الباب الثالث

الكسورالجـزئيــة

Partial Fraction

تعريف:

كثيرة الحدود : يقال على الدالة التي لها الصورة

$$F(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 , \quad a_0 \neq 0$$

- كثيرة حدود من الدرجة n حيث n عدد صحيح غير سالب.
- **الكسر الجبري القياسي:** هو خارج قسمة كثيرتي الحدود.
- P(x), Q(x) أي أن الكسر الجبري القياسي له الشكل العام:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}, \ldots\ldots\ldots Q(x) \neq 0$$

- إذا كانت درجة البسط أكبر من درجة المقام يـ.سمى **كـ.سرا غيـ.ر حقيقيا**(والعكس صحيح) ويكتب على الصورة

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = q(x) + \frac{h(x)}{Q(x)}$$

حيث درجة h(x) أقل من درجة Q(x)

حالات الكسور الجزئية

- **الحالة الأولى:**

إذا كان المقام عبارة عن أقواس من الدرجة الأولـ.ى أو معـ.ادلات تربيعية قابلة للتحليل تكون طريقة الحل كما هو مبين:

$$\frac{F(x)}{(x-a)(x-b)(x-c).....(x-n)}=$$

$$=\frac{A}{(x-a)}+\frac{B}{(x-b)}+...+\frac{N}{(x-n)}$$

وبعد ذلك نقوم بضرب طرفي المعادلة في المقام

(x-a)(x-b)...(x-n)

فنحصل على

F(x) = A(x-b)(x-c)….(x-n) + B(x-a).
(x-c)….(x-n)+…+ N(x-a)(x-b)(x-c)...(x-m)

وبعد ذلك نوجد قيمة A,B,C,…., N عن طريق مساواة المعاملات

أو عن طريق فرض قيم الx والحصول على معادلات في الثوابت.

أمثلة

مثال1:

باستخدام الكسور الجزئية حلل الكسر الآتي:

$$\frac{5x+2}{(x+2)(3x+2)}$$

الحل:

أولا نتأكد أن درجة البسط أقل من درجة المقام وهذا متحقق وثانيـ.ا شكل الكسر من النوع الأول

$$\frac{5x+2}{(x+2)(3x+2)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{3x+2}$$

بعد ذلك نقوم بالضرب في المقـ.ام (x+2)(3x+2) أو بمعنـ.ى توحيـ.د

المقامات ينتج أن:

$$5x+2=A(3x+2)+B(x+2)$$

هناك طريقتين لتعيين قيمة الثوابت ولكن نحن س. نتبع عملي.ة م. ساواة المعاملات:

X: $5 = 3A + B$

الحد المطلق: $2 = 2A + 2B$

or $1 = A + B$

بحل المعادلتان ينتج أن $A = 2$ and $B = (-1)$ أي أن الكسر الأساسي هو:

$$\frac{5x+2}{(x+2)(3x+2)}=\frac{2}{x+2}-\frac{1}{3x+2}$$

مثال2 :

باستخدام الكسور الجزئية حلل الكسر الآتي:

$$\frac{2x+3}{x^2-2x-3}$$

الحل:

أولا درجة البسط أقل من درجة المقام ثانيا واضح أن المقام عبارة ع.ن معادلة تربيعية قابلة للتحليل لذلك هي تتبع الحالة الأولى وحلها كما يلي:

$$\frac{2x+3}{x^2-2x-3}=\frac{2x+3}{(x-3)(x+1)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+1}$$

وبضرب طرفي المعادلة في المقام أو بتوحيد المقامات

$$2x+3=A(x+1)+B(x-3)$$

وعن طريق مساواة المعاملات ينتج

X: $2 = A + B$

الحد المطلق: $\mathbf{3 = A-3B}$

بحل هاتين المعادلتين ينتج أن:

ويكون الحل النهائي $\quad A = (9/4) \quad \text{and} \quad B = (-1/4)$

$$\frac{2x+3}{x^2-2x-3} = \frac{2x+3}{(x-3)(x+1)} = \frac{9/4}{x-3} - \frac{1/4}{x+1}$$

