الباب الأول

التكامل غير المحدود

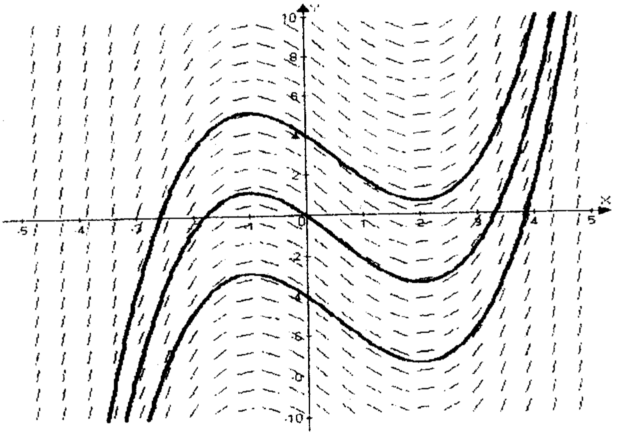
Indefinite Integrals

في حساب التفاضل والتكامل ، نجد ان التكامل ضد الإشتقاق

(التفاضل) ، فالتكامل غير المحدود للدالة f هو الدالة F والتى

يكون تفاضلها هو f أى ان $F' = f$

عملية الحل لمعكوس المشتقة **derivatives** ant هو معكوس التكامل **differentiation** ant (التكامل غير المحدود). فمعكوس المشتقة مرتبط بالتكامل غير المحدود من خلال النظرية الاساسية لحساب التفاضل والتكامل والتى تمدنا بطرق مناسبة لحساب التكامل غير المحدود لكثير من الدوال المختلفة



<u>مثال:</u>

الدالة $F(x) = x^3/3$ هى معكوس الدالة $f(x) = x^2$ حيث ان مشتقة

الثابت تساوى صفرا. وبالتالى فأن الدال x^2 يكون لها عدد لانهائى

لمعكوس المشتقة مثل الدوال الاتية:

$$(x^3/3) + 0, (x^3 / 3) + 7, (x^3 / 3) - 42, \ldots$$

وبالتالى يمكن الحصول على عدد لانهائى من الحلول لمعكوس الدالة x^2

وذلك عن طريق تغير قيم الثابت C فى الدالة:

$$F(x) = (x^3 / 3) + C$$

حيث C هو ثابت اختيارى ويسمى ثابت التكامل.

في الأساس ، والرسوم البيانية الموضحة سابقا لل antderivatives تحدد خاصية معينة لبعضها البعض ؛ كل مكان من الرسم البياني تبعا لقيمة C.

1.معكوس المشتقة والتكامل غير المحدود

Inverse derivative and Indefinite Integral

تكلمنا في الجزء الأول **(Calculus I)** عن حساب التفاضل وكيفية

إيجاد

المشتقة $f'(x)$ لدالة معطاة $f(x)$. وفى هذا الجزء سوف نتعرض للعملية

العكسية حيث أن $f(x)$ تعبر عن دالة معطاة والمطلوب إيجاد دالة F(x) تحقق الشرط

$$F`(x) = f(x)$$

تعريف (1)

إذا كانت الدالة f معرفة على فترة I فإن أى دالة F تحقق العلاقة :

$$F`(x) = f(x) \quad , \quad \forall x \in I$$

تسمى معكوس مشتقة (أو دالة أصلية) للدالة f على I فمثلا كل من

$$F_1(x) = x^3 \qquad F_2(x) = x^3 - 4 \qquad F_3(x) = x^3 + 10^3$$

دالة أصلية للدالة $f(x) = 3x^2$ على **I** وذلك لأن

$$f(x) = 3x^2$$

$$F`_1(x) = F`_2(x) = F`_3(x) = 3x^2 = f`(x) \qquad \forall x \in R$$

من تعريف (1) يلاحظ أن F(x) متصلة على الفترة I، وذلك لأنها قابله للاشتقاق على هذه الفترة.

العلاقة بين الدوال الأصلية لنفس الدالة تعطى في النظرية التالية:

نظرية (1)

إذا كانت كل من $F_1(x),\ F_2(x)$ معكوس مشتقة للدالة f(x) على الفترة I فإن الفرق بينهما هو عدد ثابت، أى أن

$$F_1(x) - F_2(x) = c, \quad c \in R$$

البرهان:

باستخدام تعريف (1) يكون لكل $x \in I$:

$$F`_2(x) = f(x) \qquad , \qquad F`_1(x) = f(x)$$

بوضع

$$\varphi(x) = F_1(x) - F_2(x)$$

فإننا نحصل على أن :

$$\varphi`(x) = 0, \qquad \forall x \in I \qquad (1)$$

الدالة **φ** دالة متصلة وقابلة للاشتقاق على الفترة **I**، وبالتالي فإنه

باستخدام نظرية لاجرانج للقيمة المتوسطة على الفترة الجزئية (a,x)

