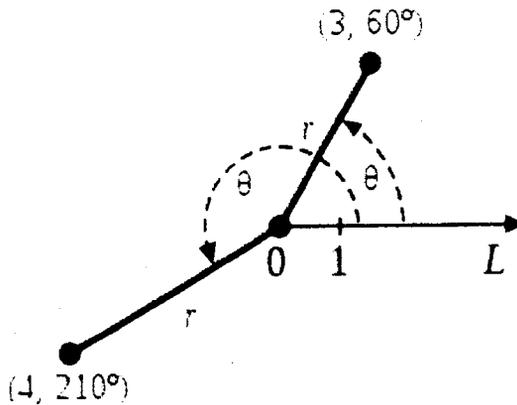


الباب السادس

الإحداثيات القطبية

Polar coordinate system

فى نظام الإحداثيات الكارتيزية الزوج المرتب (a,b) يمثل نقطة بعدها عن محور x ومحور y هما a و b على الترتيب. هناك طريقة أخرى لتمثيل النقط باستخدام الإحداثيات القطبية. نبدأ بنقطة ثابتة تسمى القطب (نقطة الأصل) وخط متجه ثابت (المحور القطبي) يبدأ من نقطة O . أى نقطة فى المستوى يمكن تحديدها بواسطة بعدها عن القطب O ، $r=d(O,p)$ وكذلك مقياس الزاوية التى يصنعها op مع المحور القطبي كما بالرسم وبذلك يكون r, θ هما الإحداثيات القطبية للنقطة p ، ويستخدم الرمز (r, θ) أو $p(r, \theta)$ لتحديد النقطة P .



ويكون اتجاه الدوران (الزاوية θ) الموجب هو اتجاه الدوران ضد عقارب الساعة ويكون سالبا ' إذا كان في اتجاه عقارب الساعة. تمثيل النقطة باستخدام الإحداثيات القطبية تمثيل ليس وحيد.

على سبيل المثال

$$(3, \pi/4) , (3, 9\pi/4) , (3, -7\pi/4)$$

كلها تمثل نقطة واحدة. ومن الممكن أن يكون r سالب في هذه الحالة نقيس الزاوية θ (سواء كانت موجبة أو سالبة) ثم نضع النقطة في الاتجاه العكسي لموضعها (لأن r سالب). وإحداثيات القطب هي $(0, \theta)$ حيث θ تأخذ أى قيم .

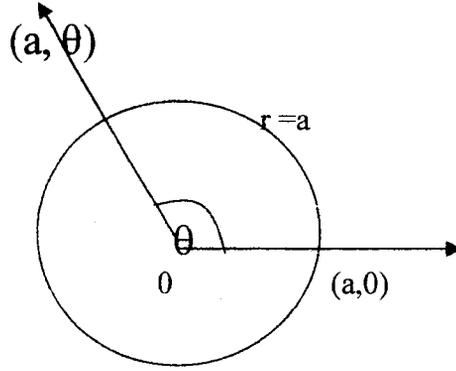
المعادلات القطبية

Polar equations

هي معادلة في r, θ وحلها يكون بمعرفة القيم r, θ . ويمكن تمثيل المعادلة بالرسم وذلك بفئة نقط الحل.

مثال

المعادلة القطبية $r = a$ حيث $a \neq 0$ ، تمثيل هذه المعادلة هو فئة النقط (a, θ) لأى زاوية θ . وبذلك فإن المعادلة تمثل دائرة نصف قطرها $|a|$ ومركزها نقطة القطب.

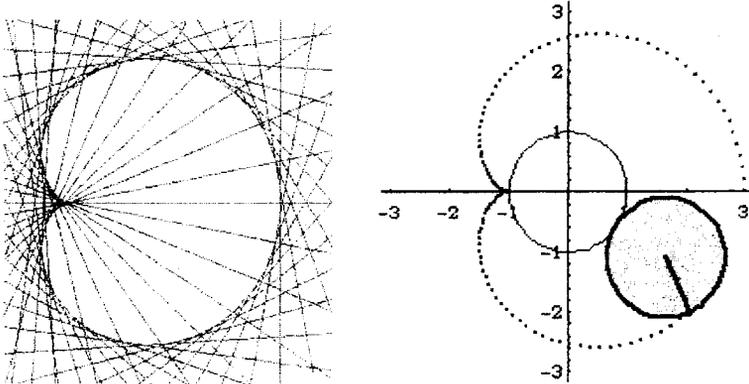


الكارديويد

Cardioid

اخذت كلمة كارديويد (شكل القلب، من الكلمة اليونانية روت كاردي والتي تعنى كلمة قلب)

تعريف: يعرف الكارديويد على انه النقطة المتحركة على دائرة وحركتها ثابتة بالنسبة لدائرة ثابتة نصف قطرها بدون انزلاق كما هو موضح بالشكل التالي



