

## الباب العاشر

### تطبيقات لرسم التكامل

### Applications for Graphical integration

كما هو الحال بالنسبة للمشتقات، كذلك بالنسبة لتمثيل العلاقة بين المشتقات في شكل رسوم بيانية، من المهم فهم معنى التكامل لتطويره.

كما هو موضح بالشكل التالي فإنه يمثل السرعة  $v$  لجسيم كدالة اللحظية للوقت المنقضى. وداله هذه العلاقة تمثل بالمعادلة الآتية:

$$v = 6t$$

فالمسافة المقطوعة  $s$  للازمنة  $t_A$ ،  $t_B$  تساوى تكامل السرعة  $v$

بالنسبة للوقت بين بين الحدود الزمنية  $t_A$ ،  $t_B$ .

$$s = \int_{t_A}^{t_B} v dt$$

يمكن ايجاد قيمة هذا التكامل لهذه الحالة الممثلة في الشكل وذلك عن

طريق ملاحظة ان السرعة عبارة عن زيادة خطية. وبالتالي فإن  
السرعة المتوسطة

للفترة الزمنية بين  $t_A$ ،  $t_B$  هي المتوسط الحسابي للسرعة

عند كل من  $t_A$ ،  $t_B$  وبالتالي فإنه بالنسبة للزمن

$$t_A \Rightarrow v = 6t_A$$

وكذلك بالنسبة للزمن

$$t_B \Rightarrow v = 6t_B$$

وبالتالي فإن متوسط السرعة اللحظية للفترة الزمنية  $t_A$ ،  $t_B$  هي:

$$\frac{6t_A + 6t_B}{2} \Rightarrow 3(t_A + t_B)$$

باستخدام معادلة السرعة المتوسطة السابقة فإن المسافة الكلية المقطوعة

للفترة الزمنية  $t_A$ ،  $t_B$  تعطى بالعلاقة:

$$S = v_{av} \Delta t$$

$$S = 3(t_A + t_B)(t_B - t_A) \quad (I)$$

كما هو موضح بالشكل التالي

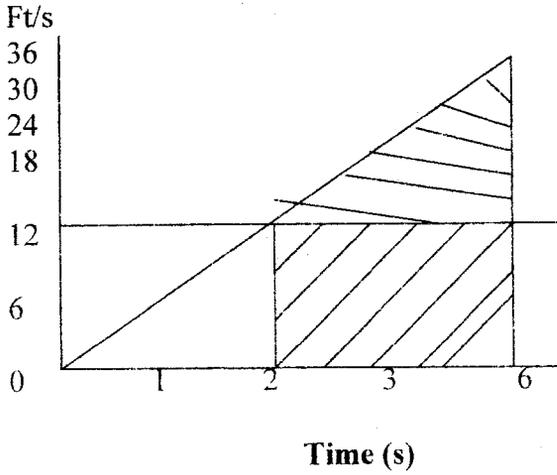


Figure 1 Graph of Velocity vs. Time

معادلة (I) هي أيضا قيمة التكامل للسرعة بين النهايتين  $t_A - t_B$

كما هو موضح بالشكل السابق اي ان:

$$\int_{t_A}^{t_B} 3(t_A + t_B)(t_B - t_A)$$

كذلك يمكن حساب المساحة المظللة بالشكل السابق كما يلي:

$$\begin{aligned} Area &= [(t_B - t_A)(6t_A)] + [1/2(t_B - t_A)(6t_B - 6t_A)] \\ &= 6t_A t_B - 6t_A^2 + 3t_B^2 - 6t_A t_B + 3t_A^2 \\ &= 3t_B^2 - 3t_A^2 \\ &= 3(t_B + t_A)(t_B - t_A) \end{aligned}$$

هذا مساوى تماما لقيمة تكامل السرعة بالنسبة الى الفترة الزمنية  $t_A, t_B$

وحيث ان المسافة المقطوعة = تكامل السرعة بالنسبة للزمن  $\int v dt$

وحيث ان هذا التكامل = المساحة اسفل منحنى السرعة مقابل الزمن.

كما هو مبين بالشكل السابق نجد ان زيادة السرعة بمعدل ثابت. وعندما تكون الدالة ليست خط مستقيم فايجاد المساحة اسفل المنحنى تكون صعبة الحصول عليها. وبالتالي يمكن ان نبين ان :

تكامل الدالة = المساحة المحصورة بين  $x$  وبين الرسم البيانى للدالة  
محور

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) = \text{Area between } f(x) \text{ and } x\text{-axis}$$

from  $x_1$  to  $x_2$

فى الرياضيات، النظم الديناميكية تحتوى على عديد من العمليات لتكامل الدوال. وكما هو الحال للمشتقات كذلك ايضا تكامل الدوال لايمكن حسابة عن طريق تخطيط الدالة وقياس المساحة اسفل المنحنى.

على الرغم من ان هذا الاسلوب يمكن استخدامه، فقد تطورت التقنيات التي تسمح بايجاد قيمة تكامل الدالة مباشرة اعتمادا على صورة الدالة. وكما هو معروف فان تقنية ايجاد قيمة التكامل هي عكس تقنية ايجاد قيمة التفاضل. سنوضح ذلك بالاولثة التالية:

## امثلة Examples

مشتقة الدالة

$$f(x) = ax + c, \text{ where } a, c \text{ are const.} \Rightarrow$$

$$f'(x) = a, \text{ where } a \text{ const.}$$

وتكامل الدالة

$$f(x) = a \Rightarrow$$

$$\int f(x) dx = ax + c, \text{ where } a \text{ const.}$$

وكذلك تكامل الدالة:

$$f(x) = ax^n \Rightarrow$$

$$\int ax^n dx = \frac{a}{n+1} x^{n+1} + c, \text{ where } n+1 \text{ another constant.}$$

وتكامل الدالة

$$f(x) = ae^{bx}$$

$$\int f(x) dx = \frac{a}{b} e^{bx}$$

كما هو الحال مع تقنيات من أجل إيجاد مشتقات الدوال ، وهذه التقنيات العامة لإيجاد تكامل المشتقات هي في المقام الأول مهمة فقط لأولئك الذين يفضلون التحليل الرياضى فى العمليات الحسابية للنظم الحيوية. هذه التقنيات ليست مصادفة في يوم ليوم وتشغيل منشأة نووية. ومع ذلك ، فإنه من المفيد أن نفهم أن إيجاد قيمة التكامل لاي دالة هو على العكس من إيجاد مشتقة الدالة. من حيث مجموع ومساحات المناطق الواقعة تحت المنحنيات ، ومعدلات التغير ووكذلك ميل المنحنيات.

### الخلاصة

المعلومات الهامة التي يشملها هذا الفصل ملخصة كالآتى:

- ملخص التفاضل والتكامل
- مشتقة الدالة يعرف بأنه معدل التغير في كمية واحدة فيما يتعلق بكمية اخرى ، والذي هو ميل الدالة.
- تكامل الدالة يعرف على انه المساحة اسفل المنحنى.

\* \* \*