

الباب الخامس

تطبيقات التكامل المحدود

Applications of Definite Integrations

للتكامل المحدود عدیدا من التطبيقات والاستخدامات في المسائل العملية.

وسنكتفي هنا بذكر جزء من هذه التطبيقات .

1. المساحة Area

(i) . إذا كانت f دالة متصلة بحيث $f(x) \geq 0$ لكل $x \in [a, b]$ فإنه

تبعاً لتعريف التكامل فإن المساحة المحصورة بين منحنى الدالة f

والمستقيمين $x=a$ ، $x=b$ ومحور السينات هي عبارة عن التكامل

$$\int_a^b f(x) dx$$

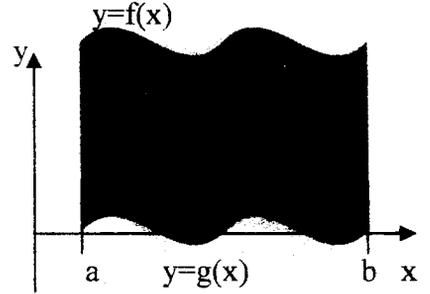
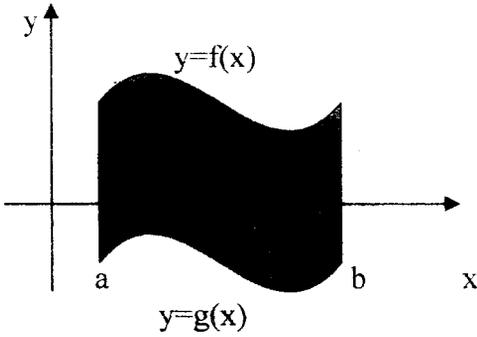
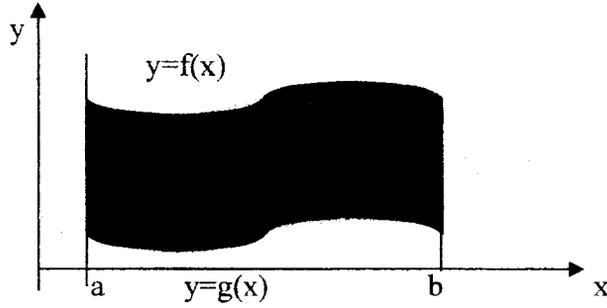
(ii) إذا كانت f ، g دالتان متصلتان بحيث $f(x) \geq g(x) \geq 0$ لكل

$x \in [a, b]$ فإن المساحة A المحصورة بين :

(أ) منحنى الدالتين f, g (ب) المستقيمين $x=a, x=b$

كما هو موضح بالشكل هي كالتالي :

$$A = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$



الصياغة السابقة يمكن أن نوسع استخدامها أيضا عندما تكون f, g سالبة عند بعض نقاط (أجزاء) من الفترة $[a, b]$. للحصول على المساحة المشار إليها سنختار عدد سالب d أقل من القيمة الصغرى للدالة g على $[a, b]$ ونفرض أن لكل $x \in [a, b]$:

$$f_1(x) = f(x) - d = f(x) + |d|$$

$$g_1(x) = g(x) - d = g(x) + |d|$$

$$f_1(x) \geq g_1(x) \geq 0$$

وهكذا يكون

أمثلة محلولة Solved Problems

وحيث أن المساحة A المحصورة بين المنحنيين f، g مساوية للمساحة

المحصورة بين f_1 ، g_1 فإنه تبعا للمساوية (1) يكون :

$$A = \int_a^b [f_1(x) - g_1(x)] dx = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

مثال أوجد المساحة المحصورة بين منحنى الدالتين

$$y + 2x - 3 = 0, \quad y + x^2 = 6$$

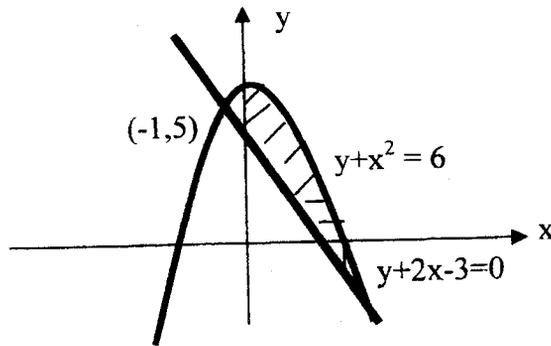
الحل نوجد نقطتي التقاطع $(-1, 5)$ ، $(3, -3)$ للمنحنيين وذلك على

