الباب الرابع

المعنى الهندسى للتكامل المحدود

Geometrical meaning for The finite integrals

والآن ما هو التفسير الهندسى للتكامل المحدود.

المعنى الهندسى للتكامل المحدود هو ايجاد المساحة اسفل المنحنى

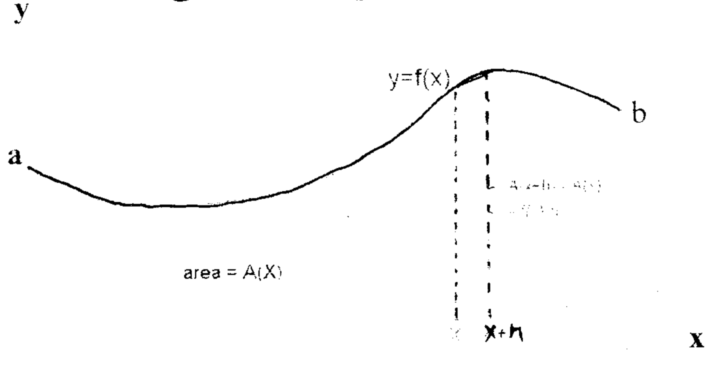
لتوضيح ذلك سنفترض هنا أن الدالة متصلة فى الفترة [a,b] وأن

$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a,b]$

ولنفرض أن P هو التجزئ النونى المنتظم للفترة [a,b] فيكون مجموع

ريمان $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$

هو مساحة المنطقة المضلعة فى الشكل التالى:



ومن الواضح أنه كلما زادت عدد الفترات الجزئية n وصغرت كل من الأطوال Δx_k كلما كثرت عدد المستطيلات المتلاصقة وصغرت قاعدة كل منها. وفى النهاية نستطيع أن نتصور أنه حين $n \to \infty$ فان مجموع ريمان

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

يقترب من مساحة المنطقة المظللة فى الشكل وهى المحصورة بين :

i. منحنى الدالة $y=f(x)$

ii. محور السينات

iii. الخطيين المستقيمين $x=a, x=b$

أى أنه اذا كانت الدالة $y=f(x)$ متصلة فى $[a,b]$ وكانت غير سالبة فى هذه الفترة. فإن

$$\int_a^b f(x)dx$$

يعبر عن مساحة المنطقة المستوية المحصورة بين منحنى الدالة f ومحور السينات والخطين المستقيمين $x=a$ $x=b$.

فمثلا المساحة الواقعة بين منحنى $y = x$ ومحور السينات والمستقيمين $x=3$ و $x=1$

$$\int_1^3 x dx = \frac{3^2 - 1^2}{2} = 4$$

وهى مساحة شبه المنحرف الموضح فى الشكل .

وسوف نعود فى الباب الثانى الى المعنى الهندسى للتكامل $\int_a^b f(x)\,dx$

<u>تعريف (1)</u> إذا كانت الدالة f قابلة للتكامل على [a,b] فان :

i. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

ii. $\int_a^a f(x)dx = 0$

فمثلا $\int_{-2}^{3} x^2 dx = \frac{3^2-(-2)^2}{3} = \frac{35}{3}$

وتبعا لتعريف (5) يكون : $\int_{3}^{-2} x^2 dx = \frac{-35}{3}$

بعض خواص التكامل المحدود

Some Properties of Definite integrals

فى هذا الفصل نقدم أهم خواص التكامل المحدود و التى يمكن إثباتها استنادا الى تعريف (3) فى الباب السابق.

<u>نظرية (1) :</u> اذا كان $A \in R$ وكانت f دالة قابلة التكامل على [a,b]

فإن $\int_a^b Af(x)dx = A\int_b^a f(x)dx$

نظرية (2): اذا كانت الدالتان f_1، f_2 قابلتان للتكامل على [a,b] فإن الدالة $f_1 + f_2$ تكون قابلة للتكامل على [a,b] ويكون :

