

الباب السابع

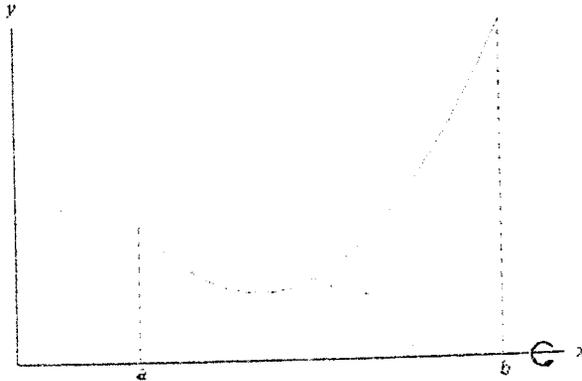
حجم المجسم الدوراني

Volume of Solid Revolution

Method of Rings

المجسم الدوراني هو المجسم الذي يتولد من دوران مساحة مستوية حول مستقيم يقع في مستواها. ومن هذا التعريف ينتج أن مقطع هذا المجسم بمستوى عمودي على محور الدوران عبارة عن دائرة أو حلقة دورانية مركزها على محور الدوران. وبواسطة تعريف ريمان للتكامل المحدود يمكن حساب حجم مثل هذه المجسمات.

سوف نبدأ بحساب حجم الجسم الدوراني. نعمل ذلك سوف نبدأ بالدالة $y = f(x)$ في الفترة $[a, b]$.

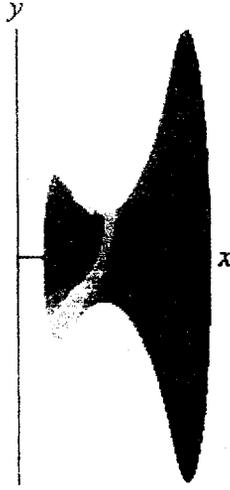


وبالدوران حول محور x -axis نحصل على الحجم في المنطقة ذات

الابعاد الثلاثية

$$V = \int_a^b A(x) dx, \quad V = \int_c^d A(y) dy$$

كما بالشكل الاتي



في حالة القرص الصلب تكون المساحة:

$$A = \pi(\text{radius})^2$$

حيث ان نصف القطر يعتمد على الدالة ومحور الدوران. وفي حالة

الحلقة

تكون المساحة:

$$A = \pi \left(\left(\text{outer radius} \right)^2 - \left(\text{inner radius} \right)^2 \right)$$

تطبيقات هندسية

أمثلة محلولة Solved Problems

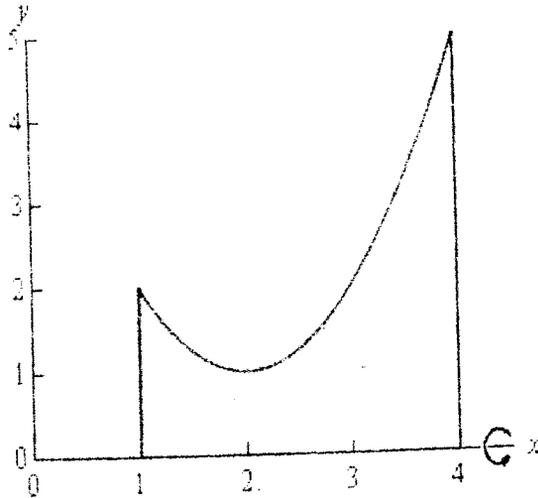
مثال أوجد حجم الجسم الصلب الناتج من دوران المنطقة المحددة

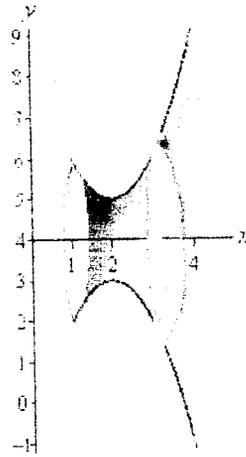
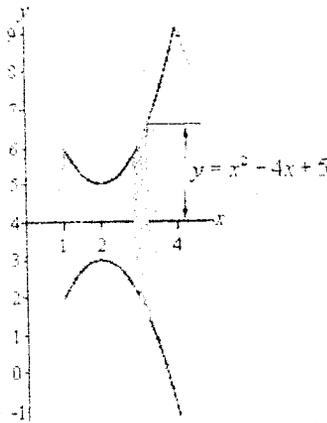
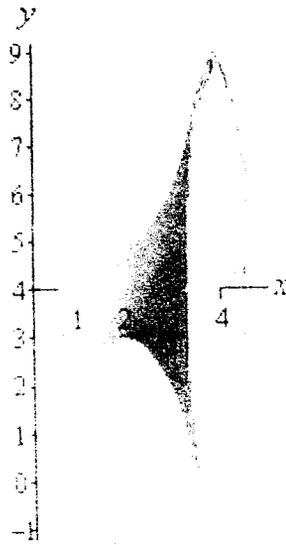
$$y = x^2 - 4x + 5, x = 1, x = 4$$

حول محور x و محور y

الحل

نبدا اولاً برسم المنطقة المحددة والجسم الناتج من الدوران كالتالى:





وتكون المساحة

$$A = \pi(x^2 - 4x + 5)^2 = \pi(x^4 - 8x^3 + 26x^2 - 40x + 25)$$

والان سنحتاج الى حساب حدود التكامل حيث مساحة المقطع
من $x = 1$ والمقطع الثاني من $x = 4$ الاول يبدأ

وبالتالى يكون حجم الجسم المطلوب هو

$$V = \int_a^b A(x) dx$$

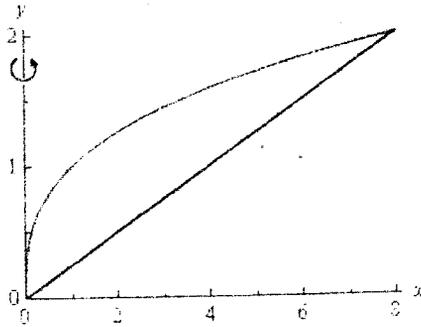
$$= \pi \int_1^4 (x^4 - 8x^3 + 26x^2 - 40x + 25) dx$$

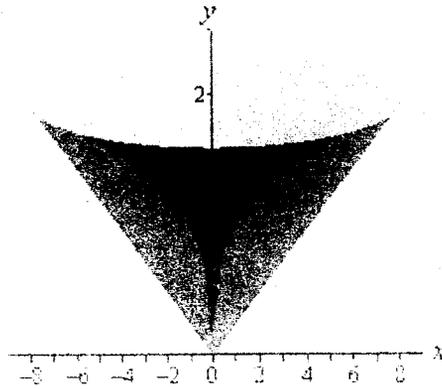
$$\therefore V = \pi \left(\frac{1}{5}x^5 - 2x^4 + \frac{26}{3}x^3 - 20x^2 + 25x \right) \Big|_1^4 = \frac{78}{5}\pi$$