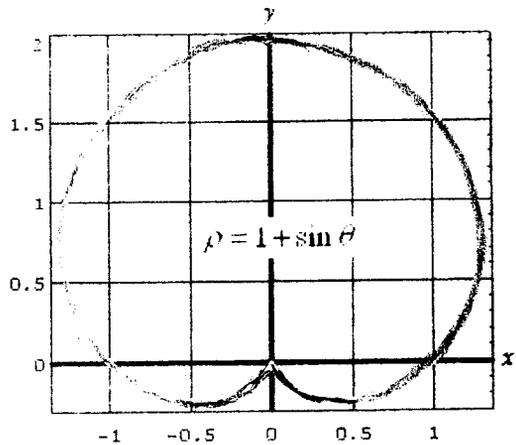
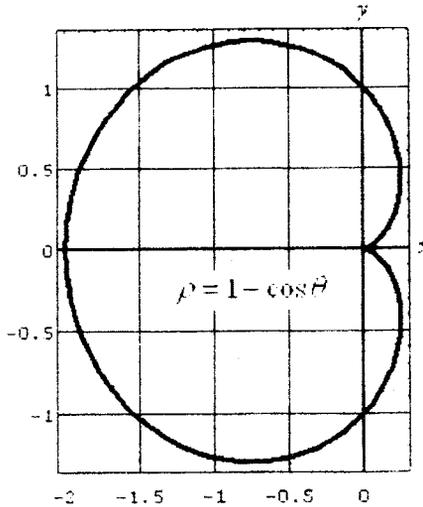
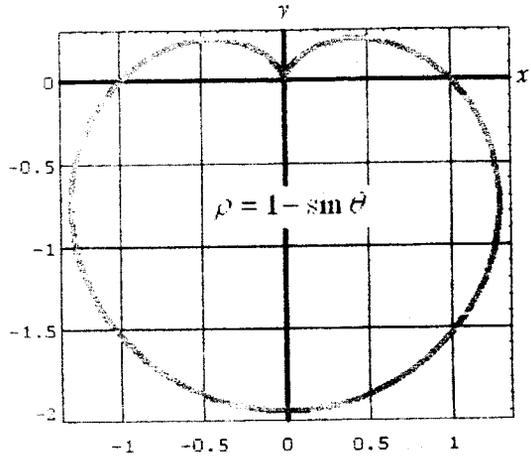
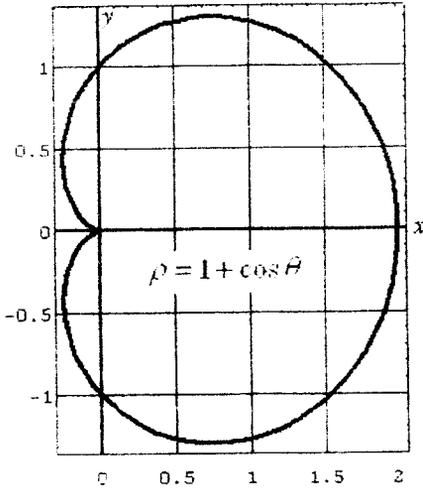
مسائل محلولة

Solved Problems

مثال ارسم معادلات الكارديويد الممثلة بالمعادلات التالية:

$$\rho = 1 + \cos \theta, \quad \rho = 1 - \cos \theta,$$

$$\rho = 1 + \sin \theta, \quad \rho = 1 - \sin \theta.$$

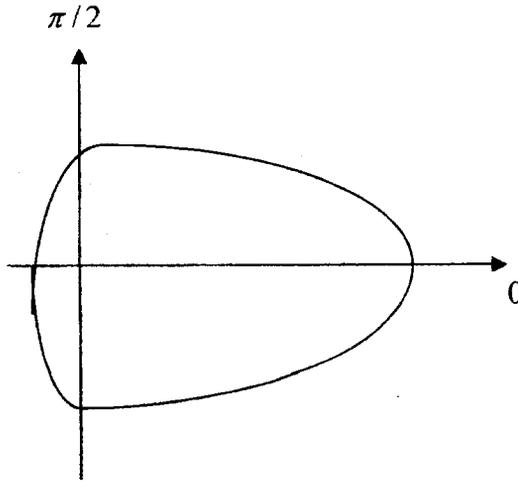


مثال ارسم معادلة الكارديويد الممثلة بالمعادلة القطبية التالية:

$$r = 2 + 2 \cos \theta$$

الحل

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π
r	4	3.7	3.4	3	2	1	0	0.3	0



حيث ان الدالة $\cos \theta$ تتناقص من 1 الى -1 و ان θ تتغير من 0 الى π بالتالي r تتغير من 4 الى 0 والرسم السابق يوضح ذلك:

$$r: 0 \rightarrow 4 \Rightarrow \cos \theta: -1 \rightarrow 1 \Rightarrow \theta: \pi \rightarrow 2\pi$$

مثال ارسم المعادلة القطبية (Lima cons) التالية:

$$r = 2 + 4 \cos \theta$$

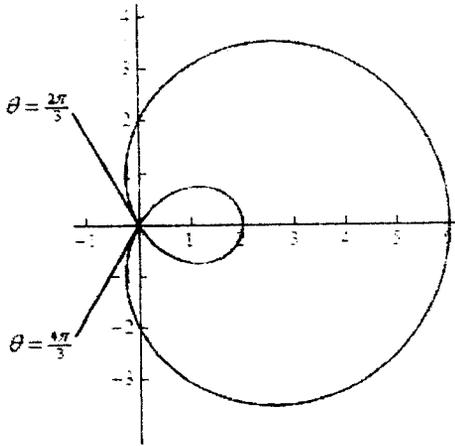
$$r = 2 + 4\cos\theta$$

$$r = 0 \quad \text{at} \quad \theta = 2\pi/3$$

$$\theta : 2\pi \rightarrow 2\pi/3$$

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π
r	6	5.4	4.8	4	2	0	-0.8	-1.4	-2

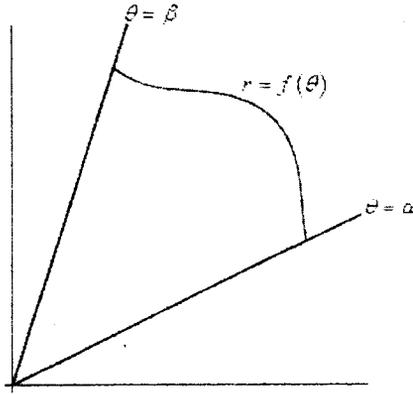
$$r : 0 \rightarrow 4 \Rightarrow \cos\theta : -1 \rightarrow 1 \Rightarrow \theta : \pi \rightarrow 2\pi$$



المساحات في الإحداثيات القطبية

Areas in the polar coordinates

في هذا الجزء سنبحث على المساحات المحصورة داخل المنحنيات القطبية. والشكل التالي يوضح المساحات المراد حسابه



المساحة المحددة الداخلية تعطى بالعلاقة:

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

مسائل محلولة

Solved Problems

مثال اوجد مساحة العروة الداخلية للمنحنى (inner loop) :