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx$$

نظرية (3): اذا كانت الدالتان f، g قابلتان للتكامل على [a,b] وكان

$$f(x) \le g(x) \qquad \forall x \in [a,b]$$

$$\therefore \int_a^b f(x)dx \le \int_b^a g(x)dx$$

نتيجة (1): اذا كانت f قابلة للتكامل على الفترة [a,b] فإن

$$f(x) \ge 0, \forall x \in [a,b] \Rightarrow$$

$$\int_a^b f(x)dx \ge 0$$

$$f(x) \le 0, \forall x \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \le 0$$

نظرية (4): اذا كانت الدالة f متصلة فى [a,b] فإنه يوجد نقطة $\xi \in [a,b]$ بحيث :

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi)$$

البرهان : بما أن الداله متصلة فى [a,b] فإن للدالة f قيمة عظمى M وايضا قيمة صغرى m على الفترة [a,b]. بمعنى أنه يوجد x_1,x_2 فى الفترة [a,b]بحيث يكون :

$$f(x_1)= M \qquad , f(x_2)= m$$

$$M \geq f(x) \geq m \qquad \forall x\in[a,b]$$

باستخدام نظرية (2) يكون :

$$\int_a^b M dx \geq \int_b^a f(x)dx \geq \int_a^b m dx$$

وتبعا للمثال صفحة 73 يكون

$$M(b-a) \geq \int_b^a f(x)dx \geq m(b-a)$$

بالقسمة على (b-a) مع ملاحظة أن b-a>0 ينتج أن

$$M \geq \frac{1}{(b-a)}\int_b^a f(x)dx \geq m \qquad or$$

$$f(x_1) \geq \frac{1}{(b-a)}\int_b^a f(x)dx \geq f(x_2)$$

من اتصال الدالة f توجد نقطة ξ فى الفترة $[x_1,x_2]$ تحقق المتساوي الآتية :

$$f(\xi) = \frac{1}{(b-a)} \int_b^a f(x)dx \Rightarrow$$

$$\int_b^a f(x)dx = (b-a)f(\xi)$$

حيث $\xi \in [x_1 , x_2] \subset [a,b]$

<u>مثال</u> أوجد قيمة العدد ξ الذى يحقق نظرية القيمة المتوسطة للتكامل

$$\int_2^5 (4x-5)dx$$

<u>الحل</u> نفرض أن $f(x) = 4x - 5$ فتكون f دالة متصلة فى الفترة [2,5]

وبالتالى تبعا لنظرية (3) يوجد عدد $\xi \in [2,5]$ بحيث

$$\int_2^5 (4x-5)dx = (5-2)f(\xi) = 3f(\xi)$$

ولكن

$$\int_2^5 (4x-5)dx = 4\int_2^5 xdx - \int_2^5 5dx$$

$$= 4.\frac{5^2-2^2}{2} - 5(5-2) = 27$$

$$3f(\xi) = 27 \quad \Rightarrow \quad f(\xi) = 9 \quad \Rightarrow$$

$4\xi - 5 = 9 \quad \Rightarrow \quad 4\xi = 14 \quad \Rightarrow$

$\xi = 3\frac{1}{2} \quad \in \quad [2,5].$

<u>نظرية (5) :</u>

اذا كانت $c \in [a,b]$ فإن الدالة f تكون قابلة للتكامل على [a,b] اذا وفقط اذا كانت f قابلة للتكامل على كل من [a,c] ، [c,b] وفى هذه الحالة يكون :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7)$$

<u>البرهان :</u> سنكتفى هنا بايضاح المتساوية (7) .حيث أن نهاية مجموع ريمان على [a,b] لا يعتمد على الطريقة التى نجزئ بها الفترة [a,b] الى فترات جزئية (وذلك لأن الدالة f قابلة للتكامل على هذه الفترة) لذلك سوف نجزئ [a,b] الى فترات جزئية بحيث تكون النطقة c هى احدى نقط التجزئ. وهكذا فان مجموع

ريمان $\sum_a^b$ المناظر للفترة [a,b] ينقسم الى جزئين هما $\sum_a^c$ المناظر للفترة [a,c] ، $\sum_c^b$ المناظر للفترة [c,b] . ويكون

$$\sum_a^b f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_a^c f(\xi_k)\Delta x_k + \sum_c^b f(\xi_k)\Delta x_k$$

فإننا نحصل على المتساوية (7) عندما $\|P\| \to 0$.

