

## الباب العاشر

### امتحانات متنوعة وإجاباتها النموذجية

جامعة قناة السويس

الفرقة : إعدادي

كلية هندسة البترول والتعدين

الزمن : ساعة ونصف قسم العلوم والرياضيات الهندسية

المادة : جبر

امتحان نهاية الفصل الدراسي الثاني 2005-2006

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول: أ) أوجد المعادلة التي تنقص جذورها بمقدار "2" عن جذور المعادلة

$$f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6$$

ب) باس . تخدام الك . سور الجزئي . ة ح . ل الك . سر الآت . ي:

$$\frac{5x + 2}{(x + 2)(3x + 2)}$$

ج) باستخدام الاستنتاج الرياضي اثبت أن:

$$\frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{2(n+2)}$$

د) أوجد  $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 2x + 6$  على  $(x+1)(x-1)$

خارج قسمة المقدار

السؤال الثاني: أ) استخدم طريقة الوضع الزائف لتعيين حلول تقريبية للمعادلة:

$$F(x) = x^2 + x - 1 = 0$$

القريب من النقطة  $x=1$ .

ب) حل المعادلة  $x^3 - 15x^2 - 33x + 847 = 0$

ج) حل المعادلة  $x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 20x + 8 = 0$

د) أوجد الخمسة حدود الأولى في مفكوك المقدار  $(1 + 3x)^{-5}$   
السؤال الثالث: أ) أوجد الجذور المميزة والمتجهات المميزة للمصفوفة:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ب) اختبر المتسلسلة الآتية من حيث كونها متقاربة أو متباعدة:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n$$

ج) أوجد المعكوس  $A^{-1}$  للمصفوفة  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

د) باستخدام طريقة نيوتن ثلاث مرات أوجد الجذور الحقيقية للمقدار  $3x^3 + x^2 - 11x + 6 = 0$

د/ عادل نسيم

مع تمنياتي بالنجاح

تخلفات

امتحان نهاية الفصل الدراسي الثاني 2006-2005  
تاريخ الامتحان 2006/5/24

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول: أ) باستخدام الك. سور الجزئية حل الك. سر الآتي:

$$\frac{5x+2}{(x+2)(3x+2)}$$

ب) باستخدام الاستنتاج الرياضي اثبت أن:  $\sum_{r=1}^n r = \frac{1}{2}n(n+1)$

ج) أوجد  $f(x) = 2x^3 - 7x^2 + 7x - 2$  على  $(x-2)$ .

خارج قسمة المقدار

د) أوجد المعادلة التي تزيد جذورها بمقدار "2" عن جذور المعادلة

$$f(x) = x^4 + 6x^3 + 12x^2 + 11x + 1$$

السؤال الثاني: أ) استخدم طريقة نيوتن لتعيين حلول تقريبية للمعادلة

التالية

$$F(x) = x^3 + x - 1$$

ب) حل المعادلة  $x^3 - 9x + 28 = 0$

ج) حل المعادلة  $x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 20x + 8 = 0$

د) أوجد مفكوك المقدار  $(1-2x)^6$

السؤال الثالث: أ) اختبر المتتابة التالية من حيث التقارب والتباعد. د:

$$\{Z_n\} = 1 + \frac{2}{n}$$

ب) اختبر المتسلسلة الآتية من حيث كونها متقاربة أو متباعدة:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$$

ج) أوجد المعكوس  $A^{-1}$  للمصفوفة  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

د / عادل نسيم

مع تمنياتي بالنجاح

\* \* \*

جامعة قناة السويس  
الفرقة : إعدادي  
كلية هندسة البترول والتعدين  
الزمن : ساعة ونصف  
قسم العلوم والرياضيات الهندسية  
المادة : جبر

### تخلفات

امتحان نهاية الفصل الدراسي الثاني 2006-2007

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول: (أ) أوجد المعادلة التي تزيد جذورها بمقدار "2" عن جذور المعادلة

$$F(X) = 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6$$

(ب) باستخدام الكسور الجزئية حلل الجذر الآتي:

$$\frac{2x+3}{x^2-2x-3}$$

(ج) باستخدام الاستنتاج الرياضي اثبت أن :

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2 - 1)$$

$$f(x) = x^4 - x^3 + x^2 + x + 5 \quad \text{على} \quad (2x-1)$$

(د) أوجد خارج قسمة المقدار

لسؤال الثاني : (أ) استخدم طريقة الوضع الزائف لتعيين حلول تقريبية للمعادلة

$$F(X) = x^2 + x + 1 = 0$$

القريب من النقطة :  $x=1$   
(ب) حل المعادلة

$$x^3 - 9x + 28 = 0$$

ج) حل المعادلة

$$x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 20x + 8 = 0$$

د) أوجد الخمسة حدود الأولى في مفكوك المقدار

$$(x+7)^{-2/3}$$

السؤال الثالث: أ) أوجد الجذور المميزة والمتجهات المميزة للمصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ب) اختبر المتسلسلة الآتية من حيث كونها متقاربة أو متباعدة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^2}$$

ج) أوجد المعكوس  $A^{-1}$  للمصفوفة:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

د) باستخدام طريقة نيوتن ثلاث مرات أوجد الجذر الحقيقي للمقدار

$$3x^3 + x^2 - 11x + 6 = 0$$

مع تمنياتي بالنجاح د/ عادل نسيم

\* \* \*

امتحان نهاية التيريم الثاني 2008/2007

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول: (أ): أوجد خارج قسمة المقدار  $f(x) = x^5 - 5x^4 + 9x^3 + 6x + 13$  على  $(x-2)(x-1)$