مثال أوجد حجم الحسم الصلب الناتج من دوران جزء من المنطقة

المحددة $y = \frac{x}{4}$ ، $y = \sqrt[3]{x}$ حول محور y و محور x

الحل نبدأ اولاً برسم المنطقة المحددة والجسم الناتج من الدوران كالتالى:

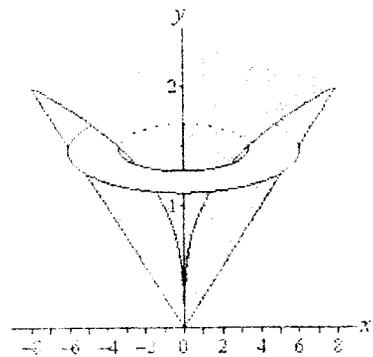
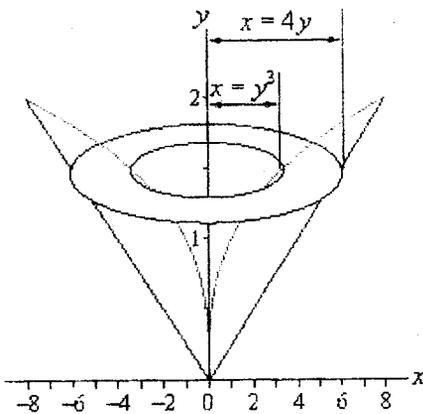




حيث ان $x = f(y)$

$$y = \sqrt[3]{x} \Rightarrow x = y^3, \quad y = \frac{x}{4} \Rightarrow x = 4y$$

والان سنبحث حدود التكامل كما موضح بالرسم التالي



وبالتالي مساحة المقطع المراد حسابها

$$A(y) = \pi((4y)^2 - (y^3)^2) = \pi(16y^2 - y^6)$$

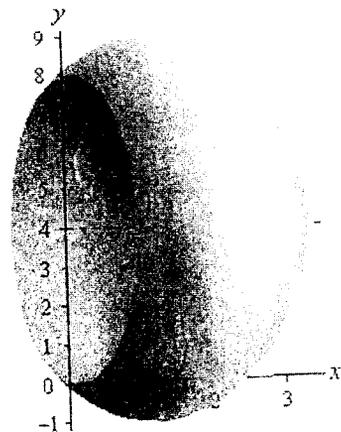
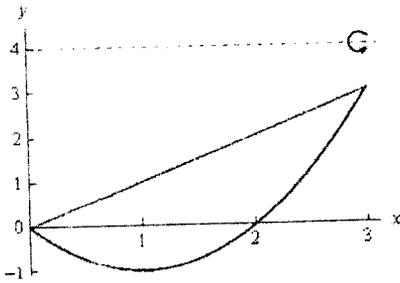
والآن سنحتاج الى حساب حدود التكامل حيث مساحة المقطع الاول يبدأ من $y = 0$ والمقطع الثاني من $y = 2$ وبالتالي يكون الحجم المطلوب

$$\begin{aligned}
 V &= \int_c^d A(y) dy \\
 &= \pi \int_0^2 (16y^2 - y^6) dy \\
 &= \pi \left(\frac{16}{3} y^3 - \frac{1}{7} y^7 \right) \Big|_0^2 \\
 &= \frac{512\pi}{21}
 \end{aligned}$$

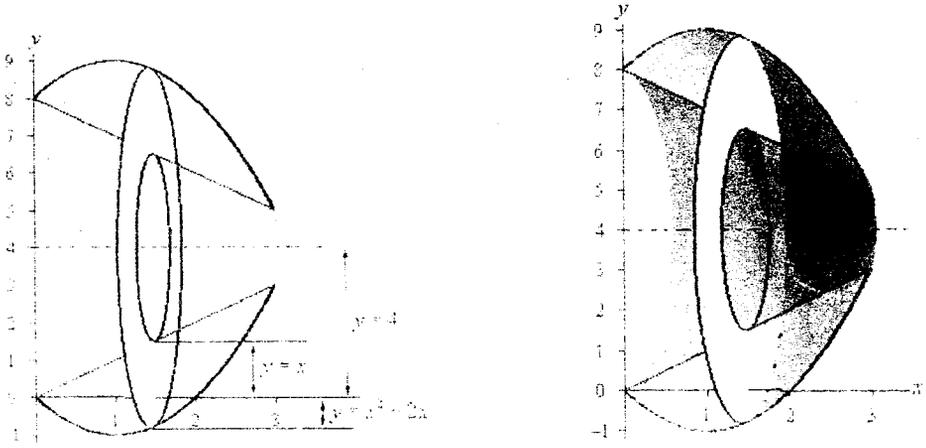
مثال أوجد حجم الجسم الصلب الناتج من دوران المنطقة المحددة بـ

$$y = x^2 - 2x, \quad y = x \quad \text{حول الخط } y = 4.$$

الحل نبدأ اولاً برسم المنطقة المحددة والجسم الناتج من الدوران كالتالى:



والآن سنبحث حدود التكامل كما موضح بالرسم التالي



$$\text{inner radius} = 4 - x$$

$$\text{outer radius} = 4 - (x^2 - 2x) = -x^2 + 2x + 4$$

وبالتالي مساحة المقطع المراد حسابها

$$\begin{aligned} A(x) &= \pi((-x^2 + 2x + 4)^2 - (4 - x)^2) \\ &= \pi(x^4 - 4x^3 - 5x^2 + 24x) \end{aligned}$$

والآن سنحتاج الى حساب حدود التكامل حيث مساحة المقطع
والمقطع الثاني من $x = 3$ الاول يبدأ وبالتالي يكون الحجم المطلوب
من $x = 0$

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b A(x) dx \\ &= \pi \int_0^3 (x^4 - 4x^3 - 5x^2 + 24x) dx \end{aligned}$$

$$= \pi \left(\frac{1}{5}x^5 - x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 12x^2 \right) \Big|_0^3$$

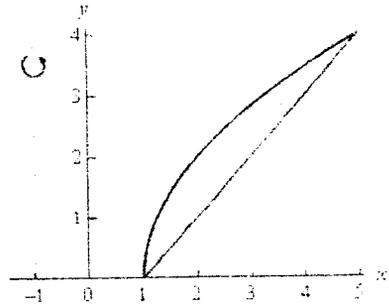
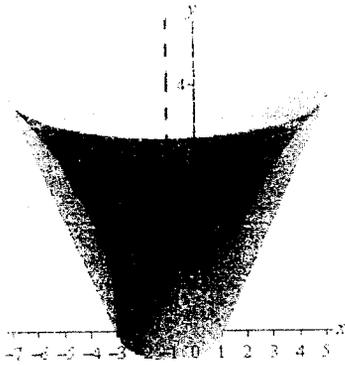
$$= \frac{153\pi}{5}$$

