

الباب الثامن

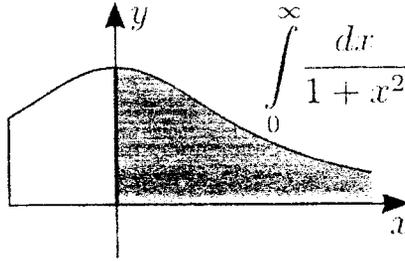
التكامل المعتل

Improper Integrals

فى حساب التكامل، التكامل المعتل هو نهاية التكامل المحدود كنهاية النقطة

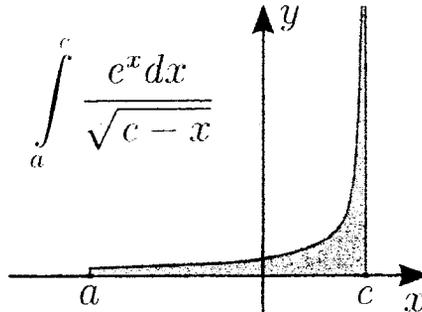
لفترة التكامل التى تقترب من من عدد حقيقى محدود او من $-\infty \rightarrow \infty$

فى بعض الحالات تقترب من نهايتى الطرفين كما هو موضح بالشكل التالى:



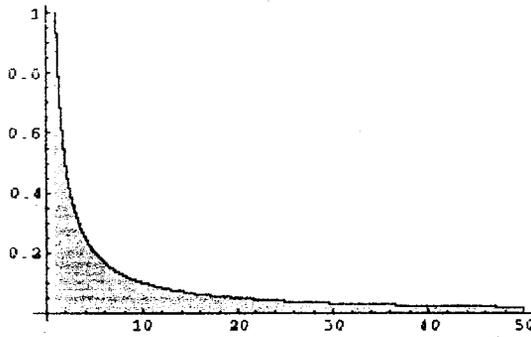
التكامل المعتل من النوع الاول :

فالتكامل يحتاج لتعريف المجال المحدود كما هو موضح بالشكل التالى:



تكامل ريمان المعتل من النوع الثاني :

ربما هذا التكامل ليست له خاصية الوجود وذلك بسبب وجود خط التقارب العمودي للدالة. لنفرض دوران الدالة $y = 1/x, x > 1$ حول محور x وبالتالي سوف نحصل على سطح يسمى **Gabriel's Horn** غابرييل هورن. دعنا اولاً ان نحسب المساحة اسفل هذا المنحنى من $x = 1$ الى ∞ كما هو موضح بالشكل التالي:



وتعرف هذه المساحة كالتالي:

$$Area = \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$$

وبالنظر الى هذا التكامل، نجد انه من الواضح توجد مشكلة لان هذه المساحة ليست محددة. وفي الواقع هذا التكامل غير محدود. أى تكامل له نهاية غير محددة او نقط داخل نطاق التكامل يسمى التكامل المعتل (**Improper integrals**)، والان كيف يمكن ايجاد هذا التكامل؟

اولا لابد من ايجاد قيمة هذا التكامل المعدل والذي هو التكامل المحدود.

$$\int_1^b \frac{1}{x} dx$$

والان سنحسب النهاية على انها يؤول الى ∞ . وبالتالي سنوجد احد

النهايتين كالتالى:

1. $\int_1^b \frac{1}{x} dx = \ln|x| \Big|_1^b = \ln|b| - \ln|1| = \ln|b|$
2. $\lim_{b \rightarrow \infty} \ln|b| = \infty$

وبالتالى تصبح المساحة اسفل المنحنى تؤول الى مالانهاية. والطريقة

المتبعة فى هذه الحالة هي:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} (\ln|x|) \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} (\ln|b| - \ln|1|) = \infty$$

1- فاذا كنت نتيجة التكامل مالانهاية او ليس للتكامل وجود وغير معرف

بالتالى يسمى هذا التكامل المعتل انه متباعد.

2- واذا كانت النهاية محدودة يسمى هذا التكامل متقارب.

