الباب الرابع

المتتابعات والمتسلسلات

Sequences and infinite series

أولا: المتتابعة: Sequence

تعاريف:

1) المتتابعة:

إذا كان لكل عدد طبيعي n يوجد عدد Z_n فإن هذه الأعداد

$\mathbf{Z_1, Z_2 ......, Z_N}$

تسمى متتابعة لا نهائية والعدد $\mathbf{Z_N}$ يسمى عنصر من عناصر المتتابعة وللاختصار نكتبها على الصورة $\{\mathbf{Z_n}\}$

2) تقارب المتتابعة:

يقال: إن المتتابعة $\{Z_n\}$ متقاربة **Convergence** إذا وجد عدد C وله الخواص التالية:

أنة لكل عدد موجب ε (ابسلن يمكن أن يكون صغيرا صـ.غرا كافيـ.ا ولكنة لا يساوي الصفر) يمكن إيجاد عدد طبيعى N بحيث أن

$$\left|Z_n - C\right| \le \varepsilon, \forall n \ge N \tag{1}$$

حيـ.ث تـ.سمى **نهايـ.ة المتتابعـ.ة** ويمكـ.ن كتابتهـ.ا علـ.ى الـ.صورة

$$\lim_{n\to\infty} Z_n = C$$

أو بمعنى آخر

at $Z_n \to C$

عندما $(n \to \infty)$ وتكون المتسلسة **متباعـ.دة Divergent** إذا لـ.م

يتحقق هذا الشرط.

أمثلة

مثال1 :

اختبر المتتابعة التالية من حيث التقارب والتباعد:

$$1)\ \{Z_n\} = 1 + \frac{2}{n}$$

الحل:

الطريقة الأولى للحل:

يمكن حل هذا المثال بمجرد أننا إذا أخذنا نهاية المقدار عندما n تؤول إلى ∞ يكون الناتج 1 فتكون متقاربة

$$\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{2}{n}) = 1$$

الطريقة الثانية للحل:

وذلك عن طريق ملاحظة أنه كلمـ.ـا اقتربـ.ـت n مـ.ـن ∞ تقتـ.ـرب المتتابعة من العدد 1 فتكون متقاربة، فمن المعادلة (1)

$$|Z_n - c| = \left|1 + \frac{2}{n} - 1\right| = \left|\frac{2}{n}\right| \le \varepsilon, \Rightarrow n \ge \frac{2}{\varepsilon}$$

كمثال إذا أخذنا القيمة $\varepsilon = 0.01$ فيكون $\frac{2}{n} \rangle 0.01$

عندما **n < 200**

فتكون المتتابعة متقاربة من العدد 1 .

مثال 2: اختبر المتتابعة التالية من حيث التقارب والتباعد:

$$Z_n = \{ \frac{n}{n+1} \}$$

الحل:

المتتابعة $\{ \frac{n}{n+1} \}$ متقاربة وتتقارب إلى العدد "1" ومن المعادلة (1) نجد أن

$$Z_n - C = \frac{n}{n+1} - 1 = \frac{-1}{n+1}$$

$$\left|Z_n - c\right| = \left|\frac{-1}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{1}{n+1}\right| \langle \varepsilon,$$

$$\frac{n+1}{1} \rangle \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n+1 \rangle \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n \rangle \frac{1}{\varepsilon} - 1$$

وبالتالي نختار العدد N وهو أصغر عدد صحيح أكبر م.ن $\frac{1}{\varepsilon} - 1$.

كمثال إذا كانت $\varepsilon = 0.01$ فإن

$\frac{1}{\varepsilon} - 1 = 99$ إذن N=99 فالمتتابعة متقاربة من العدد 1 .

تمارين

اختبر تقارب أو تباعد المتتابعات:

$$1)\ \{Z_n\} = \frac{2n^2}{n+1}$$

$$2)\ \{Z_n\} = \frac{1}{n-3}$$

$$3)\ \{Z_n\} = \frac{-1}{n-3}$$

ثانيا: المتسلسلات Series

هناك ثلاث أنواع من المتسلسلات:

أ) متسلسلة عادية.

ب) متسلسلة متبادلة الإشارة.

ج) متسلسلة القوى.

أ) المتسلسلة العادية

تعاريف

1- المتسلسلة:

إذا كانت $\{w_1, w_2, \ldots\ldots, w_n\}$ متتابعة لا نهائية من الأعداد سواء كانت حقيقية أو مركبة فإن المقدار

$$\sum_{n=1}^{\infty} w_n = w_1 + w_2 + w_3 \qquad \ldots(1)$$

يسمى بالمتسلسلة اللانهائية infinite series

أما مجموع n من الحدود الأولى S_n حيث

$$S_n = w_1 + \ldots\ldots + w_n$$

يسمى هذا التعبير "المجموع الجزئي النوني"

فتتكون لدينا المتتابعة على الشكل $\{S_1, S_2 \ldots, S_n\}$

2- تقارب المتسلسلات وتباعدها:

1) إذا كانت هذه المتتابعة متقاربة بمعنى

$$\lim_{n\to\infty}(S_n) = S$$

فإنه يقال: إن المتسلسلة (1) متقاربة **Converge** ويكـ.ون مجموعه.ا يساوي S أي أن

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} w_n = w_1 + w_2 + \dots$$

2) إذا كانت:

$$\lim_{n\to\infty}(S_n) = \infty$$

فأن المتسلسلة اللانهائية تكون متباعدة **Divergent** .