مثال أوجد حجم الجسم الصلب الناتج من دوران المنطقة المحددة بـ

$$x = -1 \quad \text{حول الخط} \quad y = 2\sqrt{x-1}, \quad y = x-1$$

الحل نبدأ أولاً برسم المنطقة المحددة والجسم الناتج من الدوران

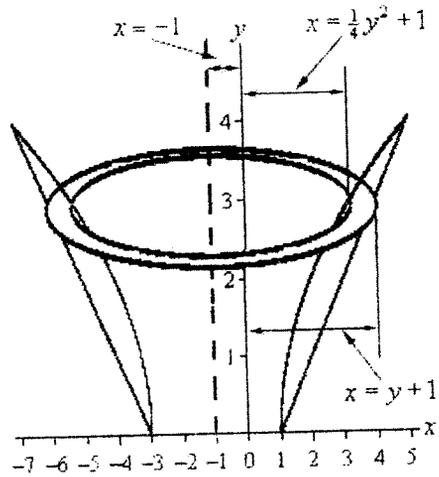
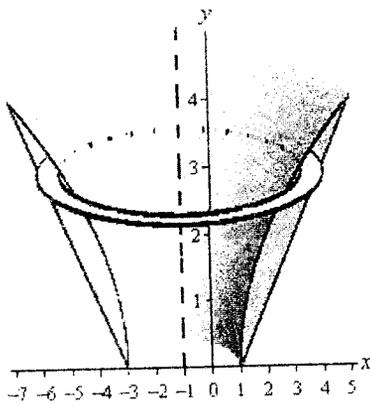
كالتالي:



والآن سنبحث حدود التكامل كما موضح بالرسم التالي

$$y = 2\sqrt{x-1} \Rightarrow x = \frac{y^2}{4} + 1$$

$$y = x - 1 \Rightarrow x = y + 1$$



$$\text{inner radius} = \frac{y^2}{4} + 1 + 1 = \frac{y^2}{4} + 2$$

$$\text{outer radius} = y + 1 + 1 = y + 2$$

وبالتالى مساحة المقطع المراد حسابها

$$A(y) = \pi \left((y + 2)^2 - \left(\frac{y^2}{4} + 2 \right)^2 \right) = \pi \left(4y - \frac{y^4}{16} \right)$$

والان سنحتاج الى حساب حدود التكامل حيث مساحة المقطع
والمقطع الثانى من $y = 4$ الاول يبدأ وبالتالى يكون الحجم المطلوب
من $y = 0$

$$\begin{aligned} V &= \int_c^d A(y) dy = \pi \int_0^4 \left(4y - \frac{y^4}{16} \right) dy \\ &= \pi \left(2y^2 - \frac{1}{80} \right) \Big|_0^4 = \frac{96\pi}{5} \end{aligned}$$

طريقة الاسطوانة

Method of Cylinders or Method of Shells

فى الجزء السابق ناقشنا كيف يمكن ايجاد الحجم الناتجة من الدوران.
اما فى هذا الجزء سوف نناقش كيف يمكن حساب مساحة المقاطع
للحقة او للقرص و الاسطوانة ومن ثم الحجم باستخدام العلاقات الاتية:

$$V = \int_a^b A(x) dx, \quad V = \int_c^d A(y) dy$$

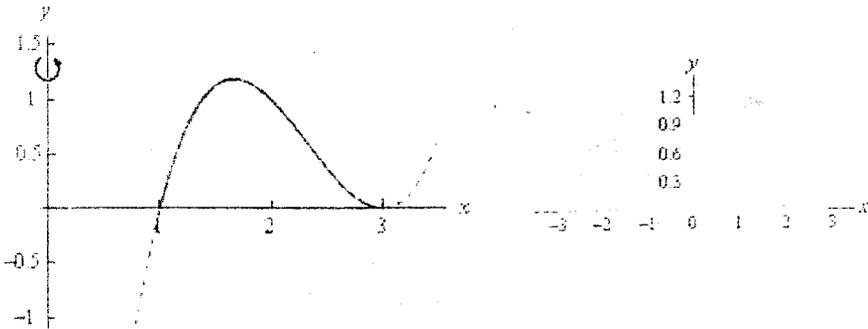
تطبيقات هندسية - مسائل محلولة

Solved Problems

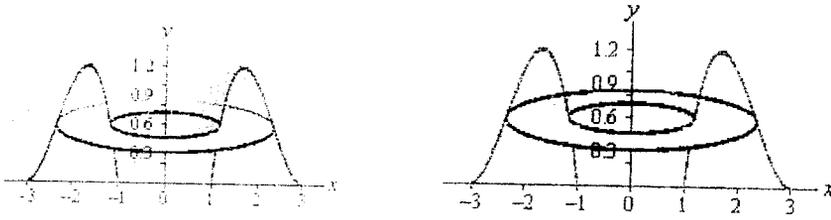
مثال أوجد حجم الحسم الصلب الناتج من دوران المنطقة المحددة بـ

$$y = (x-1)(x-3)^2 \quad \text{حول محور } x \quad \text{بالنسبة الى محور } y$$

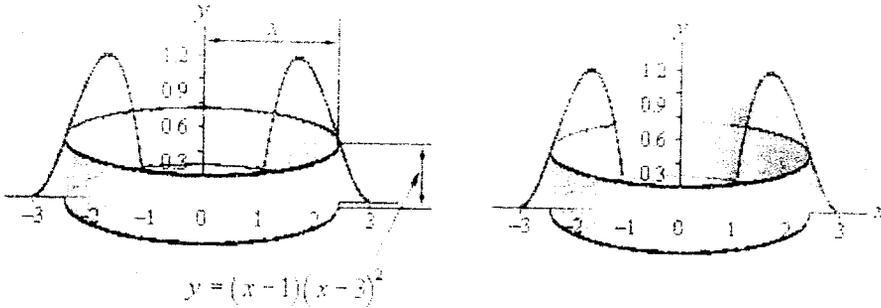
الحل نبدأ اولاً برسم المنطقة المحددة والجسم الناتج من الدوران كالتالى:



وإذا اردنا استخدام الحلقات لهذا الجسم الصلب هنا فيكون الشكل المراد استخدامه في هذه الحالة:



وهذا سيقودنا الى مسائل عديدة وهو ما سنوضحه بالرسم التالي:



وبالتالي يكون مساحة سطح الاسطوانة تعطى بالعلاقة الآتية:

$$\begin{aligned}
 A(x) &= 2\pi(\text{radius})(\text{height}) \\
 &= 2\pi(x)\left((x-1)(x-3)^2\right) \\
 &= 2\pi(x^4 - 7x^3 + 15x^2 - 9x)
 \end{aligned}$$

والآن سنحتاج الى حساب حدود التكامل حيث مساحة المقطع والمقطع الثاني من $x = 3$ الاول يبدأ وبالتالي يكون حجم الجسم من $x = 1$

المطلوب هو:

$$\begin{aligned}
 V &= \int_a^b A(x) dx \\
 &= 2\pi \int_1^3 (x^4 - 7x^3 + 15x^2 - 9x) dx \\
 &= 2\pi \left(\frac{1}{5}x^5 - \frac{7}{4}x^4 + 5x^3 - \frac{9}{2}x^2 \right) \Big|_1^3 \\
 &= \frac{24\pi}{5}
 \end{aligned}$$

ملاحظة:

الطريقة المستخدمة في المثال السابق تسمى طريقة الاسطوانة او طريقة الهياكل وبالتالي المعادلة المستخدمة لكل الحالات في حساب المساحات هي:

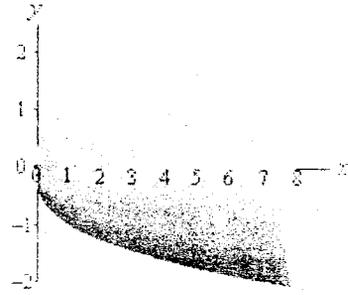
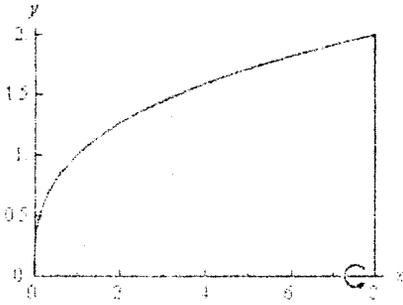
$$A = 2\pi(\text{radius})(\text{height})$$

مثال

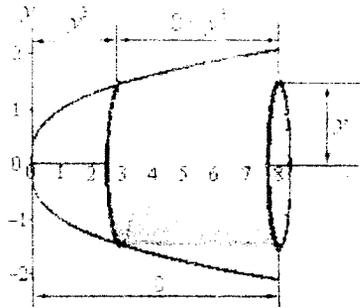
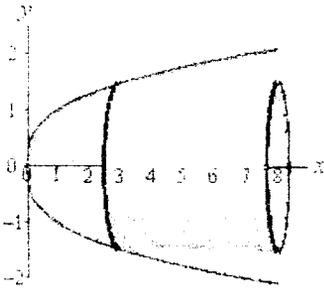
أوجد حجم الجسم الصلب الناتج من دوران المنطقة المحددة بـ $y = \sqrt[3]{x}, x = 8$ حول محور x بالنسبة الى محور x

الحل

نبدأ اولاً برسم المنطقة المحددة والجسم الناتج من الدوران كالتالى:



$$x = f(y) \Rightarrow y \sqrt[3]{x} \Rightarrow x = y^3$$



وتكون المسافة من من الطرف الخارجى الى $x = 8$ والعرض هي:

$$\text{الخط } 8 - y^3$$

وبالتالى تكون مساحة المقطع هي:

$$\begin{aligned} A(y) &= 2\pi(\text{radius})(\text{width}) \\ &= 2\pi(y)(8 - y^3) \\ &= 2\pi(8y - y^4) \end{aligned}$$

والان سنبحث حدود التكامل كالتالى:

تنقطع الاسطوانة الاولى الى قرص $y = 0$ كما تنقطع الاسطوانة الثانية

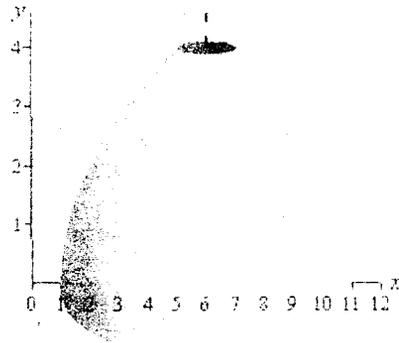
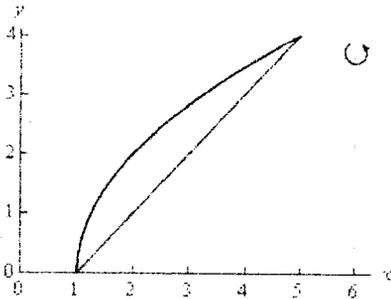
عند $y = 2$ وهذه هي حدود التكامل وبالتالي يكون حجم الجسم المطلوب

$$\begin{aligned}
 V &= \int_c^d A(y) dy \\
 &= 2\pi \int_0^2 (8y - y^2) dy \\
 &= 2\pi \left(4y^2 - \frac{1}{3}y^3 \right) \Big|_0^2 \\
 &= \frac{96\pi}{3}
 \end{aligned}$$

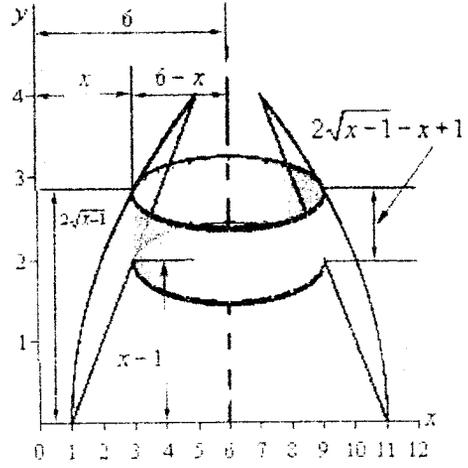
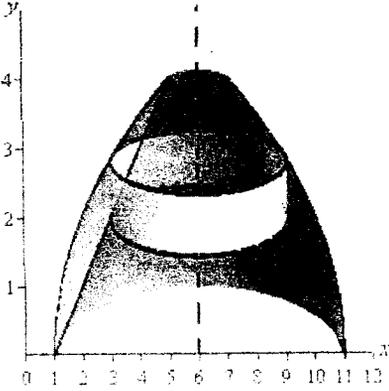
مثال أوجد حجم الجسم الصلب الناتج من دوران المنطقة المحددة بـ

$$y = 2\sqrt{x-1}, y = x-1, x = 6$$

الحل نبدأ أولاً برسم المنطقة المحددة والجسم الناتج من الدوران كالتالي:



وللاكثر توضيحاً تأخذ الشكل التالي:



وهذا يعنى ان نصف قطر الاسطوانة هو $6-x$ هي المسافة من محور
الى طرف الاسطوانة. وبالتالي تكون مساحة المقطع هي:

$$\begin{aligned} A(x) &= 2\pi(\text{radius})(\text{height}) \\ &= 2\pi(6-x)(2\sqrt{x-1}-x+1) \\ &= 2\pi(x^2 - 7x + 6 + 12\sqrt{x-1} - 2x\sqrt{x-1}) \end{aligned}$$

والان سنبحث حدود التكامل كالتالى:

تنقطع الاسطوانة الاولى الى قرص عند $x=0$ كما تنقطع الاسطوانة

الثانية عند $x=5$ وهذه هي حدود التكامل.