ملاحظة

يمكن تعميم النظرية السابقة كما يلى :

اذا كانت $a < c_1 < c_2 < \ldots\ldots\ldots < c_n < b$

فإن الدالة f تكون قابلة للتكامل على [a,b] إذا وفقط إذا كانت f قابلة للتكامل على

$[a, c_1], [c_1, c_2], \ldots\ldots\ldots [c_n, b]$

وفى هذه الحالة يكون

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{c_1} f(x)dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)dx + \ldots\ldots + \int_{c_n}^{b} f(x)dx$$

النظرية الأساسية لحساب التكامل

Fundamental Theorem of Calculus

سنبحث فى هذا الفصل العلاقة بين التفاضل و التكامل ليس فقط لأهميته النظرية و إنما لأن هذه العلاقة ستسفر عن وسائل أكثر سهوله لحساب التكاملات المحدوده فى كثير من الحالات.

نظرية (6)

النظرية الاساسية للتفاضل و التكامل

الجزء الأول:

اذا كانت الدالة f متصلة فى الفترة [a,b] وكانت G وهى الدالة المعرفة بواسطة:

$$G(x)=\int_a^x f(t)dt \quad ,\forall x \in [a,b] \Rightarrow$$

$$\therefore \frac{d}{dx}G(x)=f(x)$$

<u>البرهان:</u> لنفرض أن x، x+h نقطتان فى الفترة [a,b] حيث h مقدارا صغيرا (موجبا أو سالبا) فيكون :

$$G(x+h)=\int_a^{x+h} f(t)dt$$

$$=\int_a^x f(t)dt+\int_x^{x+h} f(t)dt \quad =G(x)+\int_x^{x+h} f(t)dt$$

أى أن

$$G(x+h)-G(x)=\int_x^{x+h} f(t)dt$$

وباستخدام نظرية القيمة المتوسطة للتكامل فإنه يوجد عدد $\xi\in[x,x+h]$ اذا كانت $h>0$ أو $\xi\in[x+h,x]$ اذا كانت $h<0$ أى أن ξ تقع بين x+h , x بحيث

$$G(x+h)-G(x)=(x+h-x)f(\xi)=hf(\xi)$$

أى أن

$$\frac{G(x+h)-G(x)}{h}=f(\xi)$$

$$=\lim_{h\to 0} f(\xi) \qquad\qquad = f(x)$$

$$\therefore \frac{d}{dx}G(x)=\lim_{h\to 0}\frac{G(x+h)-G(x)}{h}$$

(اتصال الدالة f على [a,b])

ملاحظة

1- النظرية السابقة تعنى ان التكامل المحدود $\int_a^x f(t)dt$ حيث الحد العلوى

للتكامل متغير x، هو دالة أصلية للدالة f.

2- نستنتج من النظرية (10) ان لكل دالة متصلة يوجد دالة أصلية وان

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

مثال أوجد مشتقة كل من الدوال الآتية بالنسبة الى x:

i) $\int_1^x e^{t^2}\, dt$

ii) $\int_x^0 \cos t dt$

iii) $\int_{0}^{x^2} \sin 2t dt$

iv) $\int_{\sqrt{x}}^{x^3} e^{t^2} dt$

الحل

i) $$\frac{d}{dx}\int_{1}^{x} e^{t^2} dt = e^{x^2}$$

ii) $$\frac{d}{dx}\int_{x}^{0} \cos t dt = \frac{d}{dx}\left(- \int_{0}^{x} \cos t dt \right) = -\cos x$$

iii) $$\frac{d}{dx}\int_{0}^{x^2} \sin 2t dt = \frac{d}{dx^2}\left(\int_{0}^{x^2} \sin 2t \right) dt \frac{dx^2}{dx} = \sin 2x^2 \times 2x$$

iv) $$\frac{d}{dx}\int_{\sqrt{x}}^{x^3} e^{t^2} dt = \frac{d}{dx}\left(\int_{\sqrt{x}}^{a} e^{t^2} dt + \int_{a}^{x^3} e^{t^2} dt \right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(- \int_{a}^{\sqrt{x}} e^{t^2} dt \right) + \frac{d}{dx}\left(\int_{a}^{x^3} e^{t^2} dt \right)$$