مثال3 :

باستخدام الكسور الجزئية حلل الكسر الآتي:

$$\frac{x^2}{(x-2)(x+3)}$$

الحل:

أولا درجة البسط تساوي درجة المقام لذالك نقوم بعملية اختصار أو قسمة مطولة وذلك لجعل درجة البسط أقل من درجة المقام ثانيا المقام عبارة عن الحالة الأولى

$$\begin{array}{r|l} & \quad\quad 1 \\ \hline x^2+x-6 & x^2 \\ & \underline{x^2+x-6} \end{array}$$

$$\therefore \frac{x^2}{(x-2)(x+3)} = 1 + \frac{-x+6}{(x-2)(x+3)}$$

وبعد ذلك نقوم بتحليل الكسر الجديد والذى يتحقق فيه أن درجة البسط أقل من درجة المقام:

$$\frac{-x+6}{(x-2)(x+3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+3}$$

وبالضرب في المقام أو بتوحيد المقامات:

$$-x+6=A(x+3)+B(x-2)$$

وبمساواة المعاملات:

X^1: $-1 = A + B$

X^0 الحد المطلق: $6 = 3A - 2B$

وبحل المعادلتان ينتج أن:

A = (4/5),
B = (-9/5)

ويكون الحل هو

$$\therefore \frac{x^2}{(x-2)(x+3)}=1+\frac{-x+6}{(x-2)(x+3)}=1+\frac{4/5}{x-2}-\frac{9/5}{x+3}$$

• الحالة الثانية:

- إذا كان المقام عبارة عن أقواس من الدرجة الأولـ.ى أو مع.ادلات تربيعية قابلة للتحليل مكررة تكون طريقة الحل كما هو مبين:

$$\frac{f(x)}{(x-a)^n(x-b)^m}$$

$$=\frac{A}{(x-a)}+\frac{B}{(x-a)^2}+\dots+\frac{N}{(x-a)^n}+\frac{C}{(x-b)}+$$

$$+\frac{D}{(x-b)^2}\dots+\frac{M}{(x-b)^m}$$

مثال4:

باستخدام الكسور الجزئية حلل الكسر الآتي

$$\frac{2x^2}{(x-1)^3(x+1)}$$

أولا: درجة البسط أقل من درجة المقام

ثانيا: المقام عبارة عن الحالة الأولى والثانية

$$\frac{2x^2}{(x-1)^3(x+1)}=\frac{A}{(x+1)}+\frac{B}{(x-1)}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{(x-1)^3}$$

وبعد ذلك نقوم بتوحيد المقامات

$$2x^2 = A(x-1)^3 + B(x+1)(x-1)^2 +$$
$$+C(x+1)(x-1)+D(x+1)$$

وبمساواة المعاملات

X^3: $0 = A + B$ (1)

X^2: $2 = +3A - B + C$ (2)

X^1: $0 = +3A - B + D$ (3)

الحد المطلق: $4=-A + B - C + D$ (4)

بجمع المعادلة (2) و(4) ينتج

$4 = -4A + D$

ثم بجمع المعادلة (1) و(3) ينتج

$0= 4A+D$

بحل هاتين المعادلتان ينتج أن $A = -2$ وبالتعويض ينتج

$D = 2$ وبالتعويض في (1) ينتج $B =1/2$ والتعويض في (2) ينتج

$C = 1$

ويكون الحل النهائي

$$\frac{2x^2}{(x-1)^3(x+1)}=\frac{-1/2}{(x+1)}+\frac{1/2}{(x-1)}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{4}{(x-1)^3}$$

• الحالة الثالثة:

إذا كان المقام عبارة عن أقواس من الدرجة الثانية الغير قابلـة للتحليل. تكون طريقة الحل كما هو مبين:

$$\frac{F(x)}{(x^2+ax+b)(x^2+c)..(x^2+d)}=$$

$$=\frac{Ax+B}{(x^2+ax+b)}+\frac{Cx+D}{(x^2+c)}+...+\frac{Nx+M}{(x^2+d)}$$

وبعد ذلك نتبع نفس الخطوات المذكورة في الحالة الأولى.