(حيث $x \in I$) يوجد نقطة **α** بحيث :

$$x \in I$$
$$\varphi(x) - \varphi(a) = (x-a)\varphi`(\alpha)$$

ولكن $\varphi`(\alpha)$ تبعا للمتساوية (1)، نحصل على :

$$\varphi(x) - \varphi(a) = 0 \qquad \forall x \in I \ , \qquad \Rightarrow \varphi(x) = \varphi(a) \ ,$$

تأخذ كل منها الصورة **F(x) + c** حيث c ثابت اختياري، أي $c \in R$.

من الآن فصاعدا سوف يستخدم الرمز

$$\int f(x)dx$$

(والذى ينطق تكامل $f(x)$ بالنسبة الى x) للدلالة على أى دالة أصلية للدالة f على الفترة I ، أى أن

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

حيث

$$F`(x) = f(x)$$

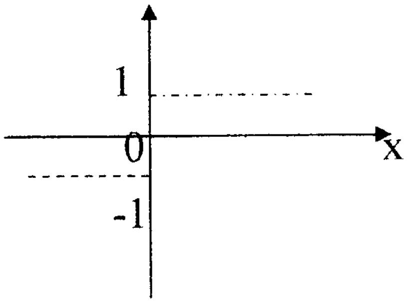
وتسمى التكامل $\int f(x)dx$

بالدالة الأصلية العامة أو التكامل غير المحدود أومعكوس المشتقة العام للدالة $f(x)$ ، ويسمى الثابت الاختياري $c \in R$ بثابت التكامل.

ملاحظة(1) :

ويجب أن نلاحظ أنه ليس لجميع الدوال يوجد معكوس مشتقة (دالة أصلية). فمثلا الدالة :

$$f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \\ -1 & , \quad x < 0 \end{cases}$$



لا يوجد لها دالة أصلية، بمعنى أنه لا توجد دالة **F(x)** قابلة للتفاضل بحيث $F`(x) = f(x)$ عند كل نقطة لانه إذا أفترضنا وجود مثل هذه الدالة فإنه: عندما تكون x>0 يجب أن تكون

$$F`(x) = 1,$$

$$F`(x) = x + c_1$$

وعندما x<0 يجب أن تكون

$$F`(x) = -1,$$

$$F`(x) = -x + c_2,$$

أى أن

$$F(x) = \begin{cases} x + c_1, & if \quad x > 0 \\ -x + c_2, & if \quad x < 0 \end{cases}$$

وهذه الدالة لا يمكن أن تكون قابلة للتفاضل عند **x=0** لجميع قيم $\mathbf{c_1}$, $\mathbf{c_2}$ فهى بالكثير يمكن أن تكون متصلة عندما $\mathbf{c_1 = c_2}$.

من معلومتنا فى التفاضل يمكن أن نتحقق من الجدول التالى الذى يجب على الطالب ان يتذكره جيدا.

جدول لبعض التكاملات الأساسية

Fundamental Integrals Rules

1. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad , \quad n \neq -1$

2. $\int \dfrac{1}{x} dx = \ln|x| + c$

3. $\int e^x dx = e^x + c$

4. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + c$

5. $\int \sin x dx = -\cos x + c$

6. $\int \cos x dx = \sin x + c$

7. $\int \sec^2 x dx = \tan x + c$

8. $\int \cos ec^2 x dx = -\cot x + c$

9. $\int \sec x \tan x dx = \sec x + c$

10. $\int \cos ecx \cot x dx = -\cos ecx + c$

11. $\int \sinh x dx = \cosh x + c$

12. $\int \cosh x dx = \sinh x + c$

13. $\int \sec h^2 x dx = \tanh x + c$

14. $\int \operatorname{cosech}^2 x\,dx = -\coth x + c$

15. $\int \operatorname{sech} x \tanh x\,dx = -\operatorname{sech} x + c$

16. $\int \operatorname{cosech} x \coth x\,dx = -\operatorname{cosech} x + c$

17. $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \tan^{-1} x + c$

18. $\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \tanh^{-1} x + c$

19. $\int \frac{1}{x^2-1}\,dx = -\coth^{-1} x + c$

20. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \cosh^{-1} x + c$

21. $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \sinh^{-1} x + c$

22. $\int \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}\,dx = -\operatorname{cosech}^{-1} x + c$

23. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sin^{-1} x + c$

24. $\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\operatorname{sech}^{-1} x + c$

25. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx = \sec^{-1} x + c$

I.خواص التكامل غير المحدود

1. Properties of Indefinite Integrals

(1) $\int [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$

أى أن تكامل المجموع الجبرى لدالتين هو المجموع الجبرى لتكاملى الدالتين

(2) $\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$, **c∈R**

أى تكامل حاصل ضرب ثابت فى دالة = الثابت × تكامل الدالة.