$$= \frac{d}{d\sqrt{x}}\left(- \int_{a}^{\sqrt{x}} e^{t^2} dt \right) \times \frac{d\sqrt{x}}{dx} + \frac{d}{dx^3}\left(\int_{a}^{x^3} e^{t^2} dt \right) \times \frac{dx^3}{dx}$$

$$= -e^{-x} \times \frac{1}{2\sqrt{x}} + e^{x^3} \times 3x^2$$

والآن نعطى النظرية الأساسية لحساب التكامل والتى تعطى طريقة حساب التكامل المحدود باستخدام التكامل غير المحدود. وهذا ما سنفعله دائما فى ايجاد قيمة التكاملات المحدوده.

النظرية الاساسية (نظرية نيوتن – ليبنز)

Newton's -Leibniz's Fundamental Theorem

اذا كانت الدالة f متصلة على [a,b] وكانت F دالة أصلية للدالة f على [a,b] فإن :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

<u>**البرهان:**</u> بما أن الدالة

$$\int_a^x f(t)dt$$

دالة أصلية للدالة f وبما أن أى دالة أصلية للدالة f تكون على الصورة

$$F(x)+c, \quad c \in R$$

فنستنتج أن

$$\int_{a}^{x} f(t)dt = F(x) + c \qquad \textbf{... (8)}$$

بوضع x=a نحصل على :

$$\int_{a}^{a} f(t)dt = F(a) + c$$

وبما أن الطرف الايسر يساوى صفرا فإن $C = -F(a)$

وبالتعويض فى (8) يكون :

$$\int_{a}^{x} f(t)dt = F(x) - F(a)$$

بوضع x=b فى هذه المتساوية نحصل على :

$$\int_{a}^{b} f(t)dt = F(x) - F(a)$$

وباستخدام تعريف 5 نحصل على المطلوب.

<u>ملاحظة</u> سوف نرمز فيما بعد للمقدار **F(b)-F(a)** بالرمز $\left[F(x)\right]_a^b$

<u>مثال</u> أحسب كل من التكاملين :

a) $\displaystyle\int_{-2}^{2}(5x^4 + 3x^2)dx$ 　　 **b)** $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{x}{(2x^2+3)}dx$

<u>الحل</u>

a) $\int_{-2}^{2}(5x^4+3x^2)dx=\left[x^5+x^3\right]_{-2}^{2}$

$$=(2^5+2^3)-((-2)^5+(-2)^3)=80$$

b) $\int_0^1 \frac{x}{(2x^2+3)^3}dx=\frac{1}{4}\int_0^1(2x^2+3)^{-3}(4x)dx$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{(2x^2+3)^{-2}}{-2}\right]_0^1=-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{25}-\frac{1}{9}\right)=\frac{2}{225}$$

ملاحظة

الفرق **F(b)-F(a)** لايعتمد على اختيار الدالة الأصلية F للدالة f ولذلك فى المثال السابق (أ) أخذنا الدالة الأصلية

$$F(x)=x^5+x^3$$

لأننا لو أخذنا الدالة

$$F(x)=x^5+x^3+c$$

فإن قيمة التكامل لن تتغير.

مثال أحسب التكامل الاتى :

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos^3 x\sin x dx$$

الحل

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^3 x \sin x dx = -\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\cos x)^3(-\sin x)dx = -\int_0^{\pi/3} \cos^3 x d(\cos x)$$

$$= -\left[\frac{(\cos x)^4}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{15}{64}$$

<u>ملاحظة</u>

الفرق **F(b)-F(a)** لايعتمد على اختيار الدالة الأصلية F للدالة f ولذلك فى المثال السابق (أ) أخذنا الدالة الأصلية

$$F(x) = x^5 + x^3$$

لأننا لو أخذنا الدالة

$$F(x) = x^5 + x^3 + c$$

فإن قيمة التكامل لن تتغير.