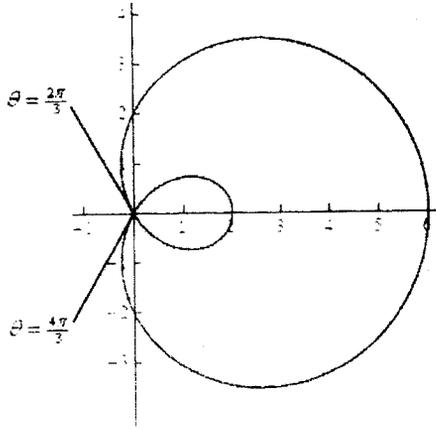
$$r = 2 + 4 \cos \theta$$

الحل بوضع المعادلة مساوية للصفر نحصل على

$$0 = 2 + 4 \cos \theta \Rightarrow$$

$$\cos \theta = -\frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$$

والشكل التالي يوضح المطلوب

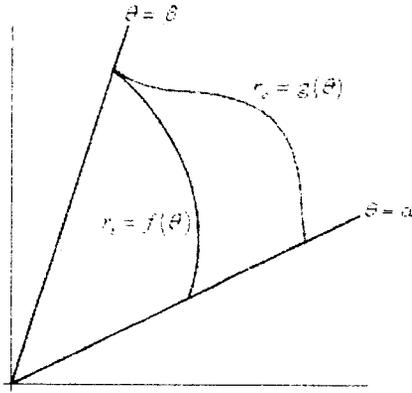


والمساحة المطلوبة هي:

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{2\pi/3}^{4\pi/3} \frac{1}{2} (2 + 4\cos\theta)^2 d\theta \\
 &= \int_{2\pi/3}^{4\pi/3} \frac{1}{2} (4 + 16\cos\theta + 16\cos^2\theta) d\theta \\
 &= \int_{2\pi/3}^{4\pi/3} 2 + 8\cos\theta + 4(1 + \cos(2\theta)) d\theta \\
 &= \int_{2\pi/3}^{4\pi/3} 6 + 8\cos\theta + 4\cos\theta(2\theta) d\theta \\
 &= (6\theta + 8\sin\theta + 2\sin(2\theta)) \Big|_{2\pi/3}^{4\pi/3} \\
 &= 4\pi - 6\sqrt{3} \\
 &= 2.174
 \end{aligned}$$

ملاحظة: للحصول على المساحات المحددة بمنحنيين كما فى الشكل

التالى:



فى هذه الحالة نستخدم المعادلة الآتية:

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} (r_0^2 - r_1^2) d\theta$$

مثال اوجد المساحة الداخلية للمنحنى $r = 3 + 2 \sin \theta$

والمساحة الخارجية للمنحنى $r = 2$

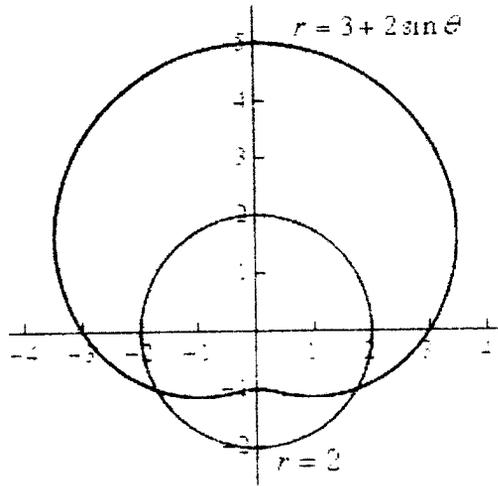
الحل بمساوات المعادلتين للحصول على θ كالتالى

$$3 + 2 \sin \theta = 2$$

$$\sin \theta = -\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\theta = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$$

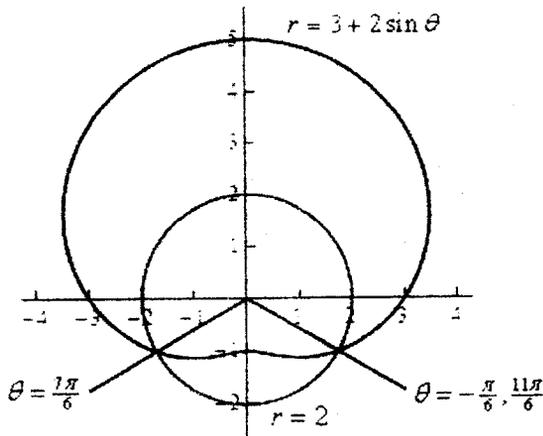
والرسم التالى يوضح ذلك:



وحيث ان

$$\frac{11\pi}{6} = -\frac{\pi}{6}$$

وبأضافة الزاوية الحاصلين عليها يكون الشكل المطلوب هو:



وتكون المساحة المطلوبة هي:

$$\begin{aligned}
A &= \int_{\pi/6}^{7\pi/6} \frac{1}{2} ((3 + 2\cos\theta)^2 - (2)^2) d\theta \\
&= \int_{\pi/6}^{7\pi/6} \frac{1}{2} (5 + 12\sin\theta + 4\sin^2\theta) d\theta \\
&= \int_{\pi/6}^{7\pi/6} \frac{1}{2} (7 + 12\sin\theta - 2\cos(2\theta)) d\theta \\
&= \frac{1}{2} (7\theta + 12\cos\theta - \sin(2\theta)) \Big|_{-\pi/6}^{7\pi/6} \\
&= \frac{11\sqrt{3}}{2} + \frac{14\pi}{3} \\
&= 24.187
\end{aligned}$$

مثال اوجد المساحة الداخلية للمنحنى $r = 3 + 2\sin\theta$

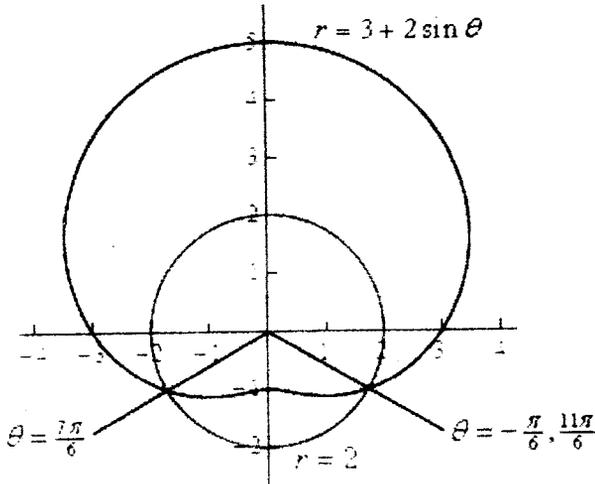
والمساحة الداخلية للمنحنى $r = 2$

الحل

بمساوات المعادلتين للحصول على θ كالتالى ونتبع نفس الطريقة السابقة
فنحصل على:

$$\theta: \frac{7\pi}{6} \rightarrow \frac{11\pi}{6}$$

والرسم التالى يوضح ذلك:



وتكون المساحة المطلوبة هي:

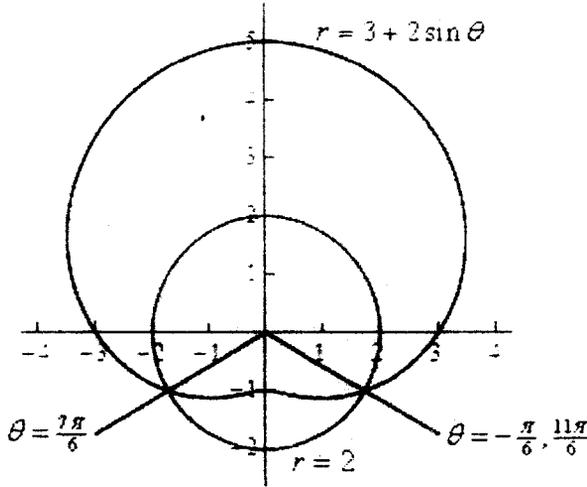
$$\begin{aligned}
 A &= \int_{7\pi/6}^{11\pi/6} \frac{1}{2} ((2)^2 - (3 + 2 \cos \theta)^2) d\theta \\
 &= \int_{7\pi/6}^{11\pi/6} \frac{1}{2} (-5 - 12 \sin \theta - 4 \sin^2 \theta) d\theta \\
 &= \int_{7\pi/6}^{11\pi/6} \frac{1}{2} (-7 - 12 \sin \theta + 2 \cos(2\theta)) d\theta \\
 &= \frac{1}{2} (-7\theta + 12 \cos \theta + \sin(2\theta)) \Big|_{7\pi/6}^{11\pi/6} \\
 &= \frac{11\sqrt{3}}{2} - \frac{7\pi}{3} \\
 &= 2.196
 \end{aligned}$$

مثال اوجد المساحة الداخلية لكل من المنحنيات

$$r = 3 + 2 \sin \theta, \quad r = 2$$

الحل

بمساوات المعادلتين للحصول على θ ونتبع نفس الطريقة السابقة
فنحصل على الشكل التالي:



هناك طريقتين لحل هذا المثال

الطريقة الاولى: نلاحظ هنا ان الدائرة تنقسم الى جزئين وسنحسب الجزء العلوى كما فى المثال السابق

$$\begin{aligned} \text{Area} &= \text{Area of Circle} - \text{Area from pervious Example} \\ &= \pi(2)^2 - 2.196 \\ &= 10.370 \end{aligned}$$

الطريقة الثانية:

$$\text{Area} = \text{Area of Limacon} - \text{Area from pervious Example}$$

$$\begin{aligned}
\therefore A &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (3 + 2 \sin \theta)^2 d\theta - 24.187 \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (9 + 12 \sin \theta + 4 \sin^2 \theta) d\theta - 24.187 \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (11\theta + 12\theta + 2 \cos(2\theta)) d\theta - 24.187 \\
&= \frac{1}{2} (11\theta - 12 \cos \theta + \sin(2\theta)) \Big|_0^{2\pi} - 24.187 \\
&= 11\pi - 24.187 \\
&= 10.370
\end{aligned}$$

مثال اوجد المساحة الداخلية لمنحنى الكارديويد $r = 2 + 2 \cos \theta$

الحل حيث ان الدالة منتظمة الشكل فى الاحداثيات القطبية لذلك

سنحسب المساحة العلوية ثم نضرب الناتج فى 2 فنحصل على المساحة الكلية مع ملاحظة ان الزاوية θ تتغير من 0 الى π :

$$\therefore A = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (2 + 2 \cos \theta)^2 d\theta = 6\pi$$

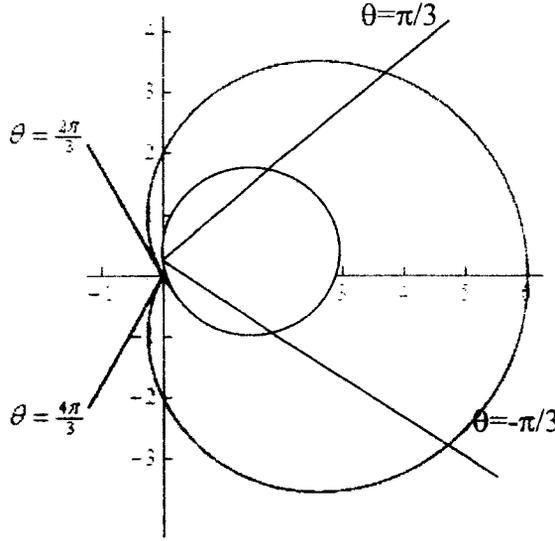
مثال

اوجد المساحة الداخلية لمنحنى الكارديويد $r = 2 + 2 \cos \theta$ وخارج

الدائرة $r = 2$

الحل بحل المعادلتين معا للحصول على نقط التقاطع فنحصل على:

$$(3, \pi/3), (-3, -\pi/3)$$



وتكون المساحة المطلوبة هي:

$$A = \frac{1}{2} \int_a^b [f_1^2(\theta) - f_2^2(\theta)] d\theta$$

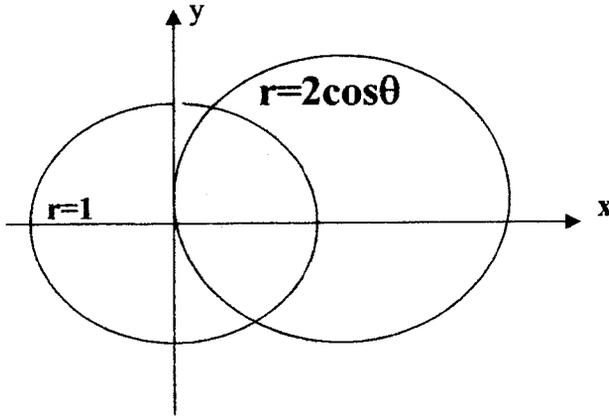
$$A = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/3} [(2 + 2 \cos \theta)^2 - (3)^2] d\theta = \frac{9}{2} \sqrt{3} - \pi$$

