الباب التاسع

الحلول التقريبية

Approximate Solutions

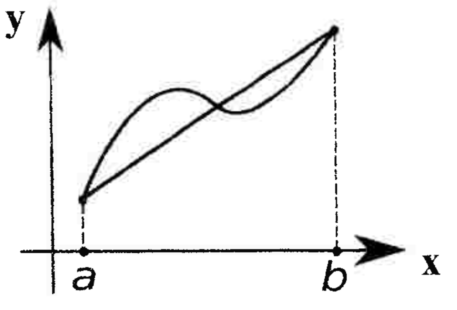
قاعدة شبة النحرف Trapezoidal Rule

فى الرياضيات ، قاعدة شبة المنحرف **the trapezium rule**

(المصطلح الانجليزى) او **trapezoidal rule**(المصطلح الامريكى)

هى طريقة لتقريب حسابات التكامل المحدود الذى له الشكل التالى:

$$\int_a^b f(x)dx .$$

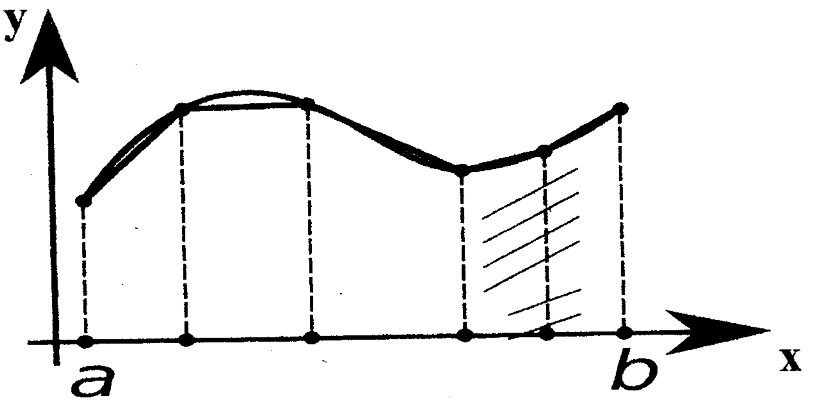


وطريقة قاعدة شبة المنحرف لحساب المساحة اسفل المنحنى للدالة السابقة كالتالى:

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\frac{f(b)-f(a)}{2}$$

ولحساب هذا التكامل بأكثر دقة نقوم بتقسيم الفترة $[a,b]$ الى عدد n

من الفترات الصغيرة وبعد ذلك نطبق طريقة شبة المنحرف على كل فترة صغيرة . وبذلك نحصل على عديد من قاعدة شبة المنحرف كما هو موضح بالرسم التالى:



نقسم المساحة المحددة بالمنحنى f(x) بالخطوط $x=a, \quad x=b$ الى عدد n الشرائح الطولية وعرض كل منها

$$\frac{b-a}{n}=h$$

و سنعتبر الجزء $P_{i-1}P_i$ للمنحنى y=f(x) ويمكن حساب هذه المساحة بواسطة المعادلة التقريبية التالية:

$$\frac{1}{2}h\{f[a+(i-1)h]+f(a+ih)\}$$

والتى تمكننا من الحصول على مساحة شبه المنحرف عن طريق المعادلة:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\{f(a)+f(a+h)\}+\frac{h}{2}\{f(a+h)+f(a+2h)\}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{h}{2}\{f(a+(n-1)h)+f(b)\} \Rightarrow$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\{f(a)+2f(a+h)\}+2f(a+2h)+\ldots$$

$$\ldots+2f\left[a+(n-1)h\right]+f(b) \qquad \ldots\ldots(1)$$

2.الطريقة الهرمية Pyramidal Method

نفرض أن المساحة المعرفة بالتكامل $\int_a^b f(x)dx$

قسمت الى شريحتين رأسيتين عرض كل منهما هو : $h=\frac{b-a}{2}$

ونفرض أن القوس $P_0P_1P_2$ للمنحنى **$y=f(x)$** أستبدل بقوس القطع المكافئ $y=ax^2+bx+c$ والذى يمر بالنقط P_0، P_1، P_2 كما فى الشكل السابق.