استبدال المتغير فى التكامل المحدود

Variables changes in finite integral

أذا كانت الدالة f متصلة على الفترة المغلقة [a,b] واستخدمنا التعويض $x = \varphi(t)$ حيث الدالة φ قابلة للتفاضل فإن

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi`(t)dt$$

حيث

$$a = \varphi(\alpha) \qquad , \qquad b = \varphi(\beta)$$

وذلك لأنه إذا كان :

$$\int f(x)dx = F(x) \Rightarrow$$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

$$= F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha))$$

$$= \left[F(\varphi(t))\right]_\alpha^\beta$$

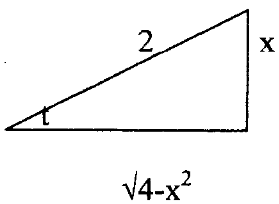
$$= \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi`(t)dt$$

وسنوضح ذلك فى المثال التالى :

<u>مثال</u> أحسب التكامل $\int_0^2 \sqrt{4 - x^2}\, dx$

<u>الحل</u> نستخدم التعويض $x = 2\sin t$ فيكون

$$dx = 2\cos t dt$$



$$x=0 \Rightarrow t=0 \; x=2 \Rightarrow t=\frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$\therefore \int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)\,dt = 2\left[t+\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi$$

<u>مثال</u> أحسب التكامل $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx$

<u>الحل</u> هذا التكامل يحل بالتجزئ كما يلى :

$$u=x \qquad dv=\sin x.dx \,,$$

$$du=1.dx \qquad \Rightarrow v=-\cos x$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزئ نحصل على :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx = [-x\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x)\,dx = 0+[\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

والآن باستخدام نظرية نيوتن – ليبتر

يمكننا إثبات الخواص الإضافية التالية للتكامل المحدود للدوال المتصلة :

<u>خاصية (1)</u>

$$\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$$

البرهان

بوضع x=a-t نجد أن dx=-dt ونحصل على :

$$\int_0^a f(x)dx = -\int_a^0 f(a-t)dt = \int_0^a f(a-t)dt = \int_0^a f(a-x)dx$$

خاصية (2)

$$\int_0^a f(x)dx = \begin{cases} 2\int_0^{\frac{a}{2}} f(x)dx & if \quad f(a-x) = f(x) \\ 0 & if \quad f(a-x) = -f(x) \end{cases}$$

البرهان

أولا أذا كان f(a-x) = -f(x) فمن خاصية (1) نجد أن

$$\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx = -\int_0^a f(x)dx$$

أذن $2\int_0^a f(x)dx = 0$ وبالتالى $\int_0^a f(x)dx = 0$

ثانيا اذا كان f(a-x)=f(x) حيث أن

$$\int_0^a f(x)dx = \int_0^{\frac{a}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{a}{2}}^{a} f(x)dx \quad ....(9)$$

نضع **x=a-t** فيكون **dx=-dt** ونحصل على

$$\int_{\frac{a}{2}}^{a} f(x)dx = -\int_{\frac{a}{2}}^{0} f(a-t)dt = \int_0^{\frac{a}{2}} f(a-t)dt$$

$$= \int_0^{\frac{a}{2}} f(a-x)dx = \int_0^{\frac{a}{2}} f(x)dx$$

ومن (9) نحصل على أن

$$\int_0^a f(x)dx = 2\int_0^{\frac{a}{2}} f(x)dx$$

خاصية(3)

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)dx & if \quad f \quad is \quad even \\ 0 \quad if \quad f \quad is \quad odd \end{cases}$$

البرهان

$$\because \int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx \quad ...(10)$$

بوضع **x = -t** نجد أن **dx=-dt** وبما أن

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = -\int_{a}^{0} f(-t)dt = \int_{0}^{a} f(-t)dt = \int_{0}^{a} f(-x)dx \quad ...(11)$$

$$f(-x) = \begin{cases} f(x) & \text{إذا كانت } f \text{ زوجية} \\ -f(x) & \text{إذا كانت } f \text{ فردية} \end{cases}$$

فمن (11) نجد أن

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = \begin{cases} \int_{0}^{a} f(x)dx & \text{إذا كانت } f \text{ زوجية} \\ -\int_{0}^{a} f(x)dx & \text{إذا كانت } f \text{ فردية} \end{cases}$$

وبالتعويض فى (10) نحصل على المطلوب.