(ب) أوجد المعادلة التي تنقص جذورها بمقدار "2" عن جذور المعادلة:

$$f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6$$

(ج) باستخدام الثلاث طرق أوجد مجموعة الحلول التقريبية لإيجاد الجذور الحقيقية للمسائل التالية:

$$f(x) = x^3 - 5x + 3$$

(د) حل المعادلة  $x^3 + 6x^2 + 9x + 3 = 0$ ,

السؤال الثاني: (أ) باستخدام الاستنتاج الرياضي اثبت  $\sum_{r=1}^n r^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

(ب) باستخدام الكسور الجزئية حل الكسر الآتي:  $\frac{x^2 + 15}{(x-1)(x^2 + 2x + 5)}$

(ج) اختبر المتسلسلة الآتية من حيث كونها متقاربة أو متباعدة:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2}$

(د) أوجد الجذور المميزة والمتجهات المميزة للمصفوفة:  $A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

السؤال الثالث: (أ) أوجد المعكوس  $A^{-1}$  للمصفوفة  $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

(ب) أوجد قيمة

$$\sqrt[1/3]{211}$$

مقربا الجواب إلى ثلاثة أرقام عشرية باستخدام نظرية ذات الحدين واستنتج أكبر قيمة للخطأ.

(ج) أوجد مفكوك  $\frac{1}{3-5x}$  ومتى يكون هذا المفكوك صحيحا.

أستاذ المادة : د/ عادل نسيم

مع تمنياتي بالنجاح

E-Mail: adel.nasim@yahoo.com

## تخلفات

امتحان نهاية التيرم الثاني 2008/2007

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول: أ) أوجد خارج قسمة المقدار  $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 2x + 6$ على  $(x - 1)(x + 1)$ 

ب) أوجد المعادل... الت... ي تزي... د... ج... ذورها بمق... دار "2" ع... ن ج... ذور المعادل...:

$$f(x) = x^4 + 6x^3 + 12x^2 + 11x + 1$$

ج) استخدم طريقة نيوتن لتعيين حلول تقريبية للمعادلة التالية  $F(x) = x^3 + x - 1$ د) أوجد الحل الحقيقي للمعادلة الآتية باستخدام طريقة الوضع الزائف,  $x^4 = 3$ السؤال الثاني: أ) حل المعادلة  $x^3 - 15x^2 - 33x + 847$ 

ب) باستخدام الاستنتاج الرياضي اثبت

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

ج) باستخدام الكسور الجزئية حل الكسر الآتي:  $\frac{5x+2}{(x+2)(3x+2)}$ د) اختبر المتسلسلة  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$  من حيث كونها متقاربة أو متباعدة.السؤال الثالث: أ) أوجد المعكوس  $A^{-1}$  للمصفوفة  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ ب) أوجد مفكوك المقدار  $(2-3x)^5$ ج) أوجد قيمة تقريبية للمقدار  $3\sqrt{\frac{20}{9}}$  مقرباً إلى أقرب أربعة أرقام عشرية صحيحة ثم أوجد.

قيمة الخطأ.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

ب) أوجد قيمة  $\sqrt[1/3]{211}$  مقربا الجواب إلى ثلاثة أرقام عشرية باستخدام نظرية ذات الحدين واستنتج أكبر قيمة للخطأ.

ج) أوجد مفكوك  $\frac{1}{3-5x}$  ومتى يكون هذا المفكوك صحيحا.

أستاذ المادة : د/ عادل نسيم

مع تمنياتي بالنجاح

**E-Mail: adel.nasim@yahoo.com**

# إجابة امتحان الجبر 2006/2005

السؤال الأول :

( أ ) أوجد المعادلة التي تنقص جذورها بمقدار 2 عند جذور المعادلة

$$F(X) = 2X^4 - 3X^3 + 4X^2 - 5X + 6$$

الحل:

باستخدام القسمة على  $(X-2)$  نوجد المطلوب

$$\begin{array}{r} 2 \quad 2 \quad -3 \quad 4 \quad -5 \quad 6 \\ \phantom{2} \quad \phantom{2} \quad 4 \quad 2 \quad 12 \quad 14 \\ 2 \quad 2 \quad 1 \quad 6 \quad 7 \quad 20 = R_1 \\ \phantom{2} \quad \phantom{2} \quad 4 \quad 10 \quad 32 \\ 2 \quad 2 \quad 5 \quad 16 \quad 39 = R_2 \\ \phantom{2} \quad \phantom{2} \quad 4 \quad 18 \\ 2 \quad 2 \quad 9 \quad 34 = R_3 \\ \phantom{2} \quad \phantom{2} \quad 4 \\ 2 \quad 2 \quad 13 = R_2 \\ \phantom{2} \quad \phantom{2} \quad 2 = Qn \\ \therefore 9(y) = 2y^4 + 13y^3 + 34y^2 + 39y + 20 \end{array}$$

$$\leftarrow y = (X-2) \quad \text{وبوضـع}$$

∴ المعادلة المطلوبة

$$F(X) = 2(X-2)^4 + 13(X-2)^3 + 34(X-2)^2 + 39(X-2) + 20$$

$$\frac{5X+2}{(X+2)(3X+2)} \quad \text{(ب) باستخدام الكسور الجزئية حل الكسر الآتي}$$

الحل:

$$\frac{5X+2}{(X+2)(3X+2)} = \frac{a}{X+2} + \frac{b}{3X+2}$$

وبضرب طرفي المعادلة في  $(X+2)(3X+2)$

$$5X + 2 = (3X + 2)a + (X + 2)b$$

$$5X + 2 = 3aX + 2a + bX + 2b$$

$$5X + 2 = (3a + b)X + 2(a + b)$$

وبمقارنة الطرفين

$$5 = 3a + b$$

$$1 = a + b$$

$$4 = 2a \Rightarrow a = 2, \quad b = -1$$

$$\therefore \frac{5X+2}{(X+2)(3X+2)} = \frac{2}{X+2} + \frac{1}{3X+2}$$

(ج) باستخدام الاستنتاج الرياضي اثبت أن

$$\frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{2(n+2)}$$

الحل:

$$\text{at } n = 1, \quad L.H.S = \frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{6}, \quad R.H.S = \frac{1}{2(3)} = \frac{1}{6}$$