بالتالى لابد من حساب حجم الجسم الناشئ من الدوران بطريقة القرص:

$$Volum = \int_a^b \pi (r(x))^2 dx$$

$$Volum = \int_1^{\infty} \pi \left(\frac{1}{x} \right)^2 dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \pi x^{-2} dx$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{\pi}{b} + \pi \right) = \pi$$

ف نجد ان الحجم محدود. وسوف نناقش بعض الامثلة التالية موضحين كيف يمكن حساب التكامل غير المعتل:

تعريف: التكامل المحدود $\int_a^b f(x) dx$ يسمى تكاملا معتلا اذا تحققت إحدى الشروط الآتية :

1- إذا كانت الدالة $f(x)$ نقطة عدم اتصال (أو أكثر من نقطة) في الفترة $a \leq x \leq b$

2- إذا كانت إحدى حدود التكامل هي المالانهاية.

طريقة حل التكاملات الغير متصلة

أ- إذا كانت الدالة التكاملية $f(x)$ متصلة في الفترة $a \leq x \leq b$ ولكنها غير متصلة عند $x=b$ فإن :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\epsilon} f(x) dx$$

بشرط وجود النهاية.

ب- إذا كانت $f(x)$ متصلة فى الفترة $a < x \leq b$ ولكنها غير متصلة عند

$x=a$ فإن

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\epsilon}^{b-\epsilon} f(x) dx$$

ح- اذا كانت الدالة $f(x)$ متصلة عند جميع نقط الفترة $a \leq x \leq b$ ولكنها

غير متصلة عند النقطة $x=c$ حيث $a < c < b$ فإن

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{c-\epsilon} f(x) dx + \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{c+\delta}^b f(x) dx$$

بشرط وجود كلتا النهايتين.

امثلة محلولة

Solved Problems

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4-x}}$$

مثال أحسب التكامل

الحل

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4-x}} = \lim_{b \rightarrow 4} \int_0^b \frac{dx}{\sqrt{4-x}} = \lim_{b \rightarrow 4} \int_4^{4-b} -u^{-1/2} du = \lim_{b \rightarrow 4} (-2u) \Big|_4^{4-b} \dots (I)$$

نفرض ان

Let $u = 4 - x \Rightarrow du = -dx$, when $x = 0 \Rightarrow u = 4$,
 when $x = b \Rightarrow u = 4 - b$.

$$I = \lim_{b \rightarrow 4} (2\sqrt{4-b} + 2\sqrt{4}) = 4$$

بالتالى يكون هذا التكامل متقارب (Convergence) وقيمه = 4 .

مثال أحسب التكامل $\int_{-\infty}^{-2} \frac{dx}{(x+1)^3}$

الحل نلاحظ ان احد حدى التكامل مالانهاية، وبالتالى نتبع الطريقة التى تجعله متقارب كالتالى:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{-2} \frac{dx}{(x+1)^3} &= \lim_{b \rightarrow -\infty} \int_b^{-2} \frac{dx}{(x+1)^3} \\ &= \lim_{b \rightarrow -\infty} \int_{b+1}^{-1} u^{-3} du = \lim_{b \rightarrow -\infty} \left(\frac{u^{-2}}{-2} \right) \Big|_{b+1}^{-1} \dots\dots\dots (I) \end{aligned}$$

Let $u = x + 1 \Rightarrow du = dx$, when $x = b \Rightarrow u = b + 1$,
 when $x = -2 \Rightarrow u = -1$.

$$\therefore I = \lim_{b \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2(b+1)} \right) = -\frac{1}{2}$$

بالتالى يكون هذا التكامل متقارب (convergence) وقيمه = -1/2 .

مثال أحسب التكامل $\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

الحل نلاحظ ان العدد 0 يسبب مشكلة لمقام هذا التكامل وبالتالي لا بد

ان نجعل النهاية تقترب من 0 لهذا التكامل كالتالى:

$$\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \lim_{b \rightarrow 0} \int_b^1 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \lim_{b \rightarrow 0} \int_{\sqrt{b}}^1 2e^u du = \lim_{b \rightarrow 0} (2e^u) \Big|_{\sqrt{b}}^1 \dots (I)$$

Let $u = \sqrt{x} \Rightarrow du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$, when $x = b \Rightarrow u = \sqrt{b}$,

when $x = 1 \Rightarrow u = 1$.

$$\therefore I = \lim_{b \rightarrow 0} (2e - 2e^{\sqrt{b}}) = 2e - 2.$$

بالتالى هذا التكامل المعتل متباعد (divergence) وقيمه = $2e - 2$.