مثال

اوجد المساحة الداخلية للدائرة $r = 2 \cos \theta$ وخارج الدائرة $r = 1$

الحل بحل المعادلتين معا للحصول على نقط التقاطع فنحصل على:

$$\cos \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \pm \frac{\pi}{3}.$$



وتكون المساحة المطلوبة هي:

$$A = \frac{1}{2} \int_{-\pi/3}^{\pi/3} [2 \cos \theta]^2 d\theta - \frac{1}{2} \int_{-\pi/3}^{\pi/3} (1)^2 d\theta = \int_{-\pi/3}^{\pi/3} (2 \cos^2 \theta - \frac{1}{2}) d\theta$$

$$= 2 \left(\frac{\sin \theta \cos \theta}{2} + \frac{\theta}{2} \right) - \frac{\theta}{2} \Big|_{-\pi/3}^{\pi/3} = \left[\sin \theta \cos \theta + \frac{\theta}{2} \right]_{-\pi/3}^{\pi/3}$$

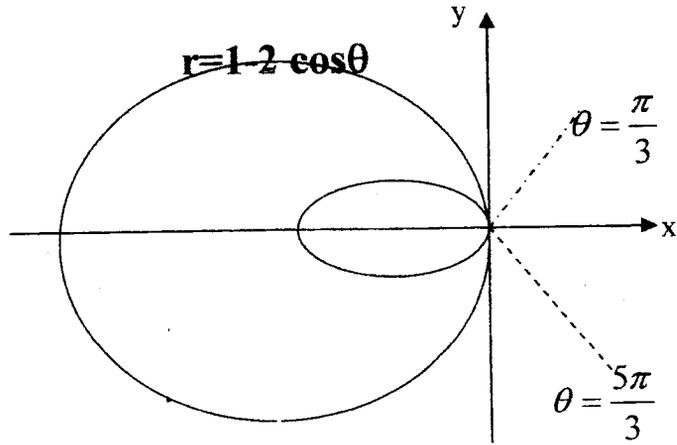
$$= \left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \right) + \frac{\pi}{6} \right) - \left(\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \right) - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}$$

مثال اوجد المساحة المحصورة بين الحلقة الكبرى والحلقة الصغرى

$$r = 1 - 2 \cos \theta$$

الحل بحل المعادلتين معا للحصول على نقط التقاطع فنحصل على

الشكل التالي:



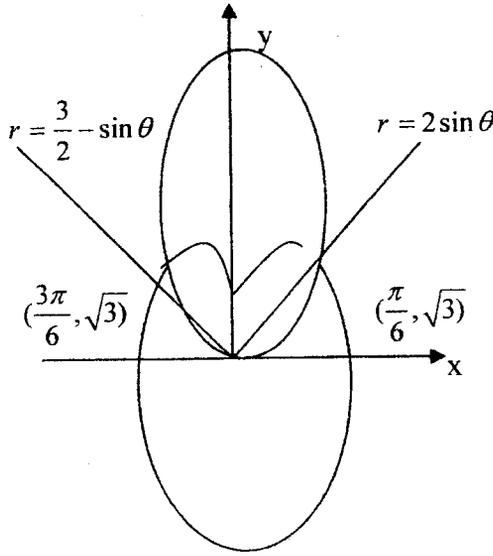
مع ملاحظة ان الجزء العلوى يبدأ بالزاوية $\theta : \frac{\pi}{3} \rightarrow \pi$ وان الجزء السفلى يبدأ بالزاوية $\theta : 0 \rightarrow \frac{\pi}{3}$ وحيث ان الدالة منتظمة الشكل فى الاحداثيات القطبية لذلك سنحسب المساحة العلوية ثم نضرب الناتج فى 2 فنحصل على المساحة الكلية

$$A = 2 \left[\int_{\pi/3}^{\pi} \frac{1}{2} [1 - 2 \cos \theta]^2 d\theta - \int_0^{\pi/3} \frac{1}{2} [1 - 2 \cos \theta]^2 d\theta \right] = \pi + 5\sqrt{3}$$

مثال اوجد المساحة المحصورة بين الدائرة $r = 2 \sin \theta$ والقاطع

$$r = \frac{3}{2} - \sin \theta$$

الحل بحل المعادلتين معا للحصول على نقط التقاطع فنحصل على الشكل التالى:



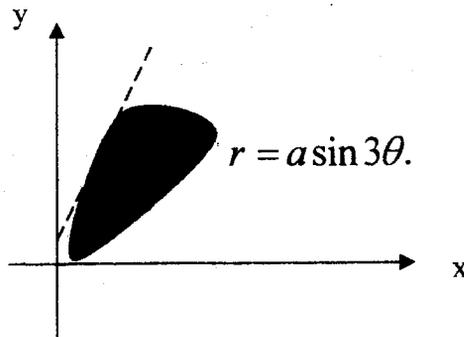
$$A = 2 \left[\int_0^{\pi/6} \frac{1}{2} [2 \sin \theta]^2 d\theta - \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{1}{2} \left[\frac{3}{2} - \sin \theta \right]^2 d\theta \right] = \pi + \frac{\sqrt{3}}{8}$$

مثال اوجد المساحة داخل عروة واحدة للمنحنى $r = a \sin 3\theta$

الحل المنحنى له ثلاثة حلقات سنأخذ الحلقة الاولى فى الربع الاول

كالتالى:

at $r = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$



$$A = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/3} (a \sin 3\theta)^2 d\theta = \frac{a^2}{4} (1 - \cos 6\theta) d\theta$$

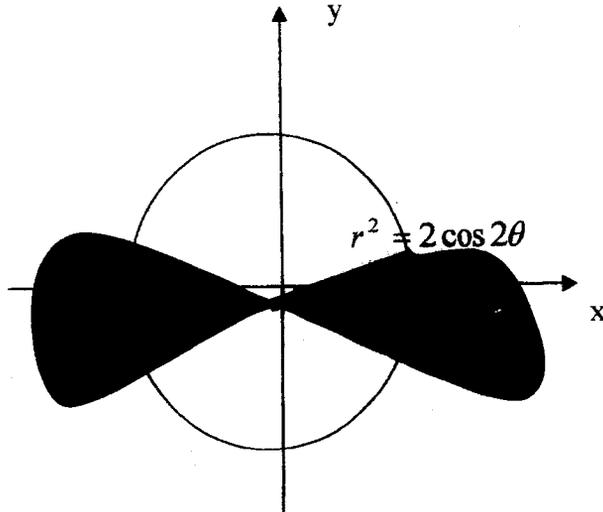
$$= \frac{a^2}{4} \left[\theta - \frac{1}{6} \sin 6\theta \right]_0^{\pi/3} = \frac{1}{12} \pi a^2$$