نفرض صحة العلاقة عند  $n = k$

$$\therefore \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k}{2(k+2)}$$

ونحاول إثبات صحة العلاقة عند  $n = k + 1$

∴ العلاقة المطلوب إثباتها

$$\frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(k+1)(k+3)} = \frac{k+1}{2(k+3)}$$

$$L.H.S = \left[ \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right] + \frac{1}{(k+1)(k+3)}$$

$$L.H.S = \frac{k}{2(k+2)} + \frac{1}{(k+1)(k+3)}$$

$$L.H.S = \frac{k^2 + 3k + 2}{2(k+2)(k+3)} = \frac{(k+2)(k+1)}{2(k+2)(k+3)} = R.H.S$$

$$f(X) = 4X^3 - 4X^2 + 2$$

(د) أوجد خارج قسمة المقدار

$(X+1)(X-1)$  على  $X+6$

$$\begin{array}{r} -1 \quad 3 \quad -4 \quad 2 \quad 6 \\ \phantom{-1} \phantom{3} \quad -3 \quad 7 \quad -9 \\ 1 \quad 3 \quad -7 \quad 9 \quad -3 = R_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \phantom{1} \phantom{3} \quad 3 \quad -4 \\ \phantom{1} \phantom{3} \quad 3 \quad -4 \quad 5 = R_2 \end{array}$$

$$Q(X) = 3X - 4 \quad \Rightarrow \quad \text{خارج القسمة}$$

$$R = 5(X+1) - 3 \quad \Rightarrow \quad \text{الباقي}$$

$$\forall f(X) = Q(X)[(X+1)(X-1)] + R$$

السؤال الثاني :

(أ) استخدام طريقة الوضع الزائف لتعيين حلول تقريبية للمعادلة

$$F(X) = X^2 + X - 1 = 0$$

القريب من النقطة  $X = 1$

الحل:

نبحث الحل على الفترة  $[0, 1]$  حيث  $f(0) f(1) < 0$

$$C = X_1 = \frac{of(1) - f(0)}{f(1) - f(0)} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} = .5$$

$$\because f\left(\frac{1}{2}\right)f(1) < 0$$

الحل:  $\in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$

$$X_2 = \frac{\frac{1}{2}f(1) - f\left(\frac{1}{2}\right)}{f(1) - f\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}}{1 + \frac{1}{4}} = .6$$

$$\therefore f(.6)f(1) < 0$$

الحل:  $\in [6,1]$

$$X_3 = \frac{.6f(1) - f(.6)}{f(1) - f(.6)} = \frac{.6 + .04}{1 + .04} = .615$$

$$\therefore f(.615)f(1) < 0$$

الحل ينتمي للفترة  $[.615, 1]$

$$X_4 = \frac{.615f(1) - f(.615)}{f(1) - f(.615)} = .617$$

الحل التقريبي المطلوب هو .617

$$(ب) \text{ حل المعادلة } X^3 - 15X^2 - 33X + 847 = 0$$

الحل:

لإيجاد الحلول المطلوبة نستخدم طريقة كاردان

$$X = y + \frac{15}{3} = y + 5 \quad \text{نتخلص من معامل } X^2 \text{ وذلك بوضع}$$

$$X = y + 5 \quad \rightarrow \quad y = X - 5$$

أي نحصل على معادلة تنقص جذورها بمقدار 5

$$5 \quad 1 \quad -15 \quad -33 \quad 847$$

$$5 \quad -50 \quad -415$$

$$5 \quad 1 \quad -10 \quad -83 \quad 932 = R_1$$

$$5 \quad -25$$

$$5 \quad 1 \quad -5 \quad -108 = R_2$$

$$5$$

$$5 \quad 1 \quad 0 = R_3$$

$$1 = Qn$$

الحل: المعادلة تصبح

$$Y^3 = 108y + 432 = 0$$

نوجد قيمة المميز على الصورة

$$\Delta = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3 = (216)^2 - (36)^3 = 0$$

∴ يوجد للمعادلة ثلاث جذور حقيقية

نحل المعادلة

$$m^2 + 432m + 216 = 0$$

$$\therefore m_1 = m_2 = -216$$

$$L = \sqrt[3]{m_1} = -6$$

∴ حلول المعادلة السابقة هي

$$(-L, -L, 2L) \rightarrow (6, 6, -12)$$

وبإضافة 5 على جذور هذه المعادلة

∴ الجذور المطلوبة هي (11, 11, -7)

$$(ج) \text{ حل المعادلة } X^4 + 4X^3 - 6X^2 + 20X + 8 = 0$$

الحل:

$$X^4 + 4X^3 - 6X^2 + 20X - 8 \text{ باستخدام طريقة فراري}$$

نضع الطرف الأيسر في صورة إكمال المربعات

$$\begin{aligned} (X^2 + 2Xi + L)^2 &= X^4 + 4X^3 + (10 + 2)LX^2 + L^2 - 8 \\ &= (mX + n)^2 \end{aligned}$$

ومن العلاقة

$$X \text{ معامل } (X^2 \text{ معامل}) (\text{الحد المطلق}) = \text{مربع نصف معامل } X$$

$$(10 + 2L)(L^2 - 8) = (2L - 10)^2$$

$$L^2 + 3L^2 = 12L - 90 = 0$$

وبطريقة التخمين نوجد أحد حلول  $3 = L$

وهي تحقق المعادلة .