مثال أحسب التكامل $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{3x}{(3x^2 + 2)^3} dx$

الحل نلاحظ ان حدى التكامل مالا نهاية، وبالتالي نتبع الطريقة التى

تجعلها متقارب كالتالى:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{3x}{(3x^2 + 2)^3} dx = \int_{-\infty}^0 \frac{3x}{(3x^2 + 2)^3} dx + \int_0^{\infty} \frac{3x}{(3x^2 + 2)^3} dx \dots \dots (I)$$

بالتالى يكون لدينا تكاملين معتلين ولا بد ان يكون التكاملين متقاربين، واذا

كان احدهم غير متقارب يكون التكامل الاصلى غير متقارب.

Let $u = 3x^2 + 2 \Rightarrow du = 6x dx$, when $x = b \Rightarrow u = 3b^2 + 2$,
 when $x = 0 \Rightarrow u = 2$. Also, when $x = c \Rightarrow u = 3c^2 + 2$

$$\begin{aligned} \therefore I &= \lim_{b \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} \int_{3b^2+2}^2 u^{-3} du + \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_2^{3c^2+2} u^{-3} du \\ &= \lim_{b \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{4u^2} \right) \Big|_{3b^2+2}^2 + \lim_{c \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{4u^2} \right) \Big|_2^{3c^2+2} \\ &= \lim_{b \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{16} + \frac{1}{4(3b^2+2)} \right) + \lim_{c \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{4(3c^2+2)} + \frac{1}{16} \right) = 0 \end{aligned}$$

وحيث ان النهاية الاولى تقترب الى $1/16$ والنهاية الثانية تقترب من

العدد $-1/16$ لذلك التكامل المعتل متقارب ويقترب من العدد 0

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

مثال أحسب التكامل

الحل دعنا نحسب مساحة الدالة $f(x) = \frac{1}{x^2}$ للفترة

$$[1, \infty) \rightarrow [1, t], t > 1$$

$$A_t = \int_1^t \frac{1}{x^2} dx = \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_1^t = 1 - \frac{1}{t} \Rightarrow$$

$$A = \lim_{t \rightarrow \infty} A_t = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{t} \right) = 1$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_1^t \frac{1}{x^2} dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{1}{x^2} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_1^t \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{t} \right) = 1 \end{aligned}$$

دعنا نضع طريقة الحل في حالة الفترات اللانهائية. هناك ثلاث حالات اساسية:

$$1. \text{ If } \int_a^t f(x) dx$$

هذا التكامل موجود لكل قيم $t > a$ وبالتالي فإن:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x) dx$$

شرط ان تكون النهاية موجودة ومحدودة.

$$2. \text{ If } \int_t^b f(x) dx$$

هذا التكامل موجود لكل قيم $t < b$ وبالتالي فإن:

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x) dx$$

شرط ان تكون النهاية موجودة ومحدودة.

3. If $\int_{-\infty}^c f(x)dx$ and $\int_c^{\infty} f(x)dx$ are both convergence

إذا كان كلا من التكاملين متقاربين فأن:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^{\infty} f(x)dx$$

حيث c أي عدد اختياري.

مثال حدد ما اذا كان التكامل الاتي متقارب او متباعد واذا كان متقاربا

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$$

احسب قيمته:

الحل

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx &= \lim_{x \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{1}{x} dx = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} (\ln(x)) \Big|_1^t \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} (\ln(t) - \ln 1) \\ &= \infty \end{aligned}$$

وبالتالي فأن التكامل متباعد.

Fact حقيقة

$$\text{If } a > 0 \text{ then } \int_a^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$$

يكون متقارب اذا كان $P > 1$ ومتباعدة اذا كان $p \leq 1$

مسائل محلولة

Solved Problems

مثال حدد ما اذا كان التكامل الاتي متقارب او متباعد واذا كان متقاربا

$$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{3-x}} dx$$

احسب قيمته:

الحل

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{3-x}} dx &= \lim_{x \rightarrow \infty} \int_t^0 \frac{1}{\sqrt{3-x}} dx \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} (-2)\sqrt{3-x} \Big|_1^0 \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} (-2\sqrt{3} + 2\sqrt{3-t}) \\ &= -2\sqrt{3} + \infty \\ &= \infty \end{aligned}$$

وبالتالى فان التكامل متباعد.