(3) $\int f`(x)dx = f(x) + c \quad , \quad \frac{d}{dx}\int f`(x)dx = f`(x)$

<u>**مثال**</u>

i) $\int (x^2 + 4x - 7)dx = \int x^2 dx + \int 4x dx - \int 7 dx$

$= \int x^2 dx + 4\int x dx - 7\int dx$

$= \frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2} - 7x + c$

ii) $\int (2x^3 - 3\cosh x + 5\sqrt{x})dx$

$= 2\int x^3 dx - 3\int \cosh x dx + 5\int x^{\frac{1}{2}} dx$

$= 2\frac{x^4}{4} - 3\sinh x + 5\frac{x^{3/2}}{3/2} + c$

$$= \frac{1}{2}x^4 - 3\sinh x + \frac{10}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$$

iii) $\int \sqrt{x}(2x - \frac{1}{\sqrt{x}})^2 dx = \int \sqrt{x}(4x^2 - 4\sqrt{x} + \frac{1}{x})dx$

$$= \int (4x^{5/2} - 4x + \frac{1}{\sqrt{x}})dx$$

$$= \int (4x^{5/2} - 4x + x^{-\frac{1}{2}})dx$$

$$= 4 \cdot \frac{2}{7}x^{7/2} - 4\frac{x^2}{2} + 2\sqrt{x} + c$$

An Important Rule قاعدة هامة

إذا كان

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

فإن

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + c$$

أى إذا استبدلت x بمقدار الدرجة الأولى ax+b فإن الناتج التكامل لا يتغير الا بإجراء هذا الاستبدال ثم القسمة على a (معامل x) .

ويمكن اثبات هذه الخاصية باستخدام طريقة التكامل بالتعويض والتى سيرد ذكرها فيما بعد.

Solved Problems أمثلة

I. $\int(2x-4)^5\,dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{(2x-4)^6}{6}+c$

ii. $\int\sqrt{4-2x}\,dx=\int(-2x+4)^{\frac{1}{2}}\,dx$

$$=\frac{1}{-2}\frac{(-2x+4)^{\frac{3}{2}}}{(\frac{3}{2})}+c=-\frac{1}{3}\sqrt{(-2x+4)^3}+c$$

iii. $\int\frac{1}{\sqrt{4-2x}}\,dx=\int(4-2x)^{-\frac{1}{2}}\,dx$

$$=\frac{1}{-2}\frac{(4-2x)^{\frac{1}{2}}}{(\frac{1}{2})}+c=-\sqrt{4-2x}+c$$

iv $\int\sin(3x-1)\,dx=-\frac{1}{3}\cos(3x-1)+c$

تكامل الدوال المثلثية والزائدية

Integrals of the triangle functions& hyper geometric functions

I. $\int\frac{1}{5x+3}\,dx=\frac{1}{5}\ln|5x+3|+c$

$$\int(e^{2x}+e^{-5x})^2\,dx=\int(e^{4x}+2e^{-3x}+e^{-10x})\,dx$$

$$=\frac{1}{4}e^{4x}-\frac{2}{3}e^{-3x}-\frac{1}{10}e^{-10x}+c$$

II. $$\int\frac{1}{\sqrt{1-(3x+2)^2}}\,dx=\frac{1}{3}\sin^{-1}(3x+2)+c$$

III. $$\int 3^{1-5x}\,dx=-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{\ln 3}\cdot 3^{1-5x}+c$$

IV. $$\int\frac{1}{(3x+1)\sqrt{9x^2+6x}}\,dx=\int\frac{dx}{(3x+1)\sqrt{(3x+1)^2-1}}\,dx$$

$$=\frac{1}{3}\sec^{-1}(3x+1)+c$$

باستخدام القاعدة II كذلك أيضا يمكن تعميم بعض النتائج فى الجدول كما يلي:

1) $$\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{1+(\frac{x}{a})^2}=\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{(\frac{1}{a})}\cdot\tan^{-1}\frac{x}{a}+c$$

$$=\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}+c$$

وبالمثل يمكن أن نوضح أن

$$\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{a}\tanh^{-1}\frac{x}{a}+c\ ,\quad \int\frac{dx}{x^2-a^2}=-\frac{1}{a}\coth^{-1}\frac{x}{a}+c\,.$$

$$\int\frac{dx}{x^2-a^2}=-\frac{1}{a}\coth^{-1}\frac{x}{a}+c,\quad \int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{a}\tanh^{-1}\frac{x}{a}+c$$

$$2)\ \int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{x}{a})^2}}\,dx = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{(\frac{1}{a})}\sinh^{-1}\frac{x}{a}+c$$

$$= \sinh^{-1}\frac{x}{a}+c$$

وبالمثل يمكن أن نثبت أن :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \cosh^{-1}\frac{x}{a}+c,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{a}+c$$

$$3)\ \int \frac{1}{x\sqrt{a^2+x^2}}\,dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{(\frac{x}{a})\sqrt{1+(\frac{x}{a})^2}}\,dx$$

$$= -\frac{1}{a}\cos ech^{-1}\frac{x}{a}+c = -\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{(\frac{1}{a})}\cdot\cos ech^{-1}\frac{x}{a}+c$$

وبالمثل نستطيع أن نستنتج أن:

$$\int \frac{1}{x\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = -\frac{1}{a}\sec h^{-1}\frac{x}{a}+c$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \frac{1}{a}\sec^{-1}\frac{x}{a}+c$$

النتائج السابقة التى ذكرت فى (1),2),3 هى تعميم للقوانين 25-17 فى جدول التكاملات الأساسية، وعلى الطالب أن يتذكرها جيدا لأننا

سنستخدمها كثيرا مثلها مثل التكاملات الأساسية الواردة فى الجدول .

مثال:

i) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{3}} + c$

ii) $\int \frac{dx}{5+x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{5}} + c$

iii) $\int \frac{dx}{12+9x^2} = \frac{1}{9}\int \frac{dx}{\frac{12}{9}+x^2}$

$= \frac{1}{9}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}\tan^{-1}\frac{2\sqrt{3}}{2}x + c$

iv) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}} = \frac{1}{3}\sec^{-1}\frac{x}{3} + c$

تكاملات مربعات النسب المثلثية (وأيضا الدوال الزائدية)

Integrals for squares of the trigonometry functions (and Hyper Geometry)

تستخدم القاعدة الهامة II أيضا فى أيجاد التكاملات :

$\int \cos^2 x dx \quad , \quad \int \sin^2 x dx$

$\int \cosh^2 x dx \quad , \quad \int \sinh^2 x dx$

وذلك بالاستعانة بالعلاقات بين الدوال المثلثية وبعضها ، والعلاقات بين الدوال الزائدية وبعضها والتى أشرنا إليها فى حساب التفاضل

$$\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos 2x)dx = \frac{1}{2}\left[x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]+c$$

$$\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2x)dx = \frac{1}{2}\left[x+\frac{1}{2}\sin 2x\right]+c$$

$$\int \sinh^2 x dx = \frac{1}{2}\int (\cosh 2x - 1)dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sinh 2x - x\right]+c$$

$$\int \cosh^2 x dx = \frac{1}{2}\int (1+\cosh 2x)dx = \frac{1}{2}\left[x+\frac{1}{2}\sinh 2x\right]+c$$

أما تكاملات الدوال :

$$\tan^2 x \ , \ \cot^2 x \ , \ \tanh^2 x, \ \coth^2 x$$

فأننا نحصل عليها بكتابة هذه الدوال بدلالة الدوال :

$$\cos ech^2 x \quad , \quad \sec h^2 x \quad , \cos ec^2 x \quad , \quad \sec^2 x$$

على الترتيب، وذلك نظرا لوجود تكاملات الدوال الأخيرة في الجدول :

$$\int \tan^2 x dx = \int (\sec x^2 - 1)dx = \tan x - x + c$$

$$\int \cot^2 x dx = \int (\cos ecx^2 - 1)dx = -\cot x - x + c$$

$$\int \tanh^2 x dx = \int (1-\sec h^2 x)dx = x - \tanh x + c$$

$$\int \coth^2 x dx = \int (1+\cos ech^2)dx = x - \coth x + c$$

أمثلة محلولة

Solved Problems

i) $\int \sin^2 5x dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos 10x)dx = \frac{1}{2}(x - \frac{1}{10}\sin 10x) + c$

ii) $\int \cosh^2 \frac{\sqrt{3}}{2} x dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cosh \sqrt{3} x) dx$

$= \frac{1}{2}(x + \frac{1}{\sqrt{3}} \sinh \sqrt{3} x) + c$

iii) $\int \tan^2 4x dx = \int (\sec^2 4x - 1) dx = \frac{1}{4} \tan 4x - x + c$

iv) $\int \coth^2 (1 - 3x) dx = \int \left[1 + \cos ech^2 (1 - 3x)\right] dx$

$$= x - \frac{1}{(-3)} \coth(1 - 3x) + c$$

* * *