$$\therefore (10 + 2L)X^2 + (4L - 20)X + (L^2 - 8) = m^2X^2 + 2mnX + n^2$$

$$\text{at } L = 3$$

و

والمقارنة

$$10 + 2L = 16 = m^2$$

$$L^2 - 8 = 1 = n^2$$

$$2mn = 4L + 20 = -18$$

ومنهم . ١

$$m = 4, n = -1$$

$$(X^2 + 2X + L)^2 = (mX + n)^2$$

$$(X^2 + 2X + 3)^2 = (4X - 1)^2$$

$$X^2 + 2X + 3 = |4X - 1|$$

$$X^2 + 2X + 3 = 4X - 1 \quad X^2 + 2X + 3 = 4X - 1$$

$$X^2 - 2X + 4 = 0$$

$$X^2 - 6X + 2 = 0$$

$$X = \frac{2 \pm \sqrt{4-16}}{2}$$

$$X = \frac{-6 \pm \sqrt{36-8}}{2}$$

$$X = \frac{2 \pm \sqrt{-12}}{2}$$

$$X = \frac{-6 \pm \sqrt{28}}{2}$$

$$X = 1 \pm \sqrt{3}i$$

$$X = -3 \pm \sqrt{7}$$

∴ حلول المعادلة هي

$$(1 \pm \sqrt{3}i, -3 \pm \sqrt{7})$$

(د) أوجد الخمسة حدود الأولى في مفكوك  $(1 + 3X)^{-5}$

$$(1+3X)^2 = 1 + (-5)(3X) + \frac{(-5)(-6)}{2!}(-3X)^2$$

$$+ \frac{(-5)(-6)(-7)}{3!}(3X)^3 + \frac{(-5)(-6)(-7)(-8)}{4!}3X^4$$

السؤال الثالث :

(أ) أوجد الجذور المميزة والمتجهات المميزة للمصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(5 - \lambda)(2 - \lambda) - 4 = 0$$

فتكون الجذور هي  $\lambda_1 = 1$  ,  $\lambda_2 = 6$

$$\lambda_2 = 1$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$4X_1 + 4X_2 = 0$$

$$X_1 + X_2 = 0$$

$$\underline{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 6$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-X_1 + 4X_2 = 0$$

$$X_1 + 4X_2 = 0$$

$$X_1 = 4X_2 \Rightarrow$$

$$\underline{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(ب) اختبر المتسلسلة حيث كونها متقاربة أو متباعدة

$$\sum_{n=1}^{\infty} n$$

الحل:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + \dots$$

هذه المتسلسلة عبارة عن متوالية عددية مجموع  $n$  من الحدود

$$S_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

وبالتالي فإن مجموعهما

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)n}{2} = \infty$$

∴ المتسلسلة متباعدة .

$$(ج) \text{ أوجد المعكوس } A^{-1} \text{ للمصفوفة } A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

الحل:

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj}A$$

$$\det A = (3)(4) - (1)(2) = 10$$

$$\text{adj}A = \text{adj} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +4 & -1 \\ -2 & +3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{\text{adj}A}{\det A}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} .4 & -.1 \\ -.2 & .3 \end{pmatrix}$$

( د ) باستخدام طريقة نيوتن ثلاث مرات أوجد الجذر الحقيقي للمقدار

$$3X^3 + X^2 - 11X + 6 = 0$$

الحل:

نبحث الحل على الفترة  $[0, 1]$

$$\forall f(0)f(1) < 0$$

$$\Rightarrow X_0 = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$$

$$f'(X) = 9X^2 + 2X - 11$$

$$X_1 = X_0 - \frac{f(X_0)}{f'(X_0)} = .5 - \frac{1.125}{-7.75} = .645$$

$$X_2 = X_1 - \frac{f(X_1)}{f'(X_1)} = .645 - \frac{.125}{-5.963} = .6659$$

$$X_3 = X_2 - \frac{f(X_2)}{f'(X_2)} = .6659 - \frac{.00399}{-5.676}$$

$$X_3 = .6666$$

ومنها الحل الحقيقي للمعادلة هو

$$.6666$$

\* \* \*

## إجابة امتحان تخلفات 2006/2005

( أ ) باستخدام الكسور الجزئية حل الآتي :

$$\frac{5X+2}{(X+2)(3X+2)}$$

الحل:

$$\frac{5X+2}{(X+2)(3X+2)} = \frac{a}{X+2} + \frac{b}{3X+2}$$

بضرب طرفي المعادلة في المقدار  $(X+2)(3X+2)$

$$5X+2 = 3aX+2a+bX+2b$$

$$5X+2 = (3a+b)X+2(a+b)$$

وبمقارنة الطرفين ينتج أن

$$3a + b = 5$$

$$a + b = 1$$

بالطرح

$$2a = 4 \Rightarrow a = 2, \quad b = -1$$

$$\therefore \frac{5X+2}{(X+2)(3X+2)} = \frac{4}{X+2} - \frac{1}{3X+2}$$

(ب) باستخدام طريقة الاستنتاج الرياضي اثبت أن

$$\frac{1}{2}n(n+1) = \sum_{r=1}^n r$$

الحل:

$$\frac{1}{2}n(n+1) = 1+2+3+\dots+n$$

$$\text{at } n = 1, \quad L.H.S = \frac{1}{2}(2) = 1$$

$$R.H.S = 1$$

\* نفرض صحة العلاقة عن  $n = K$

$$\therefore \frac{1}{2}K(K+1) = 1+2+\dots+K$$

\* نحاول إثبات العلاقة عن  $n = K + 1$

$$1 + 2 + 3 + \dots + K + K + 1 = \frac{1}{2} (K +$$

$$1)(K + 2)$$

$$L.H.S = [1 + 2 + 3 + \dots + K] + K + 1$$

$$L.H.S = \frac{1}{2} K(K + 1) + (K + 1)$$

$$= \frac{1}{2} (K + 1) + (K + 2) = R.H.S$$

$$\therefore \frac{1}{2}n(n+1) = \sum_{r=1}^n r$$

(ج.) أوجد خارج قسمة المقدار  $f(X) = 2X^3 - 7X^2 + 7X - 2$

على  $X - 2$

$$\begin{array}{r} 2 \quad 2 \quad -7 \quad 7 \quad -2 \\ \phantom{2} \quad \phantom{2} \quad 4 \quad -6 \quad 2 \\ 2 \quad -3 \quad 1 \quad 0 = R \end{array}$$