المعادلتين

$$y = 6 - x^2, \quad y = 3 - 2x$$

$$A = \int_{-1}^3 [(6 - x^2) - (3 - 2x)] dx$$

وتكون المساحة المحصورة هي



$$A = \int_{-1}^3 [(6 - x^2) - (3 - 2x)] dx$$

$$= \int_{-1}^3 (3 - x^2 + 2x) dx = \left[3x - \frac{x^3}{3} + x^2 \right]_{-1}^3 = \frac{32}{3}$$

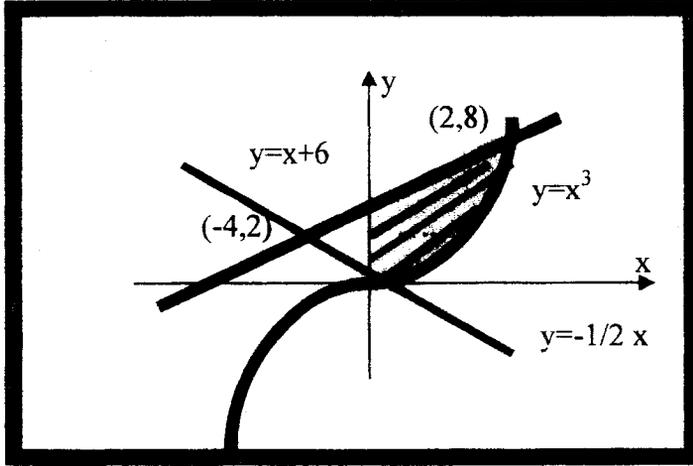
مثال أوجد المساحة المحصورة بين منحنيات الدوال

$$y - x^3 = 0 , 2y + x = 0 , y - x = 6$$

الحل الشكل الآتي يوضح منحنيات الدوال المعطاه والمساحة المطلوب

ايجادها. ونلاحظ ان هذه المساحة لا يمكن حسابها باستخدام (1) مرة واحدة ولكن اذا جزئنا هذه المساحة الى المنطقتين R_1 ، R_2 كما موضح

بالشكل وكانت مساحتهما هما A_1 ، A_2 فإن :



$$A_1 = \int_{-4}^0 \left[(x + 6) - \left(-\frac{1}{2}x\right) \right] dx = \int_{-4}^0 \left[\frac{3x}{2} + 6 \right] dx$$

$$= \left[\frac{3}{4}x^2 + 6x \right]_{-4}^0 = 12$$

$$A_2 = \int_0^2 [(x+6) - x^3] dx = \left[\frac{x^2}{2} + 6x - \frac{x^4}{4} \right]_0^2 = 10$$

$$A_1 + A_2 = 12 + 10 = 22$$

فتكون المساحة المطلوبة

تطبيقات هندسية

(iii) في بعض الاحوال تكون المنطقة المطلوب ايجاد مساحتها

محصورة بين :

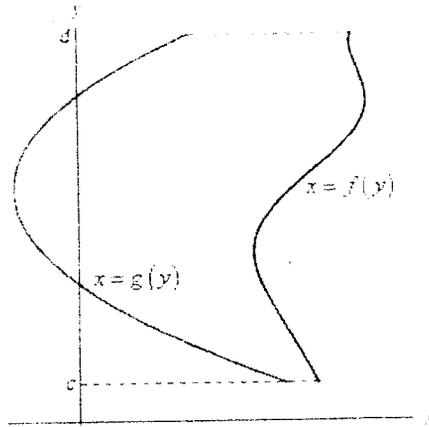
(أ) منحنى الدالتين $x=f(y)$ ، $x=g(y)$ ($f(y) \geq g(y)$)

(ب) الخطين المستقيمين $y=c$ ، $y=d$

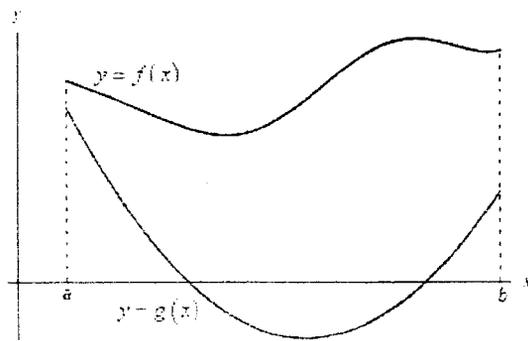
في هذه الحالة وبطريقة مماثلة لما سبق مع ابدال المتغيرين x, y