3) إذا كانت S_n تذبذبية **(Oscillating)** محدودة فهي تكون تباعدية.

4) إذا كانت S_n تذبذبية بين $-\infty, \infty$ فإن المتسلسلة تذبذبية غير محدودة وهي تباعدية.

مثال3:

اختبر المتسلسلة اللانهائية:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots\dots(1)$$

الحل:

المجموع الجزئي النوني S_n للمتسلسلة (1) هو

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2 + \dots + (\frac{1}{2})^{n-1}$$

هذه متوالية هندسية حدها الأول 1 وأساسها $\frac{1}{2}$

وعدد حدودها n فيكون مجموعها

$$S_n = \left(\ 1-(\frac{1}{2})^n\ \right)/\left(\ 1-(\frac{1}{2})\ \right) = 2-\frac{1}{2^{2-1}}$$

وبناء على التعريف المعطى يكون مجموع المتسلسلة (1) هو

$$S = \lim_{n\to\infty}(S_n) = Lim_{n\to\infty}(2-\frac{1}{2^{n-1}}) = 2$$

وعليه فإن المتسلسلة (1) تقاربية ومجموعها يساوي 2

مثال4:

اختبر المتسلسلة اللانهائية

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = 1+2+\ldots+n+\ldots\ldots(1)$$

الحل:

المتسلسلة (1) عبارة عن متوالية عددية فنجد أن S_n هو

$$S_n = 1+2+\ldots+ = \frac{n(n+1)}{2}$$

وبالتالي فإن مجموع المتسلسلة (1) هو:

$$S = \lim_{n\to\infty}(S_n) = Lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2} = \infty$$

$\therefore$ المتسلسلة متباعدة.

مثال5:

اختبر المتسلسلة:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} = 1-1+1-\ldots+(-1)^{n-1}+\ldots(1)$$

الحل:

واضح أنه إذا كانت المتسلسلة

زوجية $\Rightarrow$ n=1

فردية $\Rightarrow$ n=0

$$S_n = \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

وعليه فإن S ليست قيمـ.ـة محـ.ـدودة وبالتـ.ـالي فالمتسلـ.ـسلة (1) تباعدية.

3- المتسلسلة التوافقية

Harmonic Series

المتسلسلة التي على الصورة التالية هي المتسلسلة التوافقية وهي متسلسلة متباعدة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$$

وتكون متباعدة وذلك لأن

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$$

ويمكن كتابتها على الصورة:

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}) + \ldots + \frac{1}{n}$$

بمقارنتها بالمتسلسلة الأخيرة $1 + \frac{(n+1)}{2}$

وبالتالي:

$$\lim_{n\to\infty}(S_n) = \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{(n+1)}{2} = \infty$$

4- التقارب المطلق

المتسلسلة العادية

$$w_1 + w_2 + w_3 + \ldots$$

تسمى متقاربة القياس (التقارب المطلق) إذا كانت المتسلسلة المنـ.اظرة لها:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |w_n| = |w_1| + |w_2| + \ldots \qquad (3)$$

متقاربة. تسمى هذه المتسلسلة أيـ.ضا **مطلقـ.ة التقـ.ارب Absolutely convergence** إذا كانت المتسلسلة

$$w_1 + w_2 + w_3 + \ldots$$

متقاربة ولكن المتسلسلة (3) متباعدة فإن المتسلسلة تـ.سمى **مـ.شروطة التقارب (Conditionally Convergent)**

ملاحظة:

إذا كانت المتسلسلة متقاربة مطلقا فإنها تكون متقاربة.

الاختبارات لدراسة تقارب أو تباعد المتسلسلات العادية

مثال6:

المتسلسلة المتقاربة شرطيا ومطلقا

المتسلسلة:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16}$$

متقاربة وقيمتها "1" وذلك لأن:

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

فهي عبارة عن متتابعة هندسية حدها الأول وأساسها ½

ومجموعها هو

$$\frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

وبالتالي فإن:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 1$$

بينما المتسلسلة

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

متقاربة شرطيا وذلك لأن المتسلسلة

$$w_1 + w_2 + \ldots$$

متقاربة فإنها تكون متقاربة.

نظرية1 :

إذا كانت المتسلسلة

$$w_1 + w_2 + \ldots$$

متقاربة مطلقا فإنها تكون متقاربة.