$Q(X) = 2X^2 - 3X + 1 \Rightarrow$  خارج القسمة

$$\forall f(X) = (X - 2)Q(X)$$

(د) أوجد المعادلة التي تزيد جذورها بمقدار 2 عن جذور المعادلة

$$f(X) = X^4 + 6X^3 + 12X^2 + 11X + 1$$

$$\begin{array}{r} -2 \quad 1 \quad 6 \quad 12 \quad 11 \quad 1 \\ \phantom{-2} \quad \phantom{1} \quad -2 \quad -8 \quad -8 \quad -6 \\ -2 \quad 1 \quad 4 \quad 4 \quad 3 \quad -5 = R_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -2 \quad 1 \quad 2 \quad 0 \quad 3 = R_2 \\ \phantom{-2} \quad \phantom{1} \quad -2 \quad 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -2 \quad 1 \quad 0 \quad 0 = R_3 \\ \phantom{-2} \quad \phantom{1} \quad -2 \end{array}$$

$$1 - 2 = R_4, \quad Qn = 1$$

$$\therefore g(y) = y^4 - 2y^3 + 3y - 5$$

وبوضع  $y = X + 5$

$$F(X) = (X + 5)^4 - 2(X + 5)^3 + 3(X + 5) - 5$$

(أ) استخدم طريقة نيوتن لتعيين حلول تقريبية للمعادلة الآتية

$$F(X) = X^3 + X - 1$$

\* نبحث وجود حل للدالة عند  $[0, 1]$  حيث  $f(0)f(1) < 0$

**الحل:**

$$X_0 = \frac{1-0}{2} = .5, f'(X) = 3X^2 + 1$$

$$X_1 = X_0 - \frac{f(X_0)}{f'(X_0)} = .5 - \frac{.375}{1.75} = .714$$

$$X_2 = X_1 - \frac{f(X_1)}{f'(X_1)} = .714 - \frac{.077}{-2.529} = .683$$

$$X_3 = X_2 - \frac{f(X_2)}{f'(X_2)} = .683 - \frac{.0016}{2.399} = .682$$

∴ الحل التقريبي للمعادلة هو 0.682

(ب) حل المعادلة  $X^3 - 9X + 28 = 0$

**الحل:**

نستخدم طريقة كاردان مباشرة نعين المميز

$$\Delta = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3 > 0$$

∴ يوجد للمعادلة جذر حقيقي وجذران تخيليان .

نحل المعادلة

$$m^2 + bm - \left(\frac{a}{3}\right)^3 = 0$$

$$m^2 + 28 + 27 = 0$$

$$m_1 = -1, \quad m_2 = (-3)^3$$

$$L = 3\sqrt{m_1} = 1, \quad n = 3\sqrt{-27} = -3$$

$$L + n = -4$$

∴ الجذور للمعادلة هي

$$(-4, \quad -\omega - 3\omega^2, \quad -3\omega - \omega^2)$$

$$\omega = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad \omega^2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j$$

∴ جذور المعادلة هي

$$(-4, 2 + \sqrt{3}i, 2 - \sqrt{3}i)$$

$$X^4 + 4X^3 - 6X^2 + 20X + 8 = 0 \quad \text{(ج) حل المعادلة}$$

باستخدام طريقة فراري

$$X^4 + 4X^3 = 6X^2 - 20X - 8$$

$$(X^2 + 2K + L)^2 = (10 + 2L)X^2 + (4L - 20)X + (L^2 - 8)$$

$$= (mX + n)^2$$

$$(10 + 2L)(L^2 - 8) = (2L - 10)^2$$

$$L^3 + 3L^2 + 12L - 20 = 0$$

وبالتخمين  $L = 3$  ومنها

$$m = 4, \quad n = -1$$

$$(X^2 + 2X + 3)^2 = (4X - 1)^2$$

$$X^2 + 2X + 3 = |4X - 1|$$

$$X^2 + 2X + 3 = 4X - 1 \quad X^2 + 2X + 3 = 4X + 1$$

$$X = 1 \pm \sqrt{3}i$$

$$X = -3 \pm \sqrt{7}$$

وعلى ذلك فإن جذور المعادلة الأربعة هي

$$(1 \pm \sqrt{3}i, \quad -3 \pm \sqrt{7})$$

(د) أوجد مفكوك  $(1 - 2X)^6$

الحل:

$$(1-2X)^6 = 1 + 6(-2X) + \frac{(6)(5)}{2!}(-2X)^2 + \frac{(6)(5)(4)}{3!}(-2X)^3 + \frac{(6)(5)(4)(3)}{4!}(-2X)^4 + \frac{(6)(5)(4)(3)(2)}{5!}(-2X)^5 + (-2X)^6$$

$$(1-2X)^6 = 1 - 12X + 60X^2 - 160X^3 - 24X^4 - 192X^5 + 64X^6$$

( أ ) اختبر المتتابعة التالية من حيث التقارب والتباعد

$$\{Z_n\} = 1 + \frac{2}{n}$$

الحل:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{2}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} = 1$$

∴ المتتابعة متقاربة من [1] فهي نحقق الشرط

$$|Z_n - c| = \left| 1 + \frac{2}{n} - 1 \right| = \left| \frac{2}{n} \right| \geq \varepsilon_0$$

(ب) اختبر المتسلسلة الآتية من حيث كونها متقاربة أو متباعدة

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{\frac{1}{n-1}}$$

الحل:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{\frac{1}{n-1}} = \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots$$

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

وهي عبارة عن متتابعة هندسية أساسها  $\frac{1}{2}$  وحدها الأول 1

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 2 \quad \leftarrow \text{مجموعها}$$

∴ المتسلسلة متقاربة ومجموعها 2 .