المطلوب : حساب قيمة التكامل تقريبا باستخدام المعلومات السابقة

من الواضح أن :

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b ydx=\int_a^b (Ax^2+Bx+c)dx$$

وبحل هذا التكامل ينتج أن

$$\int_a^b (ax^2 + Bx + c)dx = \frac{b-a}{3}\left[A(a^2 + ab + b^2) + \frac{3}{2}B(a+b) + 3c\right]$$

وحيث أن منحنى القطع المكافئ يمر بالنقط

$$P_0 \equiv (a, f(a)) \ ، \ P_1 \equiv (\frac{a+b}{2}, f(\frac{a+b}{2}))\ ، P_2 \equiv (b, f(b))$$

فإن هذه النقط تحقق معادلته وينتج ما يلى:

$$f(a) = Aa^2 + Ba + c$$

$$f(\frac{a+b}{2}) = A(\frac{a+b}{2})^2 + B(\frac{a+b}{2}) + c,$$

$$f(b) = Ab^2 + Bb + c$$

من السهل أثبات أن :

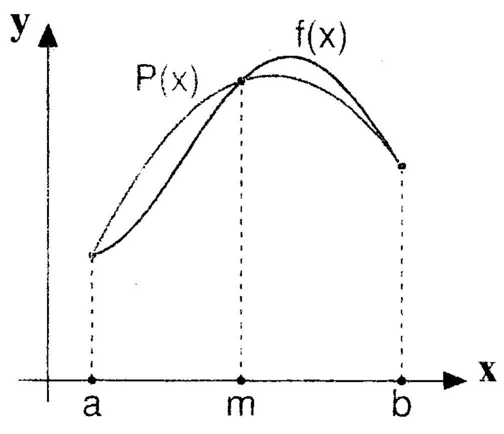
$$f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b) = 2[A(a^2 + ab + b^2) + \frac{3}{2}B(a+b) + 3c]$$

$$\therefore \int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left\{f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right\} \qquad \text{........(2)}$$

وهذه هى الصيغة المطلوبة .

3. قاعدة سمبسن Simpson's Rule

فى التحليل العددى، قاعدة سمبسن هى طريقة للتكامل العددى او التقريب العددى للتكامل المحدود



نفرض أنه أمكن تقسيم المسافة المطلوب حسابها الى $n=2m$ شريحة، مساحة كل منها $h=\dfrac{b-a}{n}$ (انظر الشكل). نستخدم الصيغة الهرمية السابقة لتقريب المساحة تحت كل من الأقواس

$$P_0P_1P_2\ ,\ P_2P_3P_4\ ,\ \ldots\ ,P_{2m-2}P_{2m-1}P_{2m}$$

ينتج أن :

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\{\ f(a)+4f(a+h)+2f(a+2h)+4f(a+3h)+2f(a+4h)+\ldots$$
$$\ldots+2f\ (a+(2m-2)h)+4f\ (a+(2m-1)h)+f\ (b)\ \}\ldots\ldots(3)$$

4. طريقة مفكوك الدالة Expand rule

فى هذه الطريقة نستخدم مفكوك تيلور أو ماكلورين لكتابة مفكوك الدالة f(x) فى متسلسلة بدلالة قوى x (أو (x-a)) وقد استخدمنا هذه الطريقة فى الفصل السابق. هذه الطريقة تعتبر أساسا فى امكانية ايجاد مفكوك الدالة بحيث تتقارب المتسلسلة فى حدود حدى التكامل.

امثلة محلولة

Solved Problem

مثال اوجد قيمة التكامل الآتى مستخدما صيغ قواعد طرق التقريب الاربعة وقارن النتائج المقربة باستخدام طريقة التكامل العادية

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{1+x^2}$$

الحل

الطريقة الأولى : شبه المنحرف

نعتبر n=5 فى هذه الحالة $h = (\frac{1/2-0}{5}) = 0.1$ ، بالتعويض فى (1)

حيث :

$$h = (\frac{1/2-0}{5}) = 0.1$$

$$a = 0, a+h = 0.1, a+2h = 0.2,$$
$$a+3h = 0.3, a+4h = 0.4, b = 0.5$$

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{1+x^2} \approx \frac{0.1}{2}[f(0)+2f(0.1)+2f(0.2)+2f(0.3)+2f(0.4)+f(0.5)]$$

$$= \frac{1}{20}(1+\frac{2}{1.01}+\frac{2}{1.04}+\frac{2}{1.09}+\frac{2}{1.16}+\frac{1}{1.25}) = 0.4631$$