امثلة محلولة

Solved Problems

مثال أحسب قيمة التكامل

$$\int_0^a x(a-x)^n dx$$

حيث $n \neq -1$ ، $n \neq -2$

الحل من خاصية (1) نجد أن مع وضع كل $x = (a-x)$

$$\int_0^a (a-x)^n dx = \int_0^a (a-x)x^n dx$$

$$= a\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^a - \left[\frac{x^{n+2}}{n+2}\right]_0^a = a^{n+2}\left(\left[\frac{1}{n+1}\right]-\left[\frac{1}{n+2}\right]\right)$$

مثال اثبت صحة العلاقات الاتية:

$$\int_0^{\pi} \cos x dx = 0 \quad , \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos x dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx \quad , \quad \int_0^{\pi} \sin x dx = 2$$

$$\int_0^{2\pi} \sin x dx = 0 \quad , \quad \int_0^{2\pi} \cos x dx = 0$$

الحل حيث أن

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$$

خاصية (1)

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx$$

ومن ذلك عند n=1 نجد أن :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=1$$

وحيث أن

$$\sin(\pi-x)=\sin x \quad ، \quad \cos(\pi-x)=-\cos x$$

فباستخدام خاصية (2) ، نجد أن :

$$\int_0^{\pi}\cos x\,dx=0 \quad , \quad \int_0^{\pi}\sin x\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=2$$

حيث أن cos دالة زوجية ، sin دالة فردية فإنه تبعا للخاصية (3) يكون

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos x\,dx=2\int_0^{\pi}\cos x\,dx=2\times 0=0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\,dx=0$$

حيث أن

$$\cos(2\pi - x) = \cos x \quad ، \quad \sin(2\pi - x) = -\sin x$$

فإن

$$\int_0^{2\pi} \cos x dx = 2\int_0^{\pi} \cos x dx = 2 \times 0 = 0$$

مثال احسب قيمة التكامل

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx$$

الحل

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x d\cos x$$

$$\therefore I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \sin x dx$$

$$= -\left[\sin^{n-1} x \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x dx$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)dx$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n} x dx$$

$$= (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n$$

$$\Rightarrow I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

من (12) نحصل على :

$$I_{n-2} = \frac{n-3}{n-2} I_{n-4}$$

بالتعويض فى (12) :

$$I_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} I_{n-4}$$

وبتكرار استخدام العلاقة (12) نلاحظ ان قيمة التكامل تتوقف فى النهاية على I_0 أو I_1 حسب كون n زوجية أو فردية وينتج ما يلى:

<u>**أذا كانت n زوجية فإن :**</u>

$$I_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{1}{2} I_0$$

وحيث أن $I_0 = 1 .dx = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$

$$I_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots\cdots\cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

أذا كانت n فردية فإن :

$$I_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots\cdots\cdots \frac{2}{3} I_1$$

وحيث أن

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = 1 \Rightarrow$$

$$I_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots\cdots\cdots \frac{2}{3} \cdot 1$$

مثال أوجد علاقة رجعية بين $I_{m,n-2}$ ، $I_{m,n}$ وكذلك بين $I_{m-2,n}$ ، $I_{m,n}$

اذا كان

$$I_{m,n} = \int \sin^m \theta \cos^n \theta d\theta$$

الحل

$$I_{m,n} = \int \sin^m \theta \cos^{n-1} \theta (\cos \theta) d\theta$$

$$= \frac{\cos^{n-1} \theta \sin^{m+1} \theta}{m+1} - \int \frac{\sin^{m+1}}{m+1} d(\cos^{n-1} \theta)$$

$$= \frac{\sin^{m+1} \theta}{m+1} \cos^{m-1} \theta + \frac{n-1}{m+1} \int \sin^{m+2} \theta \cos^{n-2} \theta d\theta$$

$$=\frac{\sin^{m+1}\theta}{m+1}\cos^{n-1}\theta+\frac{n-1}{m+1}\int\sin^{m}\theta(1-\cos^{2}\theta)\cos^{n-2}\theta d\theta$$

$$=\frac{\sin^{m+1}}{m+1}\cos^{n-1}\theta+\frac{n-1}{m+1}(I_{m,n-2}-I_{m,n})$$

$$I_{m,n}=\frac{1}{m+n}\sin^{m+1}\theta\cos^{n-1}\theta+\frac{n-1}{m+n}I_{m,n-2}, m\neq -n \quad (1)$$