(ج) أوجد المعكوس  $A^{-1}$  للمصفوفة  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

الحل:

$$\therefore A^{-1} = \frac{adjA}{\det A}$$

$$\det A = (3)(4) - (1)(2) = 10$$

$$adjA = adj \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} .4 & -.1 \\ -.2 & .3 \end{pmatrix}$$

\* \* \*

# إجابة امتحان التخلّفات 2007

السؤال الأول:

بقسمة الطرفين إلى النهاية على  $(x-2)$

2	2	-3	4	-	6
	0	4	2	5	14
				12	
2	2	1	6	7	$20=R_1$
	0	4	10		
				32	
2	2	5	16		
	0	4	18		$39=R_2$
2	2	9			$34=R_3$
	0	4			
	$Q_n=2$				$13=R_4$

فتكون الدالة الجديدة التي تنقص جذورها بمقدار 2 هو

$$G(x)=2y^4+13y^3+34y^2+39y+20$$

بوضع  $y=x-2$

$$F(x)=2(x-2)^4+13(x-2)^3+34(x-2)^2+39(x-2)+20$$

(ب)

$$\frac{2x+3}{x^2-2x-3} = \frac{2x-3}{(x-3)(x+1)} = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x-1}$$

$$2x+3=a(x+1)+b(x+3)$$

$$\text{At } x=-1 \quad -2+3 = 0 + b \times -4$$

$$b=-0.25$$

$$6+3 = a \times 4 + 0 \therefore \text{At } x=3$$

$$a=2.25$$

$$\frac{2x+3}{x^2-2x-3} = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x+1}$$

(c)

$$\text{At } n=1 \quad \text{l.h.s.} = 1^3 = 1 \quad \text{r.h.s.} = 1^2(2 \times 1^2 - 1) = 1$$

$$\text{l.h.s.} = \text{r.h.s.}$$

$$\text{At } n=2 \quad \text{l.h.s.} = 3^3 + 1^3 = 28 \quad \text{r.h.s.} = 2^2(2 \times 2^2 - 1) = 28$$

$$\text{L.H.S} = \text{R.H.S}$$

$$\text{At } n=3 \quad \text{L.H.S.} = 1^3 + 3^3 + 5^3 = 153 \quad \text{R.H.S.} = 3^2(2 \times 3^2 - 1) = 153$$

$$\text{L.H.S.} = \text{R.H.S}$$

$$\text{At } n=k \quad 1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2k-1)^3 = k^2(2k^2-1)$$

$$\text{At } n=k+1 \quad 1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2k-1)^3 + (2k+1)^3 = (k+1)^2(2(k+1)^2-1)$$

$$k^2(2k^2-1) + (2k+1)^3 = (k+1)^2(2(k+1)^2-1)$$

$$\text{L.H.S.} = 2k^4 + 8k^3 + 4k^3 + 6k + 1 = (k+1)^2(2(k+1)^2-1) = \text{R.H.S.}$$

(d)

$$2x-1=2(x-0.5)$$

0.5	1	-3	4	1	5
	0	0.5	-5/4	11/8	19/16
	1	-5/2	11/4	19/8	R <sub>1</sub> =99/16

$$\frac{99}{16} R =$$

$$Q(X) = 2(X^3 - \frac{5}{2}X^2 + \frac{11}{4}X + \frac{19}{8})$$

## السؤال الثاني:

أ - نختار الفترة

لذلك  $F(0.5) = -0.375$  ,  $f(1)=1$  لأن  $(0.5,1)$

$$= 0.64 = c \frac{0.5 \times 1 - 1 \times (-0.375)}{1 - (-0.375)} = \frac{a_1 F(b_1) - b_1 f(a_1)}{F(b_1) - f(a_1)} X_1 =$$

فتكون الفترة الجديدة  $(0.64,1)$

$$X_2 = \frac{a_{n+1} f(b_n) - b_n f(a_{n+1})}{f(b_n) - f(a_n)} = 0.64 \times 1 - 1 \times 0.0496 / 1 - 0.0496 = 0.672 = c$$

$$F(c) = f(a_{n+2}) = F(0.672) = 0.124$$

وعلى ذلك تكون الفترة الجديدة  $(0.67,1)$

$$x_3 = \frac{a_{n+2} f(b_n) - b_n f(a_{n+2})}{f(b_n) - f(a_{n+2})} = 0.672 \times 1 - 1 \times 0.124 / 1 - 0.124 = 0.674$$