وبالتالى يكون حجم الجسم المطلوب

$$\begin{aligned}
V &= \int_a^b A(x) dx \\
&= 2\pi \int_1^5 (x^2 - 7x + 6 + 12\sqrt{x-1} - 2x\sqrt{x-1}) dx \\
&= 2\pi \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 6x + 8(x-1)^{3/2} - \frac{4}{3}(x-1)^{5/2} \right) \Big|_1^5 \\
&= 2\pi \left(\frac{136}{15} \right) \\
&= \frac{272\pi}{15}
\end{aligned}$$

مثال أوجد حجم الجسم الصلب الناتج من دوران المنطقة المحددة بـ

$$y = -1 \quad \text{حول الخط} \quad x = (y-2)^2, y = x$$

الحل نبدأ أولاً بحساب نقط التقاطع كالتالى:

$$y = (y-2)^2$$

$$y = y^2 - 4y + 4$$

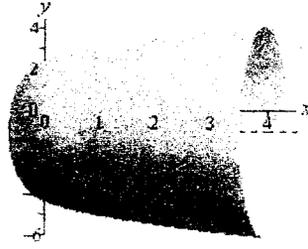
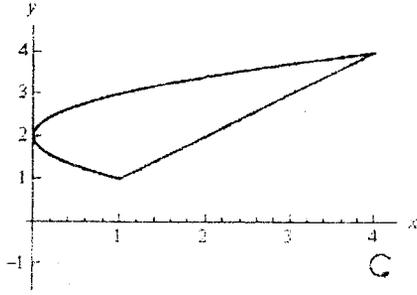
$$0 = y^2 - 5y + 4$$

$$0 = (y-4)(y-1)$$

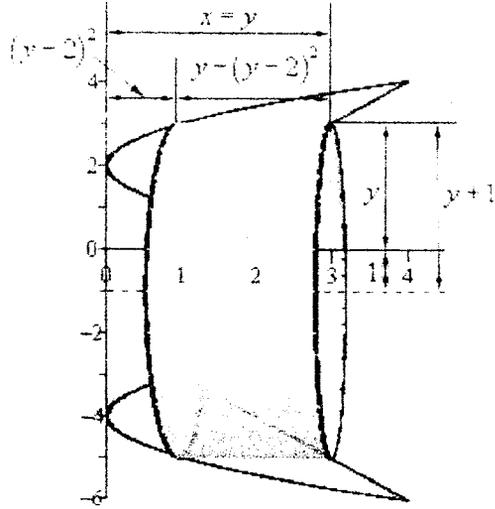
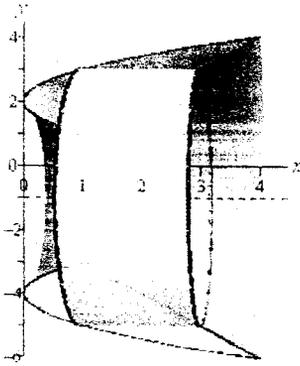
بالتالى تتقاطع المنحنيات عند $y = 1, y = 4$

وتكون المنطقة المحددة والجسم الناتج من الدوران موضحة بالرسم

التالى:



والرسم التوضيحي لذلك



وبالتالي تكون مساحة المقطع هي:

$$\begin{aligned}
 A(y) &= 2\pi(\text{radius})(\text{width}) \\
 &= 2\pi(y+1)(y-(y-2)^2) \\
 &= 2\pi(-y^3+4y^2+y-4)
 \end{aligned}$$

والان سنبحث حدود التكامل كالتالي:

تتقطع الاسطوانة الاولى الى قرص عند $y = 1$ كما تتقطع الاسطوانة

عند $y = 4$ وهذه هي حدود التكامل. ويكون حجم الجسم المطلوب

$$\begin{aligned}
 V &= \int_c^d A(y) dy \\
 &= 2\pi \int_1^4 (-y^3 + 4y^2 + y - 4) dy \\
 &= 2\pi \left(\frac{1}{4}y^4 + \frac{4}{3}y^3 + \frac{1}{2}y^2 - 4y \right) \Big|_1^4 \\
 &= 2\pi \left(\frac{136}{15} \right) \\
 &= \frac{272\pi}{15}
 \end{aligned}$$

تطبيقات هندسية للحجوم

Engineering Applications for Volumes

هنا سنبحث عن كمية الشغل المبذول من القوة لتحريك بعض الأشياء.

ففى الفيزياء نعتبر ان القوة F عندما تحرك جسم ما الى مسافة d الثابتة وبالتالي يكون الشغل المبذول المطلوب يعطى بالعلاقة

$$W = Fd$$

وفى معظم الاحيان نجد ان القوة ليست ثابتة. دعنا نفترض ان القوة عند اى x

تعطى العلاقة $F(x)$ بالتالى يكون الشغل المبذول لتحريك جسم من

$x = a \rightarrow x = b$ تعطى بالعلاقة

$$W = \int_a^b F(x) dx$$

مع ملاحظة انه اذا كانت القوة ثابتة تأخذ العلاقة الشكل التالي:

$$\begin{aligned} W &= \int_a^b F dx \\ &= Fx \Big|_a^b \\ &= F(b - a) \end{aligned}$$

حيث $b-a$ هي المسافة المقطوعة d .

أمثلة محلولة Solved Problems

مثال زنبرك (spring) طولة الطبيعي 20 سم. وقوه مقدارها 40 N متصلة بالزنبرك تحركة الى الطول 30 cm . ما مقدار الشغل المبذول لتحريك طول الزنبرك من 35 cm الى 38 cm .

الحل

$$F(x) = kx, \quad k > 0$$

$k > 0$ يسمى. من الشروط الابتدائية يمكننا ايجاد هذا الثابت كالتالي

القوة 40 N اللازمة لتحريك الزنبرك مسافة قدرها

$$30\text{cm} - 20\text{cm} = 10\text{cm} = 0.10\text{m}$$

وبأستخدام قانون هوك Hooke's Law نحصل على:

$$40 = 0.10k \Rightarrow k = 400$$

وطبقا لقانون هوك فأن لقوة اللازمة لتحريك الزنبرك مسافة ما من

طولها الطبيعي x يعطى بالعلاقة:

$$F(x) = 400x$$

وهنا نريد ايجاد الشغل المبذول لتحريك الزمبرك مسافة من 35 سم الى 38 سم. اولا لابد من تحويل هذه المسافات الى الطول الطبيعي بالمتر فنحصل على المسافة المراد تحريكها بالمتر وهي من 0.15m الى 0.18m فيكون الشغل المبذول هو

$$\begin{aligned} W &= \int_{0.15}^{0.18} 400x dx \\ &= 200x^2 \Big|_{0.15}^{0.18} \\ &= 1.98J \end{aligned}$$

مثال

اذا كان لدينا كابل وزنة 2 رطل / قدم مرفق به دلو مليء بالفحم الذي يزن 800 باوند. وكان الدلو في البداية في الجزء السفلي عند 500 قدم للمنجم. اجب عن كل من العناصر التالية:

- 1- اوجد الشغل المبذول لرفع الدلو الى نقطة الوسط للمنجم.
- 2- اوجد الشغل المبذول لرفع الدلو من نقطة الوسط للمنجم الى اعلى البئر.
- 3- اوجد الشغل المبذول لرفع الدلو على طول الطريق حتى مدخل المنجم.