نحصل على المساحة A للمنطقة المذكورة (أنظر الشكل) كما يلي :

$$A = \int_c^d [f(y) - g(y)] dy$$



والآن بالنسبة للمساحات والحجوم المحصورة بين المنحنيات سوف نتبع مايلي:

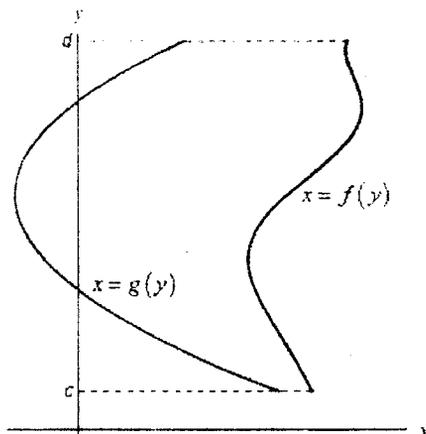


$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \dots\dots\dots(1)$$

$$x = f(y), \quad x = g(y)$$

للدوال

$$f(y) \geq g(y).$$



$$A = \int_c^d [f(y) - g(y)] dy \dots\dots\dots(2)$$

وسوف نستخدم التعبير الآتي للمساحات

$$A = \int_a^b \left(\begin{array}{c} \text{upper} \\ \text{function} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{lower} \\ \text{function} \end{array} \right) dx, \quad a \leq x \leq b \quad (3)$$

وفي الحالة الثانية نستخدم التعبير

$$A = \int_c^d \left(\begin{array}{c} \text{right} \\ \text{function} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{left} \\ \text{function} \end{array} \right) dy, \quad c \leq y \leq d \quad (4)$$

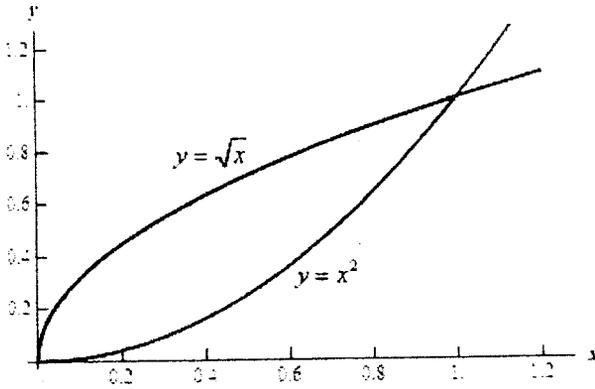
مسائل محلولة

Solved Problems

مثال أوجد المساحة المحصورة بين منحنيات الدوال

$$y = x^2, \quad y = \sqrt{x}.$$

الحل الشكل الآتي يوضح منحنيات الدوال المعطاه والمساحة المحصورة المطلوب ايجادها.



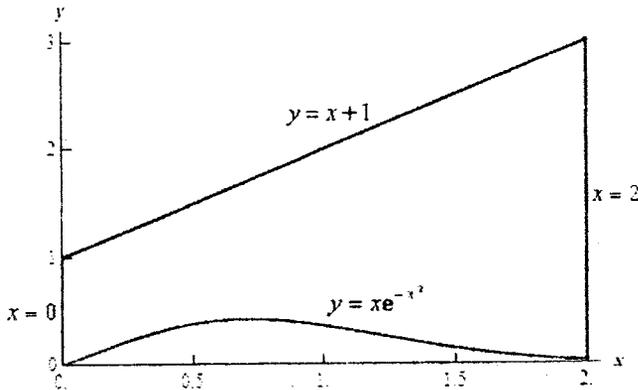
$$\begin{aligned}
 A &= \int_a^b \left(\text{upper function} \right) - \left(\text{lower function} \right) dx \\
 &= \int_0^1 \sqrt{x} - x^2 dx \\
 &= \left(\frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_0^1 \\
 &= \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

مثال أوجد المساحة المحصورة بين منحنيات الدوال

$$y = xe^{-x^2}, \quad y = x + 1, \quad x = 2, \quad y \text{ axis}.$$

الحل

الشكل الآتي يوضح منحنيات الدوال المعطاه والمساحة المحصورة المطلوب ايجادها.