So the root is 0.674

(ب)

$$A = -9 \quad b = 28$$

$$0 \Rightarrow (b/2)^2 + (a/3)^3 = 14^2 - 3^3 \Delta$$

$$\therefore m^2 + 28m + 27 = 0$$

$$m_1 = 1 \quad l = m^{1/3} = 1$$

$$m_2 = 27 \quad n = m_2^{1/3} = 3$$

$$\text{Roots are } l+n, lw + nw^2, nw + lw^2$$

$$4, w + 3w^2, w^2 + 3w$$

$$\sqrt{3}l, -2 + \sqrt{3}l, -2 -$$

(ج)

$$A=4, b=-6, c=20, d=8$$

$$X^4 + 4X^3 = 6X^2 - 20X - 8$$

$$(x^2 + 2x + L)^2 = x^4 + 4x^3 + (10 + 2L)x^2 + L^2 + 4Lx$$

$$(x^2 + 2x + L)^2 = (10 + 2L)x^2 + (4L - 20)x + L^2 - 8 = (m x +$$

$$n)^2 = m^2x^2 + 2mnx + n^2$$

وبمقارنة المعاملات

$$m^2=2(5+L) \quad , \quad 2mn=2(2L-10) \quad ,$$

$$n^2=L^2-8$$

$$mn=2L-10$$

$$m^2n^2=(2L-10)^2$$

و بالتعويض

$$L^3+3L^2+12L-90=0$$

L=3 بالتخمين

$$. m^2=16 \quad , \quad mn=4 \quad , \quad n^2=1$$

$$. m=\pm 4 \quad , \quad n=\pm 1$$

$$(x^2+2x+L)^2 = (mx+n)^2$$

$$(x^2+2x+3)^2=(4x-1)^2 \quad \quad \quad x^2+2x+3=\pm(4x-1)$$

$$x^2+2x+3=4x-1$$

$$x^2+2x+3=-(4x-1)$$

$$x^2-2x+4=0$$

$$x^2+6x+2=0$$

$$\sqrt{7l}$$

$$x=-3\pm\sqrt{3l} \quad x=1\pm$$

و تكون الجذور هذه

السؤال الثالث:

(ب)

باستخدام اختبار المقارنة لأن درجة البسط أقل من درجة المقام

$$\frac{1}{n} \quad \quad \quad b_n = \frac{n+2}{n^2} \quad A_n =$$

$$\sum_n^\infty = 1 \frac{1}{n} . \quad \text{والمتسلسلة متباعدة}$$

وبما أن

$$\frac{1}{n} \geq \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n} = \frac{n+2}{n^2}$$

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{n} \geq \sum_n^{\infty} = 1 \frac{n+2}{n^2}$$

متباعدة فإن

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^2}$$

متباعدة هي الأخرى

(د) بفرض أن الفترة التي يوجد بها الحل هي

(1,2)

ثم نعين نقطة البداية

$$\frac{b+a}{2} X_o =$$

$$= 1.347 \frac{1.875}{12.25} = 1.5 - \frac{3x^3 + x^2 - 11x + 6}{9x^2 + 2x - 11} = 1.5 - \frac{f(x_o)}{f'(x_o)} X_1 = x_o -$$

$$= 1.306 \frac{0.329}{8.024} = 1.347 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} X_2 = x_1 -$$

$$= 1.302 \frac{0.0223}{6.96} = 1.306 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} X_3 = x_2 -$$

The root is 1.302

\* \* \*

# References

1. Peter H. Selby, Steve Slavin, *Practical Algebra: A Self-Teaching Guide, 2nd Edition*, Wiley, ISBN-10 0471530123 ISBN-13 978-0471530121
2. Gilbert Strang, *Linear Algebra and its Applications, Fourth Edition*, Thompson Brooks/Cole, ISBN 0030105676.
3. Howard Eves, *An Introduction to the History of Mathematics, Sixth Edition*, Saunders, ISBN 0030295580
4. R. Birkeland. Über die Auflösung algebraischer Gleichungen durch hypergeometrische Funktionen. *Mathematische Zeitschrift* vol. 26, (1927) pp. 565-578. Shows that the roots of any polynomial may be written in terms of multivariate hypergeometric functions.
5. K. Mayr. Über die Auflösung algebraischer Gleichungssysteme durch hypergeometrische Funktionen. *Monatshefte für Mathematik und Physik* vol. 45, (1937) pp. 280-313.
6. H. Umemura. Solution of algebraic equations in terms of theta constants. In D. Mumford, *Tata Lectures on Theta II*, Progress in Mathematics 43, Birkhäuser, Boston, 1984.
7. George Gheverghese Joseph, *The Crest of the Peacock: Non-European Roots of Mathematics* (Penguin Books, 2000).
8. John J O'Connor and Edmund F Robertson, *MacTutor History of Mathematics archive* (University of St Andrews, 2005).
9. I.N. Herstein: *Topics in Algebra*. ISBN 0-471-02371-X
10. R.B.J.T. Allenby: *Rings, Fields and Groups*. ISBN 0-340-54440-6
11. L. Euler: *Elements of Algebra*, ISBN 978-1-89961-873-6

## Linear Algebra: Elementary

12. Anton, Howard. *Elementary Linear Algebra*, New York, NY: John Wiley, 1973, 1991. Sixth Edition.
13. Banchoff, Thomas F. and Wermer, John. *Linear Algebra Through Geometry* New York, NY: Springer-Verlag, 1983.
14. Bloom, David M. *Linear Algebra and Geometry* New York, NY: Cambridge University Press, 1979.