الحل

قبل الاجابة لابد من حساب القوة كالتالى:

نفرض ان الطول المسحوب مسافة ما x وعند المنتصف تكون $x = 250$
وفى اعلى المنجم تكون $x = 500$ وبالتالي فأن عند اى نقطة يبقى هناك حوالى
 $500 - x$ قدم للمنجم

$$\begin{aligned} F(x) &= \text{weight of cable} + \text{weight of buket} \\ &= 2(500 - x) + 800 \\ &= 1800 - 2x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1- W &= \int_0^{250} F(x) dx \\ &= \int_0^{250} (1800 - 2x) dx \\ &= (1800x - x^2) \Big|_0^{250} \\ &= 387500 \text{ ft} - \text{lb} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2- W &= \int_{250}^{500} F(x) dx \\ &= \int_{250}^{500} (1800 - 2x) dx \\ &= (1800x - x^2) \Big|_{250}^{500} \\ &= 262500 \text{ ft} - \text{lb} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3 - W &= \int_0^{500} F(x) dx \\
&= \int_0^{500} (1800 - 2x) dx \\
&= (1800x - x^2) \Big|_0^{500} \\
&= 650000 \text{ ft} - \text{lb}
\end{aligned}$$

مثال كابل 20 ألف قدم يزن 80 رطلاً وتتدلى من سقف مبنى دون لمس الأرض اوجد الشغل المبذول لرفع نهاية اسفل السلسلة الى اعلى حتى يلامس السقف.

الحل قبل الاجابة لابد من حساب الوزن كالتالى:

$$\frac{80 \text{ lbs}}{20 \text{ ft}} = 4 \text{ lb / ft}$$

نفرض ان المسافة من السقف الى نقطة ما x ويكون جزء الكابل $0 < x \leq 20$ فعليا سيتم رفعها وسيكون جزء من الكابل في نطاق $0 < x \leq 10$ لا يمكن رفعها في كل مرة من الجزء السفلي من الكابلات وعند $x = 20$ سيتم رفع 10 قدم للوصول الى نقطة المنتصف وكذلك 10 قدم للوصول الى السقف. وعند 2 قدم من اسفل $x = 18$ سيتم رفع 8 قدم للوصول الى المنتصف وكذلك 8 قدم اضافية للوصول الى النقطة النهائية وبأستمرار هذه العملية يمكن ان نرى ان $0 < x \leq 20$ سوف ترفع $2(x - 10)$. وبالمثل كما في المثال السابق،

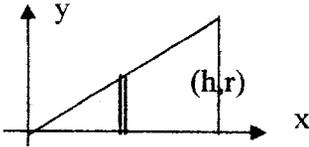
$$\begin{aligned}
 F(x) &= (\text{distance lifted}) (\text{weight per foot of cable}) \\
 &= 2(x - 10)(4) \\
 &= 8(x - 10)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore W &= \int_{10}^{20} 8(x - 10) dx \\
 &= (4x^2 - 80x) \Big|_{10}^{20} \\
 &= 400 \text{ft} - 1b
 \end{aligned}$$

مثال أوجد حجم المخروط الذي نصف قطر قاعدته r وأرتفاعه h وناتج من دوران المنحنى $f(x) = \frac{r}{h}x$ حيث $0 \leq x \leq h$ حول محور x .

الحل

$$V = \int_0^h \pi \left(\frac{r}{h}x \right)^2 dx = \frac{\pi r^2}{h^2} \int_0^h x^2 dx = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$



مثال أوجد حجم الكرة الناتجة من دوران المنحنى

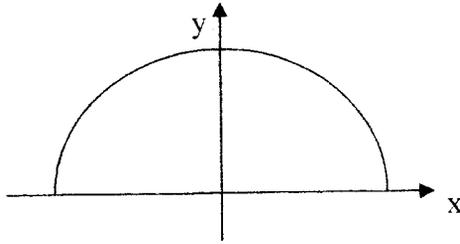
$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \quad , \quad -r \leq x \leq r$$

حول محور x .

الحل

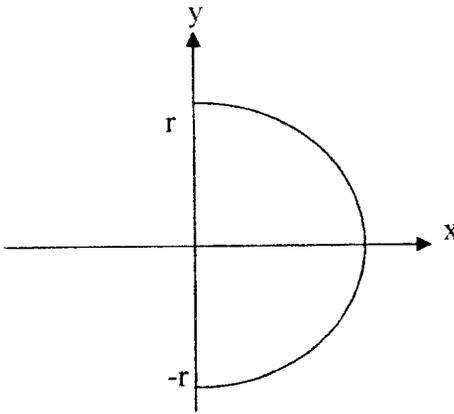
1- إذا كان الدوران حول محور x :

$$V = \int_{-r}^r \pi(r^2 - x^2) dx = \pi \left[r^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{-r}^r = \frac{4}{3} \pi r^3$$



2- إذا كان الدوران حول محور y :

$$\therefore V = \int_c^d \pi [f(y)]^2 dy$$



مع ملاحظة أن المنحنى يعطى الصورة

$$x = f(y)$$

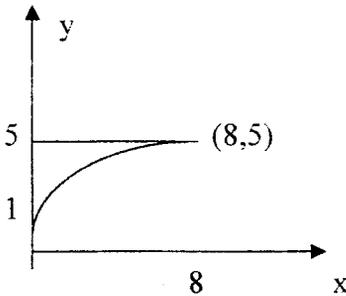
مثال أوجد حجم الجسم الدوراني الناتج من دوران المنحنى

$$y = x^{2/3} + 1, \quad 0 \leq x \leq 8$$

حول محور y .

الحل

$$V = \int_1^5 \pi [f(y)]^2 dy = \pi \int_1^5 [(y-1)^{3/2}]^2 dy$$
$$= \pi \int_1^5 (y-1)^3 dy = 64\pi$$



مثال اوجد حجم القطعة الكروية التي سمكها h مقطوعة من كرة نصف قطرها a.

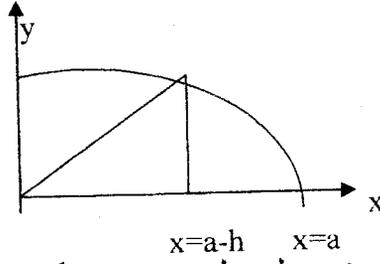
الحل القطعة الكروية تنتج من دوران منطقة من القرص

$$\{(x,y) : x^2 + y^2 \leq a^2\}$$

$$V = \pi \int_{a-h}^a \pi y^2 dy = \int_{a-h}^a \pi (a^2 - x^2) dx$$

$$= \pi \left[a^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{a-h}^a$$

$$= \frac{\pi}{3} h^2 [3a - h]$$

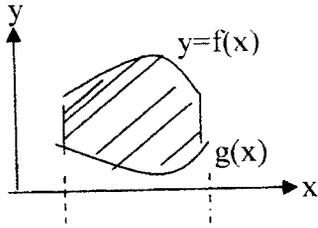


ملاحظة: حجم نصف كره نحصل عليه بوضع $a=h$

$$\therefore V = \frac{2}{3} \pi r^3$$

ثانيا طريقة الوردة- الجلبة

Washer Method

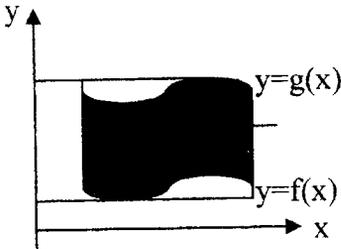


$$V = \int_a^b \pi ([f(x)]^2 - [g(x)]^2) dx$$

هي تعميم للطريقة السابقة حيث الجسم يتولد من

دوران المنطقة المحصورة بين $y=f(x)$ ، $y=g(x)$ ،

$x \in [a, b]$ حول محور x



$$V = \int_c^d \pi \left([f(y)]^2 - [g(y)]^2 \right) dy$$

أو دوران المنطقة بـ $x=f(y)$ ، $x=g(y)$ حول محور y .