$$\begin{aligned}
 A &= \int_a^b \left(\text{upper function} \right) - \left(\text{lower function} \right) dx \\
 &= \int_0^2 (x + 1 - xe^{-x^2}) dx \\
 &= \left(\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2}e^{-x^2} \right) \Big|_0^2 \\
 &= \frac{7}{2} + \frac{e^{-4}}{2} = 3.5092
 \end{aligned}$$

مثال أوجد المساحة المحصورة بين منحنيات الدوال

$$y = 2x^2 + 10 ,$$

$$y = 4x + 16 .$$

الحل

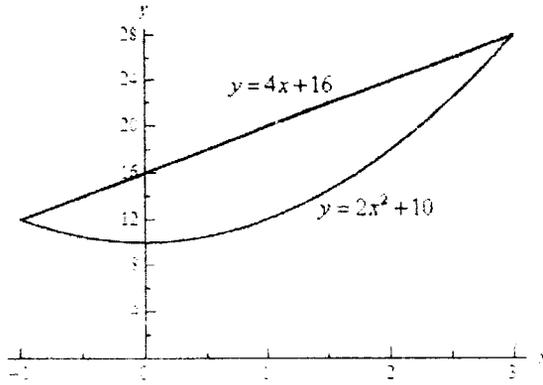
بحل المعادلتين نحصل على:

$$2x^2 + 10 = 4x + 16$$

$$2x^2 - 4x - 6 = 0$$

$$2(x + 1)(x - 3) = 0$$

الشكل الآتي يوضح منحنيات الدوال المعطاه والمساحة المحصورة المطلوب ايجادها.



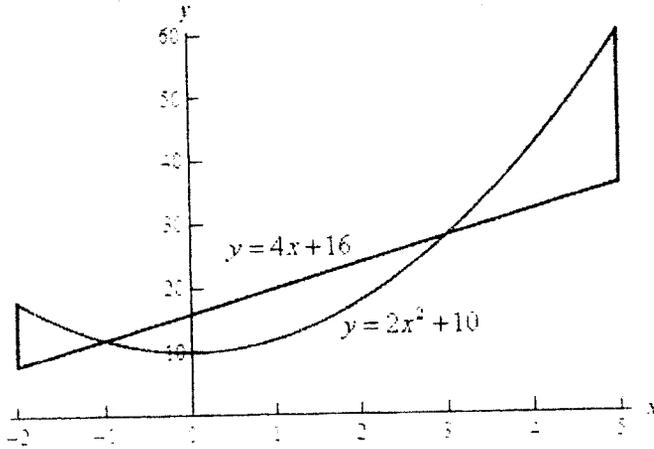
$$\begin{aligned}
 A &= \int_a^b \left(\text{upper function} \right) - \left(\text{lower function} \right) dx \\
 &= \int_{-1}^3 (-2x^2 + 4x + 6) dx \\
 &= \left(-\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 + 6x \right) \Big|_{-1}^3 \\
 &= \frac{64}{3}.
 \end{aligned}$$

مثال أوجد المساحة المحصورة بين منحنيات الدوال

$$y = 2x^2 + 10, \quad y = 4x + 16, \quad x = -2, \quad x = 5.$$

الحل

الشكل الآتي يوضح منحنيات الدوال المعطاه والمساحة المحصورة المطلوب ايجادها.



من الشكل السابق نلاحظ انه يوجد ثلاثة مساحات محددة بالمنحنيات وتكون المساحة المطلوبة في هذه الحالة:

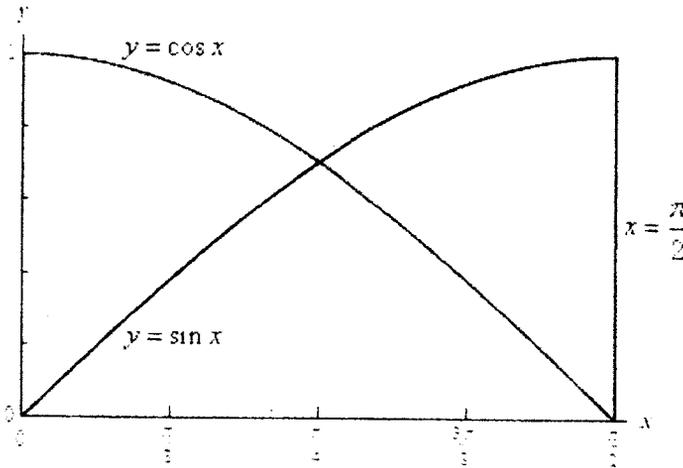
$$\begin{aligned}
 \therefore A &= \int_{-2}^{-1} (2x^2 + 10 - (4x + 16)) dx + \int_{-1}^3 (4x + 16 - (2x^2 + 10)) dx \\
 &\quad + \int_3^5 (2x^2 + 10 - (4x + 16)) dx \\
 &= \int_{-2}^{-1} (2x^2 - 4x - 6) dx + \int_{-1}^3 (-2x^2 + 4x + 6) dx \\
 &\quad + \int_3^5 (2x^2 - 4x - 6) dx \\
 &= \left(\frac{2}{3}x^3 - 2x^2 - 6x \right) \Big|_{-2}^{-1} + \left(-\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 + 6x \right) \Big|_{-1}^3 + \left(\frac{2}{3}x^3 - 2x^2 - 6x \right) \Big|_3^5 \\
 &= \frac{14}{3} + \frac{64}{3} + \frac{64}{3} \\
 &= \frac{142}{3}.
 \end{aligned}$$

مثال أوجد المساحة المحصورة بين منحنيات الدوال

$$y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad x = \frac{\pi}{2}, \quad y\text{-axis.}$$

الحل

الشكل الآتى يوضح منحنيات الدوال المعطاه



فى هذا المثال يوجد حالة أخرى وهى ايجاد مساحة تكاملين متقاطعين فى

$$\sin x = \cos x$$

النقطة:

والمساحة المحصورة المطلوب ايجادها هى:

$$\begin{aligned} \therefore A &= \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x) dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\sin x - \cos x) dx \\ &= (\sin x + \cos x) \Big|_0^{\pi/4} + (-\cos x - \sin x) \Big|_{\pi/4}^{\pi/2} \\ &= \sqrt{2} - 1 + (\sqrt{2} - 1) \\ &= 2\sqrt{2} - 2 = 0.828427. \end{aligned}$$

مثال أوجد المساحة المحصورة بين منحنيات الدوال

$$x = \frac{1}{2}y^2 - 3, y = x - 1.$$

الحل

دعنا اولاً نوجد نقط التقاطع وذلك بحل المعادلتين نحصل على:

$$y + 1 = \frac{1}{2}y^2 - 3 \Rightarrow$$

$$2y + 2 = y^2 - 6 \Rightarrow$$

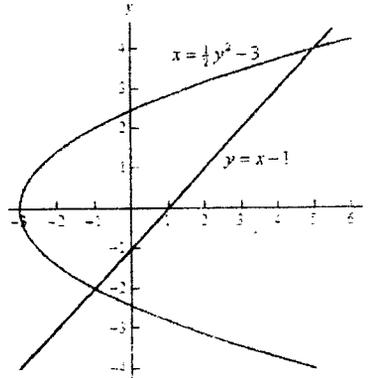
$$0 = y^2 - 2y - 8 \Rightarrow$$

$$0 = (y - 4)(y + 2) \Rightarrow$$

$$y = -2, y = 4$$

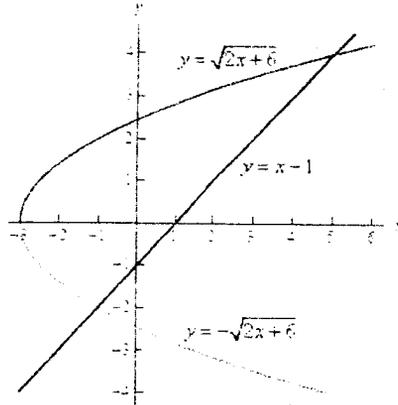
وبالتالى الاحداثيات $(5,4), (-1,-2)$

الشكل الآتى يوضح منحنيات الدوال المعطاه والمساحة المحصورة
المطلوب ايجادها



وبالتالى يمكننا حل معادلة القطع المكافئ للدالة العليا والسفلى مع العلم بأن
 الاشارة "+" للجزء العلوى والاشارة "-" للسفلى:

$$y = \pm\sqrt{2x+6}$$



وبالتالى التكامل المطلوب هو:

$$\begin{aligned} \therefore A &= \int_{-3}^1 \sqrt{2x+6} - (\sqrt{2x+6}) dx + \int_{-1}^5 \sqrt{2x+6} - (x-1) dx \\ &= \int_{-3}^1 2\sqrt{2x+6} dx + \int_{-1}^5 (\sqrt{2x+6} - x + 1) dx \\ &= \int_{-3}^{-1} (2\sqrt{2x+6}) dx + \int_{-1}^5 (\sqrt{2x+6}) dx + \int_{-1}^5 (-x+1) dx \\ &= \left(\frac{2}{3} u^{3/2} \right) \Big|_0^4 + \left(\frac{1}{3} u^{3/2} \right) \Big|_4^{16} + \left(-\frac{1}{2} x^2 + x \right) \Big|_{-1}^5 \\ &= 18 \end{aligned}$$

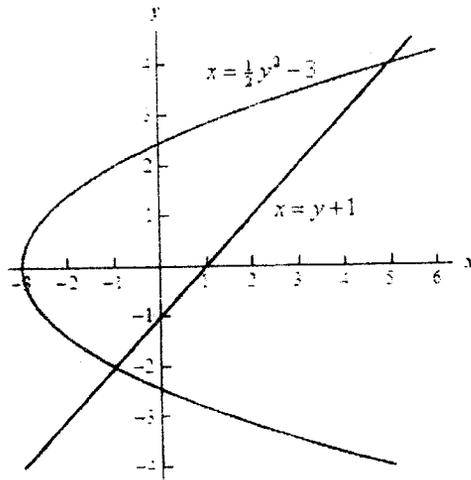
وبالتالى يبقى لنا حساب التكامل الاتى من معادلة (4):

$$A = \int_c^d \left(\text{right function} \right) - \left(\text{left function} \right) dy, \quad c \leq y \leq d$$

$$x = f(y)$$

وذلك للدالة

الشكل الآتي يوضح منحنيات الدوال المعطاه والمساحة المحصورة المطلوبة



والمساحة المطلوبة هي:

$$\begin{aligned} A &= \int_c^d \left(\text{right function} \right) - \left(\text{left function} \right) dy \\ &= \int_{-2}^4 \left((y+1) - \left(\frac{1}{2}y^2 - 3 \right) \right) dy \\ &= \int_{-2}^4 \left(-\frac{1}{2}y^2 + y + 4 \right) dy \\ &= \left(-\frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{2}y^2 + 4y \right) \Big|_{-2}^4 \\ &= 18 \end{aligned}$$

وهى نفس النتيجة السابقة واسهل من الطريقة السابقة.

مثال أوجد المساحة المحصورة بين منحنيات الدوال

$$x = -y^2 + 10, \quad x = (y - 2)^2$$

الحل دعنا اولاً نوجد نقط التقاطع وذلك بحل المعادلتين نحصل على

$$y^2 + 10 = (y - 2)^2 \Rightarrow$$

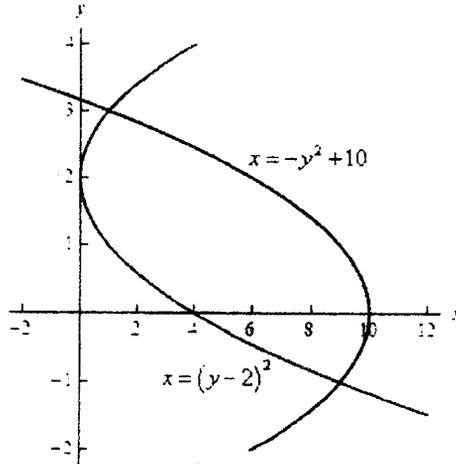
$$-y^2 + 10 = y^2 - 4y + 4 \Rightarrow$$

$$0 = 2y^2 - 4y - 6 \Rightarrow$$

$$0 = 2(y + 1)(y - 3) \Rightarrow$$

$$y = -1, y = 3$$

الشكل الآتى يوضح منحنيات الدوال المعطاه والمساحة المحصورة المطلوب ايجادها



والمساحة المطلوبة هي:

$$\begin{aligned}
 A &= \int_c^d \left(\text{right function} \right) - \left(\text{left function} \right) dy \\
 &= \int_{-1}^3 ((-y^2 + 10) - (y - 2)^2) dy \\
 &= \int_{-1}^3 (-2y^2 + 4y + 6) dy \\
 &= \left(-\frac{2}{3}y^3 + 2y^2 + 6y \right) \Big|_{-1}^3 \\
 &= \frac{64}{3}
 \end{aligned}$$