مثال 5 :

باستخدام الكسور الجزئية حلل الكسر الآتي:

$$\frac{x^2+15}{(x-1)(x^2+2x+5)}$$

الحل:

- أولا واضح أن درجة البسط أقل من درجة المقام:
- ثانيا المقام يحتوي على معادلة من الدرجة الثانية غير قابلة للتحليل. وهناك دمج بين الحالة الأولى والثالثة ويكون الحل كما يلي:

$$\frac{x^2+15}{(x-1)(x^2+2x+5)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+5}$$

وبتوحيد المقامات ينتج أن

$$x^2+15=A(x^2+2x+5)+(Bx+C)(x-1)$$

وبمساواة المعاملات

X^2: $1 = A + B$
X^1: $0 = 2A - B + C$
الحد المطلق: $15 = 5A - C$

بجمع الثلاث معادلات ينتج أن $A = 2$ وبالتعويض في المعادلة الأولـ.ى والثالثة ينتج أن $B=-1$, $C=-5$

$$\frac{x^2+15}{(x-1)(x^2+2x+5)} = \frac{2}{x-1} - \frac{x+5}{x^2+2x+5}$$

• الحالة الرابعة:

- إذا كان المقام عبارة عن أقواس من الدرجة الثانية الغيـ.ر قابلـ.ة للتحليل ومكررة تكون طريقة الحل كما هو مبين:

$$\frac{f(x)}{(x^2+ax+b)^n(x^2+c)^m} =$$

$$= \frac{Ax+B}{(x^2+ax+b)} + \frac{Cx+D}{(x^2+ax+b)^2} + \ldots$$

$$+ \frac{Nx+M}{(x^2+ax+b)^n} + \ldots$$

وبعد ذلك نتبع نفس الخطوات المذكورة في الحالة الأولى.

مثال6 :

باستخدام الكسور الجزئية حلل الكسر الآتي:

$$\frac{1}{x(x^2+1)^2}$$

الحل:

أولا: درجة البسط أقل من درجة المقام.

ثانيا: يوجد معادلة تربيعية غير قابلة للتحليل مكرر أي دمج بين الحالـة الأولى والرابعة.

$$\frac{1}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$$

وبتوحيد المقامات ينتج أن

$$1 = A(x^2+1)^2 + (Bx+C)(x)(x^2+1) +$$
$$+ (Dx+E)(x)$$

وبمساواة المعاملات:

X^4:	0 = A + B	(1)
X^3:	0 = C	(2)
X^2:	0 = 2A + B + D	(3)
X^1:	0 = C + E	(4)
X^0 الحد المطلق:	1= A	(5)

من المعادلة (2) و(4) نستنتج أن C = E =0

ومن المعادلة (5) نستنتج أن A = 1

وبالتعويض في المعادلة (1) ينتج B =-1

وبالتعويض في المعادلة (3) ينتج D=-1

وعلى ذلك يكون الكسر الأساسي هو:

$$\frac{1}{x(x^2+1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} - \frac{x}{(x^2+1)^2}$$

* * *

تمارين

حلل كلا من الكسور التالية:

1) $\dfrac{2x+3}{(x+1)(x-3)}$ 2) $\dfrac{2x^2+10x-2}{(x+1)(x^2-9)}$

3) $\dfrac{4x^2+2x+4}{(2x+3)^3}$ 4) $\dfrac{1}{(x-1)(x^2+x-4)}$

5) $\dfrac{x^2+2x+5}{(2x^2+6x+7)^2}$

6) أوجد مجموع من الحدود

$$\frac{1}{1(5)}+\frac{1}{5(9)}+\frac{1}{9(12)}+\dots\dots\dots$$

ملاحظة:

(في هذا المثال نكتب الصورة العامة لهذه المتسلسلة على صورة $\dfrac{1}{(4n-3)(4n+1)}$ ثم نقوم بتحليل هذا باستخدام الكسور الجزئية)

* * *