الطريقة الثانية: الهرمية

$$h = \frac{1/2-0}{2} = \frac{1}{4}$$

$$f(a) = f(0) = 1,$$

$$f(b)=f(\frac{1}{2})=\frac{4}{5}\quad f(\frac{a+b}{2})=f(\frac{1}{4})=\frac{16}{17}$$

$$\therefore \int_0^{1/2}\frac{dx}{1+x^2}\approx\frac{1}{3}.\frac{1}{4}(1+\frac{64}{17}+\frac{4}{5})=\frac{1}{12}(1+3.76471+0.8)=0.4637$$

<u>**الطريقة الثالثة: سمبسن (n=4)**</u>

$$h=\frac{1/2-0}{4}=\frac{1}{8}$$

a=0, $a+h=\frac{1}{8}$, $a+3h=\frac{3}{8}$, $a+2h=\frac{1}{4}$, $b=\frac{1}{2}$,

$$\int_0^{1/2}\frac{dx}{1+x^2}\approx\frac{1}{24}(1+4\frac{1}{1+(\frac{1}{8})^2}+2\frac{1}{1+(\frac{1}{4})^2}+4\frac{1}{1+(\frac{3}{8})^2}+\frac{1}{1+(\frac{1}{2})^2})\approx$$

$$\approx\frac{1}{24}(1+\frac{256}{65}+\frac{32}{17}+\frac{256}{73}+\frac{4}{5})=0.4637$$

<u>**الطريقة الرابعة: المفكوك**</u>

نكتب سبعة حدود للمفكوك

$$\int_0^{1/2}\frac{dx}{1+x^2}\approx\int_0^{1/2}(1-x^2+x^4-x^6+x^8-x^{10}+x^{12})dx\approx$$

$$\approx\left[x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}-\frac{x^{11}}{11}+\frac{x^{13}}{13}\right]_0^{1/2}=0.4$$

واخيرا باجراء التكامل :

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x \Big]_0^{1/2} = \arctan \frac{1}{2} = 0.4636$$

مثال أوجد المساحة المحصورة بالمنحنى $y = e^{-x^2}$ ومحور السينات والخطين x=0، x=1 وذلك باستخدام

(أ) قاعدة سمسن باعتبار n=4 (ب)طريقة المفكوك

الحل

الطريقة الاولى: سمبسن (n=4)

a=0, $b=1$, $h=\frac{1}{4}, a+h=\frac{1}{4}\ a+3h=\frac{3}{4}, a+2h=\frac{1}{2}$

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx \frac{1/4}{3}(1+4e^{-1/16}+2e^{-1/4}+4e^{-9/16}+e^{-1})$$

باستخدام الجداول نحصل على :

$$\int_0^1 ....dx \approx 0.747 \quad sq.un$$

الطريقة الثانية: طريقة المفكوك :

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx \int_0^1 (1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^8}{4!}-\frac{x^{10}}{5!}+\frac{x^{12}}{6!})dx$$

$$\approx \left[x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5.2!}-\frac{x^7}{7.3!}+\frac{x^9}{9.4!}-\frac{x^{11}}{11.5!}+\frac{x^{13}}{13.6!}\right]_0^1 = 0.747\, square \quad unite.$$

تمارين

1-أوجد القيمة التقريبية للتكامل $\int_0^6 \frac{dx}{x}$ وذلك باستخدام :

(أ)طريقة شبه المنحرف (ضع n=4) (الجواب : 1.117)

(ب)الطريقة الهرمية (الجواب : 1.111)

(ح)قاعدة سمسن (n=4) (الجواب : 1.100)

(ء)باستخدام التكامل (الجواب: 1.099)

2-باستخدام الطرق المذكورة فى (أ) ، (ح)، (ء) فى المسألة السابقة أوجد القيمة التقريبية للتكامل : $\int_0^3 \ln x dx$ مع اعتبار n=5 فى (أ) ، n=8 فى (ح) (الجواب (أ)=1.2870،(ح)=1.2958،(ء)=1.2958)

3- باستخدام قاعدة سمسن (n=6) أوجد $\int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx$ (الجواب:1.852)

4-أوجد $\int_0^1 \sqrt{1+x^3}\, dx$ وذلك باستخدام :

(أ)طريقة شبه المنحرف (n=5) (الجواب:1.115)

(ب)قاعدة سمسن (n=4) (الجواب:1.111)

* * *