مسائل محلولة

Solved Problems

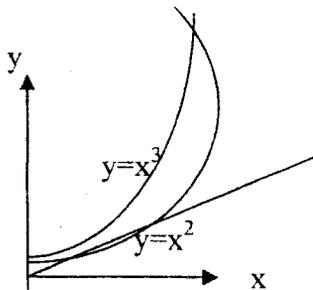
مثال أوجد حجم المجسم الدوراني الناشئ من دوران المنطقة بين المنحنين

$$y=x^2, \quad y=x^3, \quad x \in [0,1]$$

(ii) حول محور y

(i) حول محور x

الحل



$$\text{i) } V = \int_0^1 \pi \left[(x^2)^2 - (x^3)^2 \right] dx$$

$$\pi \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \right]_0^1 = \frac{2}{35} \pi$$

$$V = \pi \int_0^1 \left[y^{2/3} - y \right] dy = \pi \left(\frac{2}{3} y^{5/3} - \frac{1}{2} y^2 \right) \Big|_0^1 = \pi \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{2} \right)$$

ii)
$$= \frac{1}{10} \pi$$

مثال اوجد حجم المجسم الناشئ من دوران المنطقة بين المنحيين

$$y=2x \quad , \quad y=x^2$$

(i) حول محور x (ii) حول محور y

الحل

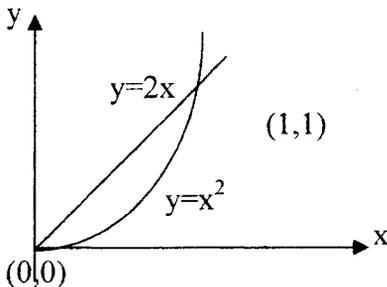
i)
$$V = \int_0^2 \pi \left[(2x)^2 - (x^2)^2 \right] dx = \pi \int_0^2 (4x^2 - x^4) dx$$

$$= \int_0^4 \pi \left[(\sqrt{y})^2 - \left(\frac{1}{2} y \right)^2 \right] dy$$

$$= \frac{8}{3} \pi$$

$$= \pi \left[\frac{4}{3} x^3 - \frac{1}{5} x^5 \right]_0^2$$

ii)
$$= \frac{64}{15} \pi$$



ثالثا : طريقة القشرة الاسطوانيه

The Shell Method

1- إذا دارت المنطقة المحصورة بين المنحنى $y=f(x)$ ، $x \in (a,b)$

ومحور x والمستقيمين $x=a, x=b$ فإن الحجم الناشئ

$$\begin{aligned} V &= \pi r_1^2 h - \pi r_2^2 h \\ &= \pi (r_1^2 - r_2^2) h \\ &= \pi h (r_1 - r_2)(r_1 + r_2) \end{aligned}$$

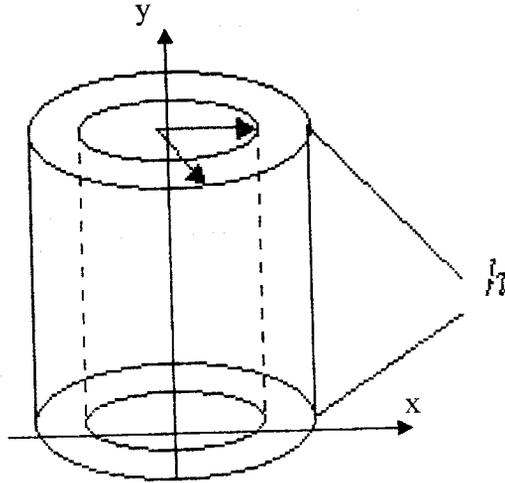
$$V = \int_a^b 2\pi x f(x) dx$$

2- إذا دارت المنطقة المحصورة بالمنحنى $x=f(y)$ ، $y \in (c,d)$

ومحور y والمستقيمين $y=c, y=d$ فإن الحجم الناشئ

$$V = \int_c^d 2\pi y f(y) dy$$

$$\begin{aligned} V &= \pi r_1^2 h - \pi r_2^2 h \\ &= \pi (r_1^2 - r_2^2) h \\ &= \pi h (r_1 - r_2)(r_1 + r_2) \end{aligned}$$



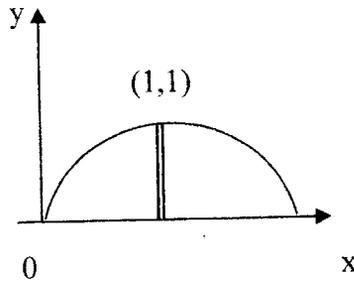
$$\therefore V = \int_c^d 2\pi y f(y) dy$$

مسائل محلولة

Solved Problems

مثال اوجد حجم المجسم الناشئ من دوران المنطقة بين المنحني $y=x(2-x)$ ، ومحور x حول محور y .

الحل



$$V = \int_a^b 2\pi x f(x) dx$$

$$V = 2\pi \int_0^2 x^2(2-x)dx = 2\pi \left[\frac{16}{3} - \frac{16}{4} \right] = \frac{8}{3}\pi$$

مثال اوجد حجم المجسم الناشئ من دوران المنطقة بين المنحيين

$$x, y \text{ حول محوري } x \in [1, 2], \quad y = x^3, \quad y = x^2$$

الحل

$$i) \quad V = \int_1^2 2\pi x(x^3 - x^2)dx = 2\pi \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 \right] = \frac{49}{10}\pi$$

إذا دارت المنطقة حول الخط $x=1$ فإن عنصر القشرة الاسطوانية نصف

قطره $(x-1)$ وبالتالي :

$$ii) \quad V = \int_1^2 2\pi(1-x)(x^2 - x^3)dx = \frac{62}{15}\pi$$

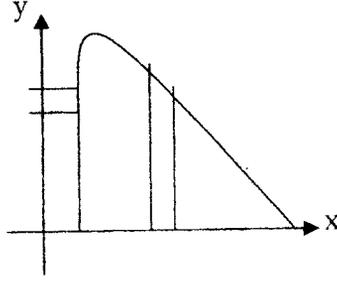
مثال باستخدام طريقة القشرة الاسطوانية. اوجد حجم المجسم الناشئ

من دوران المنطقة المحدده بالمنحنيات $y=4x-x^2$ ومحوره والخطان

$$x=4, \quad x=1 \text{ حول محور } y.$$

الحل

$$\begin{aligned} V &= \int_1^4 2\pi x(x - x^2)dx \\ &= 2\pi \int_1^4 (4x^2 - x^3)dx = \frac{81}{2}\pi \end{aligned}$$