مثال اوجد المساحة المحصورة بين المنحنيات $r^2 = 2 \cos 2\theta, r = 1$

الحل بحل المعادلتين معا للحصول على نقط التقاطع وتكون المساحة المطلوبة هي:

$$A = 4 \left[\frac{1}{2} \int_0^{\pi/6} d\theta + \frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{\pi/4} (2 \cos 2\theta) d\theta \right] = 2 - \sqrt{3}$$

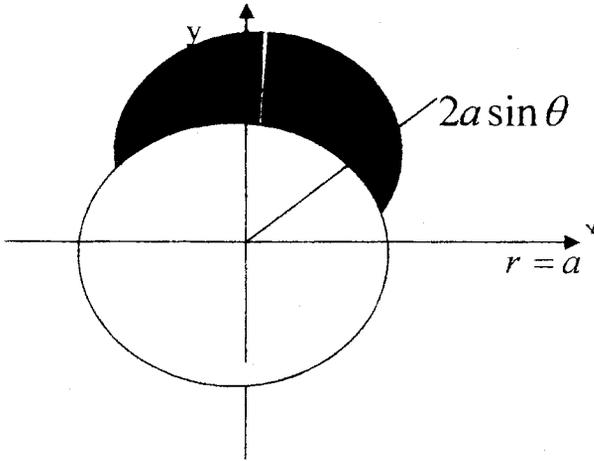
والرسم التالي يوضح ذلك:



مثال اوجد المساحة داخل المنحنى $r = 2a \sin \theta$ وخارج المنحنى $r = a$

الحل بحل المعادلتين معا للحصول على نقط التقاطع فنحصل على

الشكل التالي:



$$2a \sin \theta = a \Rightarrow \theta = \pi/6$$

وتكون المساحة المطلوبة هي:

$$A = 2 \left[\frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} [(2a \sin \theta)^2 - a^2] d\theta \right] = a^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3} \right)$$

مثال اوجد المساحة داخل المنحنى $r = 2 \sin \theta$ وخارج المنحنى $r = 1$

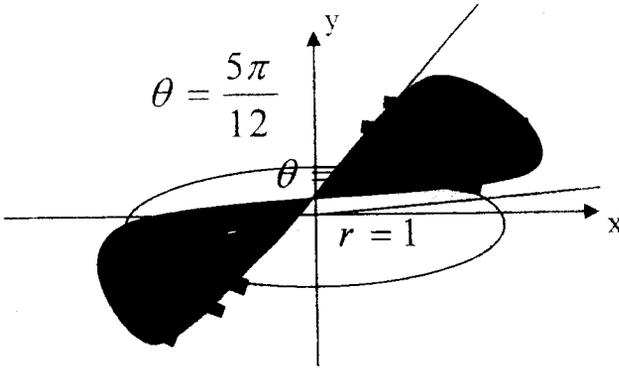
الحل بحل المعادلتين معا للحصول على نقط التقاطع فنحصل على

$$2 \sin 2\theta = 1 \Rightarrow \sin 2\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow 2\theta = \frac{\pi}{6} \Rightarrow$$

$$\theta = \frac{\pi}{12} \text{ or } 2\theta = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{12}$$

$$A = 2 \left\{ \frac{1}{2} \int_{\pi/12}^{5\pi/12} ((2 \sin 2\theta)^2 - 1) d\theta \right\} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{4\pi}{12}$$

والشكل التالى يوضح ذلك:



طول المنحنى Arc Length

يقال الدالة f أنها ملساء (ناعمة) على الفترة $[a, b]$ اذا كانت مشتقتها f'

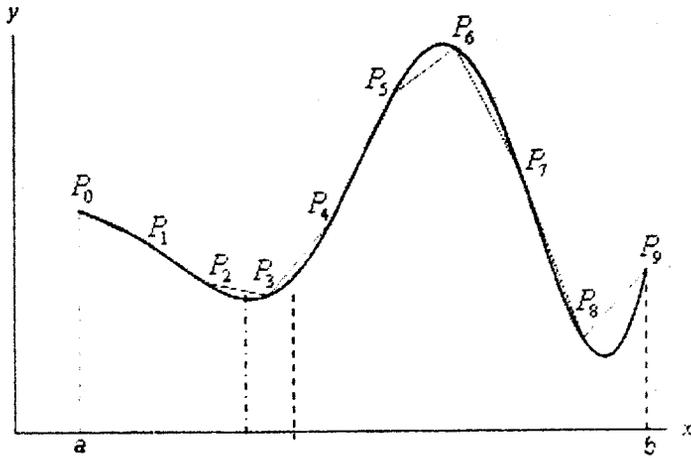
متصلة على هذه الفترة. بمعنى آخر ، أن الدالة تكون ملساء اذا كان اى

تغير بسيط فى قيمته x يحدث تغيرا بسيطا فى ميل المماس لمنحنى الدالة.

