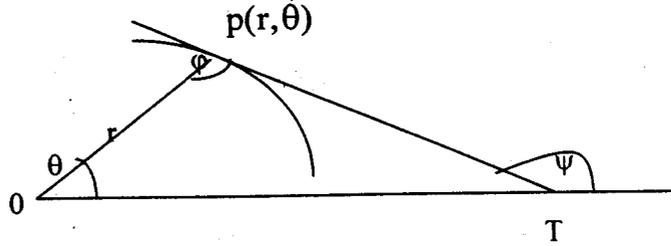
الاحداثيات القطبية لنقطة ما مثل p هما نصف القطر المتجه

r (radius vector) وهو يمثل بعد النقطة p عن نقطة ثابتة (0)

تسمى القطب والاحداثى الاخر هو الزاوية θ التى يصنعها Op مع خط

مستقيم ثابت Ox يسمى بالخط الابتدائى والمعادلة القطبية $r = f(\theta)$ هى

علاقة او دالة تربط الاحداثيين r, θ لاي نقطة على المنحنى



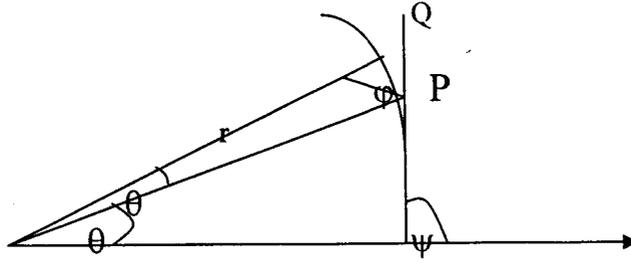
* الزاوية بين المماس ونصف القطر المتجه

لايجاد الزاوية ϕ الواقعة بين المماس عند النقطة P الواقعة على المنحنى

$$r = f(\theta)$$

ونصف القطر المتجه

$$Op = r$$



نتبع الخطوات الآتية :

- نفرض ان $P(r_1, \theta)$ تقع على المنحنى

- نأخذ نقطة قريبة جدا منها ولنكن $Q(r + \Delta r, \theta + \Delta \theta)$ حيث نصف

القطر المتجه لها هو $r + \Delta r$ ، الزاوية القطبية لها هي $\theta + \Delta \theta$

$$\therefore \angle QOP = \Delta \theta$$

- اذا كان ϕ هي الزاوية بين المماس ونصف القطر OP

- من الشكل نجد ان $\phi =$ الزاوية المحصورة بين QO, QP حيث

$$PN \perp OQ$$

$$\therefore \tan \phi = r \Delta \phi / \Delta r = r (\Delta \theta / \Delta r)$$

$$\Delta r \Rightarrow 0$$

وعندما

$$\therefore \tan \phi = r \lim (\Delta \theta / \Delta r) = r \cdot (d\theta / dr)$$

$$\tan \phi = r / (dr / d\theta) = r / r', r' = dr / d\theta$$

$$\phi = \tan^{-1} r / r'; Q = \theta + \phi$$

زاوية ميل المماس مع محور OX

مثال : اوجد الزاوية بين المماس ونصف القطر المتجه للمنحنى

$$r = 2 + \cos \theta$$

عندما $\theta = \pi/3$. ثم اوجد ميل المماس عند هذه النقطة .

الحل : نفرض ان الزاوية المطلوبة هي φ

$$\therefore \tan \varphi = r / r'$$

$$r = 2 + \cos \theta \Rightarrow r' = -\sin \theta$$

$$\text{at } \theta = \pi/3 = 60^\circ \Rightarrow r = 2 + 1/2 = 5/2, r' = -\sqrt{3}/2$$

$$\tan \varphi = (5/2) / (-\sqrt{3}/2) = -5/\sqrt{3} \Rightarrow \varphi = \tan^{-1}(-5/\sqrt{3})$$

لايجاد ميل المماس نجد ان

$$y' = \tan \varphi = \tan(\theta + \varphi)$$

$$= (\tan \theta + \tan \varphi) / (1 - \tan \theta \tan \varphi)$$

$$= [\sqrt{3} - 5/\sqrt{3}] / [1 + (\sqrt{3} - 5/\sqrt{3})]$$

$$= -2/\sqrt{3} / 6 = -1/3\sqrt{3}$$

تمارين

1- اوجد معادلتى المماس والعمودى للمنحنيات الاتية :

a) $y = \tan_2 x$ at (0, 0)

b) $xy + 2x - y = 5$ at (2, 1)

c) $y^2 = 4ax$ at (1, 4)

اوجد كذلك طول كل من تحت المماس وتحت العمودى لكل منحنى عند النقطة المبينة امامه.

2- برهن على ان طول تحت المماس فى المنحنى الدالة الاتية :

$$Y = b e^{x/a}$$

, a, b constants

يساوى مقدارا ثابتا وان طول تحت العمودى هو b^2 / a

3- اوجد طول العمودى وطول المماس لمنحنى الدالة $y = \cosh^{-1}x$ عند $x = 2$

4- اوجد زاوية تقاطع المنحنيين

$$x + y + 2 = 0 \text{ \& } x^2 + y^2 - 10y = 0$$

5- اوجد زاوية تقاطع المنحنيين $xy = 10 \text{ \& } y = x + 3$

6- اوجد الزاوية المحصورة بين المنحنيين $y = x^2 \text{ \& } y = x^2$

7- اوجد الزاوية بين المماس ونصف القطر الموجه ثم ميل المماس للمنحنيات الاتية :

I. $r^2 = 3 + \cos 2\theta$ at $\theta = \pi/6$

II. $r = 4 \sin 3\theta$ at $\theta = \pi/4$

8- اثبت ان المنحنى $r = ae^{B \cot \theta}$ ، ثابت ، تكون الزاوية بين المماس

عند اية نقطة عليه ونصف القطر المتجه ثابتة وتساوى α .

* * *