مثال حدد ما اذا كان التكامل الاتي متقارب او متباعد واذا كان متقاربا

$$\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2} dx$$

احسب قيمته:

الحل

$$\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^0 xe^{-x^2} dx + \int_0^{\infty} xe^{-x^2} dx$$

والان سنحسب كل تكامل على حدة كالتالى:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 xe^{-x^2} dx &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_t^0 xe^{-x^2} dx \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{2} e^{-x^2} \right) \Big|_t^0 \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-2x} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

وبالتالى فإن التكامل الاول متقارب.

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} xe^{-x^2} dx &= \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^t xe^{-x^2} dx \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2} e^{-x^2} \right) \Big|_0^t \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} e^{t^2} + \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

وبالتالى فإن التكامل الثانى متقارب. فيكون التكامل الاصلى متقاربا
وقيمة

$$\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^0 x e^{-x^2} dx + \int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

مثال حدد ما اذا كان التكامل الاتي متقارب او متباعد واذا كان متقاربا

$$\int_{-2}^{\infty} \sin x dx$$

احسب قيمته:

الحل

$$\int_{-2}^{\infty} \sin x dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-2}^t \sin x dx$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} (-\cos x) \Big|_{-2}^t$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} (\cos 2 - \cos t)$$

النهاية غير موجودة وبالتالي التكامل يكون متباعد.

التكامل المتقطع او الغير متصل

Discontinuous Integrand

1 - اذا كانت الدالة $f(x)$ متصلة في الفترة $[a, b]$ وغير متصلة عند

$x=b$ فإن

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx$$

بشرط وجود النهاية.

2- إذا كانت $f(x)$ متصلة في الفترة $(a, b]$ وغير متصلة عند $x=a$ الدالة

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx$$

بشرط وجود النهاية.

3- إذا كانت الدالة $f(x)$ متصلة عند $x=c$, where $a < c < b$

وكلا من

$$\int_a^c f(x) dx \quad \text{and} \quad \int_c^b f(x) dx$$

متقاربين فأن:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

بشرط وجود كلا النهايتين.

4- إذا كانت الدالة $f(x)$ غير متصلة عند $x=a$, and $x=b$

وإذا كان كلا من التكاملين الاتيين متقاربين

$$\int_a^c f(x) dx \quad \text{and} \quad \int_c^b f(x) dx$$

فإن

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

حيث c أي عدد اختياري.

امثلة محلولة

Solved Problems

مثال حدد ما اذا كان التكامل الاتي متقارب او متباعد واذا كان متقاربا

$$\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{3-x}} dx$$

احسب قيمته:

الحل

$$\begin{aligned} \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{3-x}} dx &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{3-x}} dx \\ &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \left(-2\sqrt{3-x} \right) \Big|_0^t \\ &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \left(2\sqrt{2} - 2\sqrt{3-t} \right) \\ &= 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

حيث ان النهاية موجودة فان التكامل موجود وقيمته $2\sqrt{3}$

مثال حدد ما اذا كان التكامل الاتي متقارب او متباعد واذا كان متقاربا

$$\int_{-2}^3 \frac{1}{x^3} dx$$

احسب قيمته:

الحل

هذا التكامل غير متصل عند $x = 0$ وبالتالي سوف نتقسم التكامل الى النقطة جزئين عند هذه النقطة كالتالى:

$$\int_{-2}^3 \frac{1}{x^3} dx = \int_{-2}^0 \frac{1}{x^3} dx + \int_0^3 \frac{1}{x^3} dx$$

والان سوف ندرس التكاملين لمعرفة التقارب:

$$\begin{aligned} \int_{-2}^0 \frac{1}{x^3} dx &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \int_{-2}^t \frac{1}{x^3} dx \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(-\frac{1}{2x^2} \right) \Big|_{-2}^t \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(-\frac{1}{2t^2} + \frac{1}{8} \right) \\ &= -\infty \end{aligned}$$

سنوقف عند هذه النقطة لان التكامل عندها متباعد فلا داعى لدراسة النقطة الاخرى.

مثال حدد ما اذا كان التكامل الاتى متقارب او متباعد واذا كان متقاربا

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

احسب قيمته:

الحل

هذا التكامل عند حدود ∞ وبالتالي سوف نقسم التكامل الى جزئين عند

اي نقطة كالتالى

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2} dx + \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

لكى يكون التكامل متقارب لابد من تقارب شقى التكامل.

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{1}{x^2} dx &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 \frac{1}{x^2} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_t^1 \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(-1 + \frac{1}{t} \right) \\ &= \infty \end{aligned}$$

وحيث ان التكامل الاول متباعد فيكون التكامل الاصلى متباعد ايضا.