وفى هذا الفصل سوف ندرس طول المنحنى بين نقطتين A, B على

منحنى أملس. لنفرض أن f ملساء على الفترة $[a, b]$. لنفرض أن P

تجزئيا للفترة $[a, b]$ بواسطة النقط



$$a = x_0, x_1, \dots, x_n = b$$

وأن

$$Q_i = (x_i, f(x_i)), i = 0, 1, \dots, n$$

ولنفرض أن $d(Q_{i-1}, Q_i)$ هو طول القطعة المستقيمة الواصلة من Q_{i-1} الى Q_i ولنفرض أن L_P هو طول الخط المنكسر الناتج من توصيل النقط Q_i المتتالية فيكون :

$$L_P = \sum_{i=1}^n d(Q_{i-1}, Q_i) \quad \dots (2)$$

ولكن

$$d(Q_{i-1}, Q_i) = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2} \quad \dots (3)$$

وباستخدام نظرية القيمة المتوسطة (للتفاضل) يكون:

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(w_i)(x_i - x_{i-1})$$

حيث $w_i \in]x_{i-1}, x_i[$ بالتعويض في (3) نحصل على

$$\begin{aligned} d(Q_{i-1}, Q_i) &= \sqrt{(\Delta x_i)^2 + [f'(w_i)\Delta x_i]^2} \\ &= [\sqrt{1 + [f'(w_i)]^2}] \Delta x_i \end{aligned}$$

حيث

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

وبالتعويض عن ذلك في (2) نحصل على :

$$L_P = \sum_{i=1}^n (\sqrt{1 + [f'(w_i)]^2}) \Delta x_i \quad \dots(4)$$

لاحظ أن L_P هو عبارة عن مجموع ريمان للدالة g المعرفة بالمتساوية

$$g(x) = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$$

بالإضافة الى ذلك فإن g دالة متصلة على $[a, b]$ لأن f متصلة على هذه الفترة.

إذا أخذنا النهاية للمتساوية (4) عندما $\|P\| \rightarrow 0$ فإن طول الخط المنكسر

L_P سوف يؤول الى طول منحنى الدالة f من A الى B والذي يرمز له

بالرمز L . وبمعنى آخر:

$$L = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} g(w_i)\Delta x_i = \int_a^b g(x) dx$$

وهكذا فإنه إذا كانت f دالة ملساء على الفترة $[a, b]$ فإن طول منحنى

هذه الدالة من $A(a, f(a))$ الى $B(b, f(b))$ هو

$$L = \int_a^b \left(\sqrt{1 + [f'(x)]^2} \right) dx \quad \dots(5)$$

II . إذا كانت الدالة $y = f(x)$ معطاة في الصورة البارامترية

$$x = \varphi(t) \quad , \quad y = \psi(t)$$

$$\varphi(\alpha) = a \quad , \quad \varphi(\beta) = b \quad , \quad t \in [\alpha, \beta] \quad \text{حيث}$$

$\varphi', \psi', \varphi \neq 0$ بالتعويض

في (5) نحصل على

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \right]^2} \varphi'(t) dt = \int_a^b \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt \quad \dots(6)$$

على سبيل المثال إذا اردنا إيجاد طول المنحنى $y = f(x)$ في

الفترة $[a, b]$ ولنفرض ان $n = 9$ كما هو موضح في الشكل السابق.

سوف نرمز الى كل قطعة من الخط بالرمز:

$$|P_{i-1}P_i| \Rightarrow$$

$$L \approx \sum_{i=1}^n |P_{i-1}P_i|$$

سوف نعرف الدالة:

$$\Delta y_i = y_i - y_{i-1} = f(x_i) - f(x_{i-1})$$

بالتالى يكون الطول المطلوب هو:

$$|P_{i-1}P_i| = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y_i^2}$$

بالتالى يمكن ان نستنتج

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

وبالمثل

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

اما اذا كانت

$$x = h(y) \in [c, d]$$

$$\therefore L = \int_c^d \sqrt{1 + [h'(y)]^2} dy$$

$$= \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy$$

امثلة متنوعة

Solved Problems

مثال اوجد طول المنحنى $y = \ln(\sec x)$ بين $0 \leq x \leq \pi/4$

الحل بحل المعادلتين معا للحصول على نقط التقاطع فنحصل على

$$y = f(x) \quad \text{حيث ان}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\sec x \tan x}{\sec x} = \tan x \Rightarrow \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = \tan^2 x \Rightarrow$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} = \sqrt{1 + \tan^2 x} = \sqrt{\sec^2 x} = |\sec x| = \sec x$$

وبالتالى فأن طول المنحنى المطلوب هو:

$$L = \int_0^{\pi/4} \sec x dx$$

$$= \ln |\sec x + \tan x| \Big|_0^{\pi/4}$$

$$= \ln(\sqrt{2} + 1)$$

مثال اوجد طول المنحنى $x = \frac{2}{3}(y-1)^{3/2}$ بين $1 \leq y \leq 4$

الحل بحل المعادلتين معا للحصول على نقط التقاطع فنحصل على

$$x = h(y) \quad \text{حيث ان}$$

$$\therefore \frac{dx}{dy} = (y-1)^{1/2} \Rightarrow \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy} \right)^2} \\ = \sqrt{1 + y - 1} = \sqrt{y}$$

وبالتالى فأن طول المنحنى المطلوب هو:

$$\begin{aligned}
 L &= \int_1^4 \sqrt{y} \, dy \\
 &= \frac{2}{3} y^{3/2} \Big|_1^4 \\
 &= \frac{14}{3}
 \end{aligned}$$

مثال اوجد طول المنحنى $x = \frac{2}{3}(y-1)^{3/2}$ بين $1 \leq x \leq 4$

الحل بدل المعادلتين معا للحصول على نقط التقاطع فنحصل على

حيث ان $y = h(x)$

$$\begin{aligned}
 Q \ x = \frac{2}{3}(y-1)^{3/2} &\Rightarrow y = \left(\frac{3x}{2}\right)^{2/3} + 1 \\
 \Rightarrow \frac{dy}{dx} &= \left(\frac{3x}{2}\right)^{-1/3}
 \end{aligned}$$

ويكون طول المنحنى المطلوب هو:

$$\begin{aligned}
 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} &= \sqrt{1 + \frac{1}{(3x/2)^{2/3}}} = \sqrt{\frac{(3x/2)^{2/3} + 1}{(3x/2)^{2/3}}} = \sqrt{\frac{(3x/2)^{2/3} + 1}{(3x/2)^{1/3}}} \Rightarrow \\
 0 \leq x &\leq \frac{2}{3}(3)^{3/2} \Rightarrow
 \end{aligned}$$

وبالتالى يكون التكامل الذى يعطينا المطلوب هو:

$$L = \int_0^{2/3(3)^{3/2}} \frac{\sqrt{(3x/2)^{2/3} + 1}}{(3x/2)^{1/3}} dx$$

وباستخدام طريقة التكامل بالتعويض

$$u = \left(\frac{3x}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \quad du = \left(\frac{3x}{2}\right)^{-\frac{1}{3}} dx$$

$$x = 0 \Rightarrow u = 1$$

$$x = \frac{2}{3}(3)^{3/2} \Rightarrow u = 4$$

وبالتعويض في التكامل نحصل على:

$$L = \int_1^4 \sqrt{u} du$$

$$= \frac{2}{3} u^{3/2} \Big|_1^4$$

$$= \frac{14}{3}$$

مثال اوجد طول المنحنى $x = \frac{1}{2}y^{1/2}$ بين $x = \frac{1}{2}$ و $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ مفترضا ان y

قيمة موجبة.