15. Curtis, Charles W. *Linear Algebra: An Introductory Approach*, New York, NY: Springer-Verlag, 1984. Fourth Edition.
16. Damiano, David B. and Little, John B. *A Course in Linear Algebra* San Diego, CA: Harcourt Brace Jovanovich, 1988.
17. Fraleigh, John B. and Beauregard, Raymond A. *Linear Algebra*, Reading, MA: Addison-Wesley, 1990. Second Edition.
18. Greub, Werner. *Linear Algebra*, New York, NY: Springer-Verlag, 1975. Fourth Edition.
19. Grossman, Stanley I. *Elementary Linear Algebra*, Philadelphia, PA: Saunders College, 1980, 1991. Fourth Edition.
20. Jacob, Bill. *Linear Algebra* New York, NY: W.H. Freeman, 1990.
21. Kumpel, P.G. and Thorpe, John A. *Linear Algebra with Applications to Differential Equations* Philadelphia, PA: Saunders College, 1983.
22. Lang, Serge. *Introduction to Linear Algebra*, New York, NY: Springer-Verlag, 1986. Second Edition.
23. Leon, Steven J. *Linear Algebra with Applications*, New York, NY: Macmillan, 1980, 1986. Third Edition.
24. Lipschutz, Seymour. Schaum's Solved Problems Series: 3000 Solved Problems in Linear Algebra New York, NY: McGraw-Hill, 1989.
25. Noble, Ben and Daniel, James W. *Applied Linear Algebra*, Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1969, 1988. Third Edition.
26. O'Nan, Michael and Enderton, Herbert B. *Linear Algebra*, San Diego, CA: Harcourt Brace Jovanovich, 1990. Third Edition.
27. Rorres, Chris and Anton, Howard. *Applications of Linear Algebra*, New York, NY: John Wiley, 1977, 1984. Third Edition.
28. Rothenberg, Ronald I. *Linear Algebra with Computer Applications* New York, NY: John Wiley, 1983.
29. Smith, Larry. *Linear Algebra* New York, NY: Springer-Verlag, 1978.
30. Strang, Gilbert. *Linear Algebra and Its Applications*, San Diego, CA: Harcourt Brace Jovanovich, 1988. Third Edition.
31. Towers, David A. *Guide to Linear Algebra* Houndmills, England: Macmillan Education, 1988.
32. Tucker, Alan. *A Unified Introduction to Linear Algebra: Models, Methods, and Theory* New York, NY: Macmillan, 1988.

## **Linear Algebra: Advanced**

33. Brown, William C. *A Second Course in Linear Algebra* New York, NY: John Wiley, 1988.
34. Dieudonne, Jean. *Linear Algebra and Geometry* Boston, MA: Houghton Mifflin, 1969.
35. Halmos, Paul R. *Finite-Dimensional Vector Spaces* New York, NY: Springer-Verlag, 1968, 1974.
36. Herstein, I.N. and Winter, David J. *Matrix Theory and Linear Algebra* New York, NY: Macmillan, 1968, 1988.
37. Hoffman, Kenneth and Kunze, Ray. *Linear Algebra*, Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1971. Second Edition.
38. Jarvinen, Richard D. *Finite and Infinite Dimensional Linear Spaces: A Comparative Study in Algebraic and Analytic Settings* New York, NY: Marcel Dekker, 1981.
39. Kaplansky, Irving. *Linear Algebra and Geometry: A Second Course* New York, NY: Chelsea, 1974.
40. Lang, Serge. *Linear Algebra*, New York, NY: Springer-Verlag, 1987. Third Edition.
41. Shilov, G.E. *Linear Algebra* Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1971.

## **Linear Algebra: Matrix Theory**

42. Berman, Abraham and Plemmons, Robert J. *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences* New York, NY: Academic Press, 1979.
43. Davis, Philip J. *Circulant Matrices* New York, NY: John Wiley, 1979.
44. Gantmacher, Felix. *Matrix Theory*, New York, NY: Chelsea, 1959. 2 Vols.
45. Graybill, Franklin A. *Introduction to Matrices with Applications in Statistics* Belmont, CA: Wadsworth, 1969.
46. Horn, Roger A. and Johnson, Charles R. *Matrix Analysis* New York, NY: Cambridge University Press, 1985.
47. Householder, Alston S. *The Theory of Matrices in Numerical Analysis* New York, NY: Blaisdell, 1964.
48. Iohvidov, I.S. *Hankel and Toeplitz Matrices and Forms: Algebraic Theory* New York, NY: Birkhauser, 1982.
49. Johnson, Charles R., ed. *Matrix Theory and Applications* Providence, RI: American Mathematical Society, 1990.

50. Lancaster, Peter and Tismenetsky, Miron. *The Theory of Matrices*, New York, NY: Academic Press, 1985. Second Edition with Applications.
51. Marcus, Marvin and Minc, Henryk. *Survey of Matrix Theory and Matrix Inequalities* Boston, MA: Allyn and Bacon, 1964.
52. Minc, Henryk. *Nonnegative Matrices* New York, NY: John Wiley, 1988.
53. Muir, Thomas. *A Treatise on the Theory of Determinants* Mineola, NY: Dover, 1933.
54. Newman, Morris. *Integral Matrices* New York, NY: Academic Press, 1972.
55. Perlis, Sam. *Theory of Matrices* Reading, MA: Addison-Wesley, 1952.
56. Pullman, N.J. *Matrix Theory and its Applications: Selected Topics* New York, NY: Marcel Dekker, 1976.
57. Wedderburn, J.H.M. *Lectures on Matrices* Mineola, NY: Dover, 1934, 1964.
  
58. Campbell, S.L. and Meyer, C.D., Jr. *Generalized Inverses of Linear Transformations* Brooklyn, NY: Pitman, 1979.
59. Goodbody, A.M. *Cartesian Tensors: With Applications to Mechanics, Fluid Mechanics and Elasticity* New York, NY: Halsted Press, 1982.
60. Greub, Werner. *Multilinear Algebra*, New York, NY: Springer-Verlag, 1978. Second Edition.
61. Roman, Steven. *The Umbral Calculus* New York, NY: Academic Press, 1984.
62. G. H. Golub, C. F. Van Loan, *Matrix Computations* (3rd Ed, 1996), Johns Hopkins University Press, ISBN 0-8018-5414-8.

\* \* \*