ملاحظة :

كذلك يمكن تعميم طريقة القشرة الاسطوانية . اذا كانت المنطقة محصورة بين منحنيين $y=f(x)$ ، $y=j(x)$ فإن الحجم الناشئ من دوران هذه المساحة حول محور y يعطى بالصورة

$$V = \int_a^b 2\pi x (f(x) - j(x)) dx$$

وإذا كانت المنطقة محصورة بين $x=f(y)$ ، $x=j(y)$ فالحجم الناتج من دورانها حول محور x يعطى بالصورة

$$V = \int_c^d 2\pi x (f(y) - j(y)) dy$$

مثال أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y=2x$ ، $y=x^2$ (i) حول محور y (ii) حول محور x

الحل

$$i) \quad V = \int_0^2 2\pi y (2x - x^2) dx = \frac{8}{3}\pi$$

$$ii) \quad V = \int_0^2 2\pi y (\sqrt{y} - \frac{1}{2}y) dy = \frac{64}{15}\pi$$

ملاحظة: هذا المثال قد تم حله باستخدام طريقة الورده (washer)

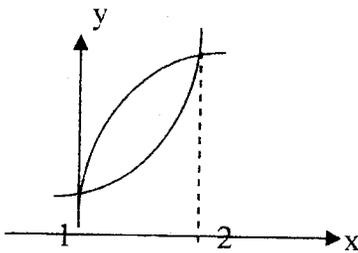
وحصلنا على نفس النتيجة.

مثال أوجد حجم المجسم الناشئ من دوران المساحة المحصورة بين

$x = -2$ ، $y = \sqrt{x}$ ، $y = x^2$ ، $0 \leq x \leq 1$ إذا دارت حول المستقيم $x = -2$

الحل

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 2\pi(x+2)(\sqrt{x} - x^2) dx \\ &= 2\pi \int_0^1 x^{3/2} + 2x^{1/2} - x^3 - 2x^2 dx \\ &= \frac{49\pi}{30} \end{aligned}$$

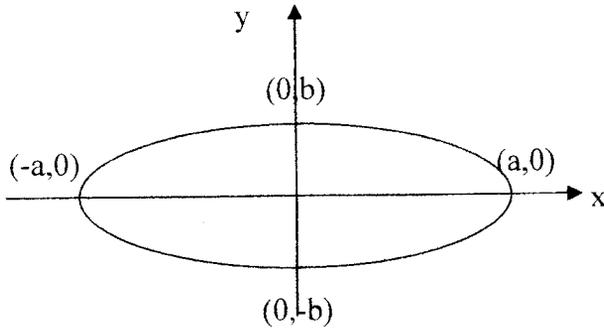


مثال أوجد حجم المجسم الناشئ من دوران المساحة المحصورة

المحصورة بالقطع الناقص $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ اذا كان الدوران

(i) حول محور السينات (ii) حول محور الصادات.

الحل



$$i) \quad V = \int_{-a}^a \pi [f(x)]^2 dx$$

$$= 2\pi b^2 \int_{-a}^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \int_{-a}^a \pi y^2 dx = 2\pi b^2 \left[x - \frac{x^3}{3a^2} \right]_0^a = \frac{4}{3} \pi a b^2$$

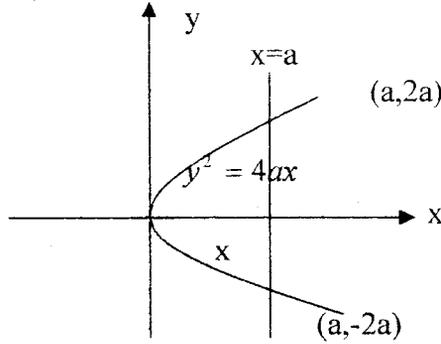
$$ii) \quad V = \int_{-b}^b \pi [g(y)]^2 dy$$

$$= \int_{-b}^b \pi x^2 dy = \int_{-b}^b \pi a^2 \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) dy = 2\pi a^2 \int_0^b \left[1 - \frac{y^2}{b^2}\right] dy$$

$$= \frac{4}{3} \pi a^2 b$$

مثال أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المساحة المحدودة بالقطع المكافئ $y^2 = 4ax$ والوتر البؤرى العمودى وإذا كان الدوران أولا: حول محور الصادات ثانيا : حول الوتر البؤرى العمودى

الحل



أولا: حول محور الصادات

بما أن المساحة التى ستدور مكونة من جزأين متماثلين فإننا نوجد حجم المجسم الناتج من دوران احد الجزأين ثم نضرب الناتج فى 2 فيكون :

$$\begin{aligned}
 V &= 2 \left[\int_0^{2a} \pi x_2^2 dy - \int_0^{2a} \pi x_1^2 dy \right] \\
 &= 2\pi \int_0^{2a} [x_2^2 - x_1^2] dy = 2\pi \int_0^{2a} \left[a^2 - \frac{y^4}{16a^2} \right] dy \\
 &= \frac{16}{5} \pi a^3
 \end{aligned}$$

ثانيا : حول الوتر البؤرى العمودى :

$$\begin{aligned} V &= 2 \int_0^{2a} \pi (a - x)^2 dy = \\ &2 \int_0^{2a} \left(a^2 - \frac{1}{2} y^2 + \frac{y^4}{16 a^2} \right) dy \\ &= \frac{16}{15} \pi a^3 \end{aligned}$$

تمارين

أوجد المساحات المحددة بالمنحنيات الآتية:

1. $y = 6x - x^2$, $y = x^2 - 2x$

2. $y = x^3 - 6x^2 + 8x$, $y=0$

3. $y = x^2 - 7x + 6$, $y=0$

4. $x = 4 - y^2$, $x=0$

5. $y^2 = 4x$, $y = 2x - 4$

6. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$

7. Cycloid curve $0 \leq t \leq 2\pi$

8. $x = a \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$

9. Cardioid's curve $r = a(1 + \cos \theta)$

أوجد أطوال المنحنيات الآتية :

10. $x = \ln x$ from $x = \sqrt{3}$ to $x = \sqrt{8}$

11. $y = 1 - \ln \cos x$ from $x = 0$ to $x = \frac{\pi}{4}$

12. $y = a(1 - \cos t)$, $x = a(t - \sin t)$

13. $r = a(1 + \cos \theta)$, $x = a(t - \sin t)$

14. The circle $x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$
from $t=0$ to $t=t_1$.

عين حجوم المجسمات الناتجة من دوران المساحات المحددة بالمنحنيات
التالية حول محور السينات:

15. $y = \sin x$, $y = 0$, $x \in [0, \pi]$

16. $y = x^2$, $x=1$.

17. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$, $y=0$

عين حجوم المجسمات الناتجة من دوران المساحات المحددة
بالمنحنيات التالية حول محور الصادات:

18. $y = \sin x$, $x=0$, $y=0$

19. $y = \cos x$, $x=0$, $y=0$

20. $y = x^2$, $y=1$, $x=0$

* * *