وأخيرا يمكننا الوصول الى $I_{m,0}=\int\sin^{n}\theta d\theta$

<u>اذا كانت n زوجية</u>

يمكننا الوصول الى $I_{m,1}=\int\cos^{m}\theta\sin\theta d\theta$

<u>واذا كانت n فردية</u>

يمكننا الوصول الى

$$I_{m,1}=\int\cos^{m}\theta\sin\theta d\theta=-\int\cos^{m}\theta d(\cos\theta)$$

$$=\frac{-1}{m+1}\cos^{m+1}\theta+c$$

وبالمثل يمكن كتابة

$$I_{m,n}=\int\sin^{m-1}\theta\cos^{n}\theta(\sin\theta d\theta)$$

$$=\int\sin^{m-1}\theta\cos^{n}\theta d(\cos\theta)$$

$$=\frac{-1}{m+n}\sin^{m-1}\theta\cos^{n+1}\theta+\frac{m-1}{m+n}I_{m-2,n}\,,\quad m\neq -n \quad ...(2)$$

يمكن تطبيق (2) بدلا من (1) اذا تطلب الحل ذلك.

من (2) & (1) يمكننا كتابة النتيجتين التاليتين :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m\theta\cos\theta d\theta=\begin{cases}\dfrac{n-1}{m+n}\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^m\theta\cos^{n-2}\theta d\theta\\[2ex]\dfrac{m-1}{m+n}\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^{m-2}\theta\cos^n\theta d\theta\end{cases}$$

<u>مثال</u> اثبت ان

$$I_{6,4}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6\theta\cos^4\theta d\theta=\frac{3}{10}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6\theta\cos^2\theta d\theta$$

$$=\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6\theta d\theta=\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{512}$$

والآن يمكننا كتابة النتيجة الهامة التالية :

$$I_{m,n}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m\theta\cos^n\theta d\theta$$

$$=\frac{[(m-1)(m-3).......](n-1)(n-3)......}{(m+n)(m+n-2)..................}*P$$

2 اذا كان العدد m+n زوجى

المقام ينتهى بالعدد

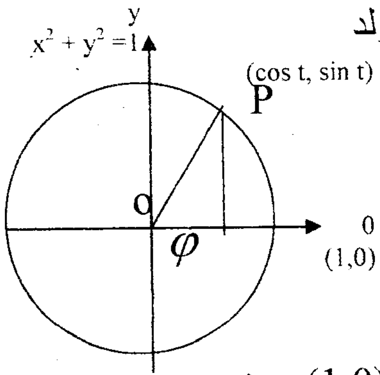
1 اذا كان العدد m+n فردى

$\frac{\pi}{2}$ اذا كان العدد m+n زوجى

P

=1 اذا كان غير ذلك

<u>مثال</u> أثبت أن $\frac{t}{2}$ هو مساحة قطاع دائرى متولد من منحنى دائرى يبدأ من (1,0) وينتهى عند (cos t, sin t) حيث $t \in [0,2\pi]$.



وأيضا $\frac{t}{2}$ هو مساحة قطاع زائدى يبدأ من (1,0) وينتهى عند (cosh t, sinh t) حيث t > 0.

<u>البرهان</u> مساحة القطاع الزائدى A(t) هى

$$A(t) = \frac{1}{2}\cosh t \sinh t - \int_{1}^{\cosh t} \sqrt{x^2 - 1}\,dx$$

الحد الأول هو مساحة المثلث $op\varphi$ والحد الثانى هو مساحة المنطقة غير المظللة سوف نبين أن $A(t) = \frac{1}{2}, t \geq 0$ وذلك بأن نثبت

$A(0)=0$ ، $t>0$ لكل $A`(t)=\frac{1}{2}$

$$A`(t)=\frac{1}{2}\left[\cosh^2 t+\sinh^2 t\right]-\frac{d}{dt}\left(\int_1^{\cosh t}\sqrt{x^2-1}dx\right)$$