مثال أوجد المساحة المحصورة بين منحنيات الدوال

$$x = 2y^2 - 4, \quad x = y^2$$

الحل دعنا اولاً نوجد نقط التقاطع وذلك بحل المعادلتين نحصل على

$$\text{put } y^2 = 2y^2 - 4 \Rightarrow$$

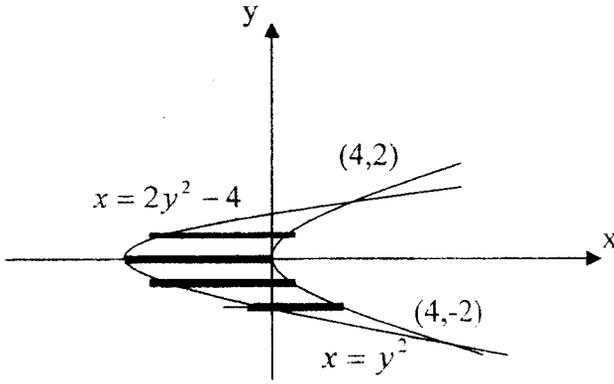
$$y^2 - 4 = 0 \Rightarrow$$

$$(y - 2)(y + 2) = 0$$

$$\Rightarrow y = 2,$$

$$y = -2$$

الشكل الآتي يوضح منحنيات الدوال المعطاه والمساحة المحصورة المطلوب ايجادها



والمساحة المطلوبة هي:

$$A = \int_{-2}^2 [y^2 - (2y^2 - 4)] dy = \int_{-2}^2 (4 - y^2) dy = \left[4y - \frac{y^3}{3} \right]_{-2}^2 = \frac{32}{3}$$

إذا كانت الدالة $y=f(x)$ معطاه في الصورة البارامتريّة:

$$y = \psi(t), x = \varphi(t), \quad \varphi(\alpha) = a, \quad \varphi(\beta) = b, \quad t \in [\alpha, \beta]$$

فإن المساحة المحصورة بين منحنى هذه الدالة ومحور السينات والخطين

المستقيمين $x=a$ ، $x=b$ هي :

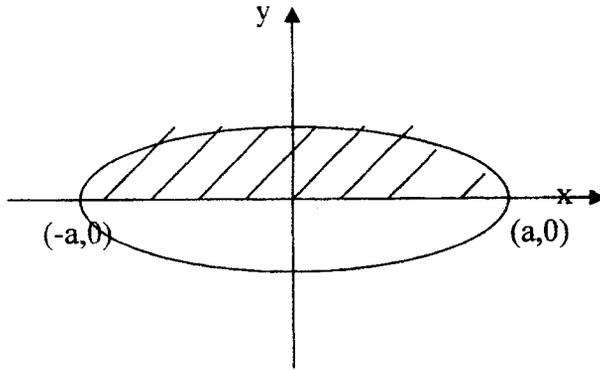
$$A = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b y dx = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \varphi'(t) dt \quad (1)$$

مثال أوجد مساحة القطع النقص $x = a \cos t, \quad y = b \sin t$

الحل نحسب مساحة النصف العلوي ثم نضاعف الناتج. في هذه الحالة

فإن x تتغير من $-a$ الى a ، t تتغير من π الى 0 .

$$\begin{aligned}
 A &= 2 \int_{\pi}^0 (b \sin t)(-a \sin t) dt \\
 &= -2ab \int_{\pi}^0 \sin^2 t dt = 2ab \int_{\pi}^0 \sin^2 t dt \\
 &= 2ab \int_{\pi}^0 \frac{1}{2} (1 - \cos 2t) dt = ab \left[t - \frac{1}{2} \sin 2t \right]_0^{\pi} = \pi ab
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 A &= 2 \int_{\pi}^0 (b \sin t)(-a \sin t) dt = 2ab \int_{\pi}^0 \sin^2 t dt = -2ab \int_{\pi}^0 \sin^2 t dt \\
 &= 2ab \int_{\pi}^0 \frac{1}{2} (1 - \cos 2t) dt = ab \left[t - \frac{1}{2} \sin 2t \right]_0^{\pi} = \pi ab
 \end{aligned}$$