مثال حدد ما اذا كان التكامل الاتى متقارب او متباعد واذا كان متقاربا

$$\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} dx$$

احسب قيمته:

الحل

نلاحظ ان الدالة $f(x) = \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$ ليست متصلة عند النقطة $x = 3$

$$\int_0^3 f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{3-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \arcsin \frac{x}{3} \Big|_0^{3-\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \arcsin \frac{3-\varepsilon}{3} = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$$

مثال حدد ما اذا كان التكامل الاتي متقارب او متباعد واذا كان متقاربا

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}}$$

احسب قيمته:

الحل

نلاحظ ان الدالة $f(x)$ ليست متصلة عند النقطة $x = \pi/2$

$$\int_0^{\pi/2} \dots dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \frac{\cos x dx}{\sqrt{1-\sin x}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[-2\sqrt{1-\sin x} \right]_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[-\left\{ 1 - \sin \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon \right) \right\} + 1 \right] = \left[0 + 2\sqrt{1-0} \right] = 2$$

مثال اثبت ان الدالة $f(x) = \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$ ليست لها معنى.

الحل الدالة $f(x) = \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$ ليست لها معنى اذا كانت ليست لها نهاية

$$\int_0^2 \frac{dx}{2-x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{2-\varepsilon} \frac{dx}{2-x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [-\ln(2-x)]_0^{2-\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\ln \varepsilon} - \frac{1}{\ln 2} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\ln \frac{2}{\varepsilon}}{\ln 2 \ln \varepsilon} = \infty$$

مثال حدد ما اذا كان التكامل الآتي متقارب او متباعد واذا كان متقاربا

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 4}$$

احسب قيمته:

الحل نلاحظ ان احد حدى الدالة ∞ اذن

$$\int_0^{\infty} \dots dx = \lim_{u \rightarrow \infty} \int_0^u \frac{dx}{x^2 + 4} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2} \Big|_0^u = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_{-\infty}^0 e^{2x} dx$$

مثال احسب قيمته التكامل:

الحل

$$\lim_{u \rightarrow -\infty} \int_u^0 e^{2x} dx = \lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x}}{2} \Big|_u^0 = \frac{1}{2} - \lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{e^{2u}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^0 e^{2x} dx = \frac{1}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$$

مثال احسب قيمته التكامل:

الحل

$$Q \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x dx}{e^{2x} + 1}$$

نلاحظ ان احد حدى لدالة $\pm\infty$ بالتالى سنعتبر النهايات

$$\begin{aligned} & \lim_{v \rightarrow -\infty} \int_{-v}^{\infty} \frac{e^x dx}{e^{2x} + 1} + \lim_{u \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^u \frac{e^x dx}{e^{2x} + 1} \\ &= \lim_{v \rightarrow -\infty} \tan^{-1} e^x \Big|_v^0 + \lim_{u \rightarrow \infty} \tan^{-1} e^x \Big|_0^u \\ &= (0-0) + \left(\frac{\pi}{4} - 0 \right) = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \frac{\pi}{2}$$

مثال احسب المساحة المحددة بالدالة $y^2 = \frac{x^2}{1-x^2}$ و محورى

التماثل $x=1, x=-1$.

الحل من تماثل الدالة نجد انها غير متصلة عند $x=1$ بالتالى:

$$\begin{aligned} \int_0^4 \dots dx &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{1-\epsilon} \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[-(1-x^2)^{1/2} \right]_0^{1-\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[1 - (2\epsilon - \epsilon^2)^{1/2} \right] = 1 \text{ square units.} \end{aligned}$$

وتكون المساحة المطلوبة A تساوى 1 وحدة مربعة.

تمارين

إثبت ما يأتي :

$$1. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2$$

$$2. \int_0^4 \frac{dx}{(x-2)^{2/3}} = 6\sqrt[3]{2}$$

$$3. \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4-x}} = 4$$

$$4. \int_0^1 \ln x dx = -1$$

$$5. \int_0^1 \frac{dx}{x^4}$$

ليس له معنى

$$6. \int_0^1 \frac{dx}{x^2} = 1$$

$$7. \int_1^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \frac{2}{e}$$

$$8. \int_{-\infty}^0 x e^x dx = -1$$

$$10. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+4x^2} = \frac{\pi}{2}$$

* * *