باستخدام النظرية الاساسية للتكامل

$$\frac{d}{dt}\left(\int_1^{\cosh t}\sqrt{x^2-1}dx\right)=\sqrt{\cosh^2 t-1}\frac{d}{dt}(\cosh t)=\sinh t\cdot\sinh t=\sinh^2 t$$

$$A`(t)=\frac{1}{2}\left[\cosh^2 t+\sinh^2 t\right]-\sinh^2 t=\frac{1}{2}\left(\cosh^2 t-\sinh^2 t\right)=\frac{1}{2}$$

$$A(0)=\frac{1}{2}coh0\sinh 0-\left(\int_1^{\cosh t}\sqrt{x^2-1}dx\right)=\frac{1}{2}-\int_1^1\sqrt{x^2-1}dx=0$$

تمارين

أوجد قيمة كل من التكاملات الآتية:

(1) $\int_{-1}^{1}(1-x^2)^3\,dx$, $\int_{0}^{1}\sin^{-1}x\,dx$

$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^7 x\,dx$, $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos x\,dx$

(2) $\int_{0}^{1}x^2(1-x)^n\,dx$, $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\tan\frac{x}{2}\,dx$, , $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^8 x\,dx$

(3) $\int_{0}^{1}\frac{x^2}{1+x^6}\,dx$, $\int_{0}^{\pi}\frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}\,dx$, $\int_{0}^{1}\sqrt{16+9x^2}\,dx$

(4) $\int_{0}^{1}\frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$, $\int_{0}^{4}\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$, $\int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{3}}\frac{1}{\sqrt{x^2+x}}\,dx$

(5) $\int_{0}^{3}x(3-x)^n\,dx$, $\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+3x^2}\,dx$, $\int_{0}^{1}\frac{1}{2-x^2}\,dx$

(6) اثبت أنه اذا كان n,m عددان صحيحان موجبان فإن :

$$\int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x dx =$$

$$\begin{cases} \dfrac{(m-1)(m-3)......(n-1)(n-3)....}{(m+n)(m+n-2).......} \times \dfrac{\pi}{2} \\ \\ \dfrac{(m-1)(m-3)........(n-1)(n-3)........}{(m+n)(m+n-2)..........} \times 1 \end{cases}$$

أذا كان كل من n,m عدد زوجى فى بقية الحالات

(7) أوجد قيمة التكاملات الآتية :

$$\int_0^{2\pi} \sin^3 x \cos^5 x dx \quad , \quad \int_0^{2\pi} \sin^4 x \cos^6 x dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^6 x \cos^2 x dx \quad , \quad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^8 x \sin^3 x dx$$

$$, \int_0^{\pi} \sin x(x + \sin x) dx \quad , \quad \int_0^{\pi} (1+\cos)^3 \sin^2 x dx$$

(8) أثبت صحة كل مما ياتى:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx = \frac{\pi}{4}, \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\sin^3 x + \cos^3 x} dx = \frac{\pi}{4}$$

(9) أوجد كل مما يلى:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)dx \ , \ \int_0^{\pi} \ln\sin x dx \ , \ \int_0^{a} (a^2-x^2)^{\frac{7}{2}} dx$$

$$\int_{-a}^{a} x^2(a^2-x^2)^{\frac{5}{2}} dx \ , \ \int_0^{\pi} x\cos^4 x\sin^3 x dx$$

(10)أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين $y=2x^2$ ، $y=x^4-2x^2$

(11)أوجد مساحة المنطقة المحصورة من الشمال بالمنحنى $x=y^2$ ومن اليمين بالمنحنى $x=3-2y^2$

(12) أوجد مساحة المنطقة بين $x=y^2$ ، $x-y=2$

(i) التكامل بالنسبة الى x (ii) التكامل بالنسبة الى y

(13) أوجد حجم المجسم الناشئ من دوران المنطقة $y=\sin x$ ومحور x،

$0 \le x \le \pi$ حول الخط المستقيم $y=1$

(14)اذا دارت المنطقة بين $y=\sin x$ ، $y=\cos x$ $\pi/4 \le x \le \pi$ حول الخط $y=1$. أوجد حجم المجسم.

(15)أوجد حجم المجسم الناشئ من دوران المنطقة بين $y=x^2$ ، $y=2x$ حول (i)الخط $x=5$ (ii) الخط $x=1$

* * *