الحل بحل المعادلتين معا للحصول على نقط التقاطع فنحصل على

حيث ان $y = h(x)$

$$Q \frac{dx}{dy} = y \Rightarrow \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = \sqrt{1 + y^2}$$

$$0 \leq y \leq 1$$

وبالتالى فإن طول المنحنى المطلوب هو:

$$L = \int_0^1 \sqrt{1+y^2} dy$$

وباستخدام طريقة التكامل بالتعويض

$$y = \tan \theta \quad dy = \sec^2 \theta d\theta$$

$$y = 0 \Rightarrow 0 = \tan \theta \Rightarrow \theta = 0$$

$$y = 1 \Rightarrow 1 = \tan \theta \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\sqrt{1+(y)^2} = \sqrt{1+\tan^2 \theta} = \sqrt{\sec^2 \theta} = |\sec \theta| = \sec \theta \Rightarrow$$

وبالتالى فإن طول المنحنى المطلوب هو:

$$L = \int_0^{\pi/4} \sec^3 \theta d\theta$$

$$= \frac{1}{2} (\sec \theta \tan \theta + \ln |\sec \theta + \tan \theta|) \Big|_0^{\pi/4}$$

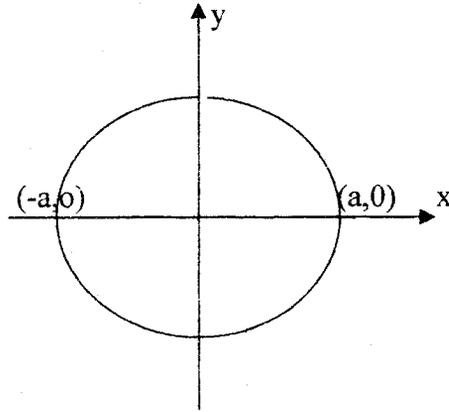
$$= \frac{1}{2} (\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}))$$

مثال

اوجد محيط الدائرة $x^2 + y^2 = a^2$

الحل نحسب طول ربع المحيط ثم نضرب الناتج فى 4 كما بالشكل:

$$Q \ x^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow x^2 = a^2 - y^2 \Rightarrow y = f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$$



$$\therefore f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad \therefore L = 4 \int_0^a \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}} dx$$

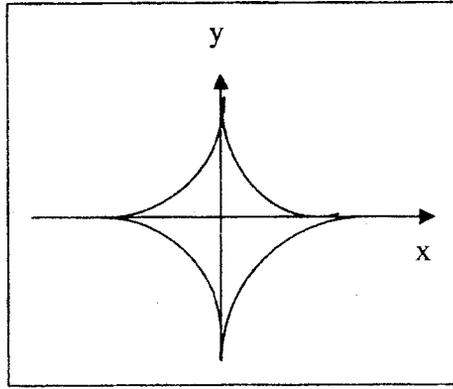
$$= 4 \int_0^a \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = 4a \left[\sin^{-1} \frac{x}{a} \right]_0^a = 4a \times \frac{\pi}{2} = 2\pi a$$

مثال أوجد طول منحنى الاسترويد $y = a \sin^3 t$ ، $x = a \cos^3 t$

الحل منحنى الاسترويد (كما هو موضح بالشكل) متماثل بالنسبة الى

المحورين ولذلك سنحسب طول رבעه وفيه يتعير t من 0 إلى π ثم

نضرب الناتج في 4.



$$Q \psi(t) = \frac{dx}{dt} = -3a \cos^2 t \sin t$$

$$\psi'(t) = \frac{dy}{dt} = 3a \sin^2 t \cos t$$

$$\therefore L = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{9a^2 \cos^4 t \sin^2 t + 9a^2 \sin^4 t \cos^2 t} \right) dt$$

$$= 12a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t \sin^2 t} dt$$

$$= 12a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t dt = 12a \left[\frac{1}{2} \sin^2 t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 12a \times \frac{1}{2} = 6a$$

تحويل الدالة من الصورة القطبية الى البارامترية

إذا كانت الدالة المعطاة في الصورة القطبية $r = f(\theta)$

فإنه يمكن تحويلها الى الصورة البارامترية

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

$$= f(\theta) \cos \theta = f(\theta) \sin \theta$$

وبالتالى

$$\frac{dx}{d\theta} = -f(\theta) \sin \theta + f'(\theta) \cos \theta$$

$$\frac{dy}{d\theta} = f(\theta) \cos \theta + f'(\theta) \sin \theta$$

إذا :

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = [f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2$$

بالتعويض فى الصياغة (6) حيث $\theta = t$ ، $\frac{dx}{d\theta} = \varphi'(\theta)$ ،

$$\frac{dy}{d\theta} = \psi'(\theta)$$

يكون طول المنحنى L من $\theta = \alpha$ ، $\theta = \beta$ هو

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2} d\theta$$

مثال

أوجد طول الحلزون الذى معادلته $r = e^{\theta/2}$ من $\theta = 1$ الى $\theta = 2$.

الحل

باستخدام الصياغة (7) يكون

$$\begin{aligned} L &= \int_1^2 \left((e^{\theta/2})^2 + \left(\frac{1}{2}e^{\theta/2}\right)^2 \right)^{1/2} d\theta \\ &= \frac{\sqrt{5}}{2} (2e^{\theta/2}) \Big|_1^2 = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot 2e - \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot 2e^{1/2} \\ &= \sqrt{5e} (e^{1/2} - 1) = 2.3916 \\ &= \frac{\sqrt{5}}{2} \int_1^2 e^{\theta/2} d\theta = \sqrt{5}(e - \sqrt{e}) \end{aligned}$$

* * *