نظرية2 :

إذا كانت المتسلسلة $w_1 + w_2 + \ldots$

متقاربة فإن:

$$\lim_{n\to\infty} w_n = 0$$

وبالتالي المتسلسلة التي لا تحقق هذا الشرط تكون متباعدة.

1- اختبار النهاية:

وهو بأن نقوم بأخذ النهاية للحد العام إذا كانت النهاية مساوية للصفر تكون غير معلومة بمعنى يفشل الاختبار وغير ذلك تكون متباعدة.

(ويطبق هذا الاختبار في حالة المسائل التي يكون فيها درجة البسط أكبر من أو تساوي درجة المقام)

$$\lim_{n\to\infty}(S_n) = \begin{cases} 0 & test.fails \\ otherwise & div \end{cases}$$

2- اختبار الجذر النوني: Cauchy test

بفرض أن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متسلسلة حدودها موجبة وبفرض أن

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}_n = L$$

وبالتالي فإن:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \begin{matrix} \prec 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots conv \\ \succ 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots div \\ = 1 \ldots\ldots\ldots test.fails \end{matrix}$$

اختبار كوشي:

المتسلسلة تكون متقاربة إذا وفقط إذا كان لكل عدد موجب ε صغير جدا

يمكن إيجاد عدد N بحيث إن الفرق بين أي حدين مختلفين أقل مـ.ن N يكون مقدار أقل من ε وهذا ما يسمى بنظرية كوشي للتق.ارب وهـ.ذا الاختبار ليس للتطبيق وإنما كتعريف.

مثال7 :

اختبر المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$$

من حيث كونها متقاربة أو متباعدة

الحل:

باستخدام اختبار كوشي نجد أن:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 < 1$$

إذن المتسلسلة تقاربية.

3- اختبار المقارنة: Comparison test

قبل توضيح هذا الاختبار لابد من سرد النظرية التالية:

نظرية1 :

إذا كانت

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad \ldots \qquad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \qquad \cdots \qquad (2)$$

وهو اختبار عن طريق مقارنة المتسلسلة بأخرى معلومة من النظرية من حيث كونها متقاربة أو متباعدة (يطبق في المسائل التي يكون فيها بسط ومقام وتكون درجة البسط أقل من درجة المقام)

If $a_n \le b_n$ and b_n convergent then a_n convergent,
If $a_n \ge b_n$ and b_n divergent then a_n divergent

4- اختبار القسمة: Division Test

ويعتبر من أهم الاختبارات ويطبق هذا الاختبار في نوعين من المسائل:

(1) مسائل الأعداد ذات الأسس.

(2) مسائل المضروب وهو يطبق كما يلي:

إذا كانت لدينا

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \prec 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots conv \\ \succ 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots div \\ = 1 \ldots\ldots\ldots test.fails \end{cases}$$

5- اختبار التكامل:Integral Test

ويطبق في المسائل القابلة للتكامل ويطبق كما يلي:

إذا كانت لدينا

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$$\int_0^{\infty} a_n dn = \begin{cases} a \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots conv \\ \infty, \ldots or, \ldots -\infty \ldots\ldots\ldots\ldots div \end{cases}$$

وهو ما يعني أنه يوجد المساحة ما تحت المنحنى والذي يمثله دالة الحد العام للمتسلسلة، وإذا كانت هذه المساحة محدودة تكون متقاربة، وغير ذلك تكون متباعدة.

أمثلة

مثال1:

اختبر المتسلسلة الآتية من حيث كونها متقاربة أو متباعدة :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}$$

الحل:

من الظاهر أن الاختبار المناسب هنا هو اختبار القسمة

$$a_n=\frac{1}{2^{n-1}},\quad a_{n+1}=\frac{1}{2^n}$$

وبالتالي فإن:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\div\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n-1}}{2^n}=\frac{1}{2}\prec 1$$

فتكون المتسلسلة متقاربة (convergent) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}$

مثال2 :

اختبر المتسلسلة الآتية من حيث كونها متقاربة أو متباعدة :

$$\sum_{n=1}^{\infty} n$$

الحل:

من الواضح أن الاختبار المناسب هو اختبار النهاية (لأن درجة البسط أعلى من درجة المقام)

$$a_n = n, \quad \Rightarrow \lim_{n \to \infty} (n) = \infty \neq 0$$

divergent (متباعدة)

مثال3 :

اختبر المتسلسلة الآتية من حيث كونها متقاربة أو متباعدة :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^2}$$

الحل:

من الواضح أن الاختبار المناسب هو اختبار المقارنـة (لأن درجـة البسط أقل من درجة المقام)

$$a_n = \frac{n+2}{n^2}, \qquad b_n = \frac{1}{n} \ ,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ divergent}$$

ومن النظرية

$$\because \frac{n+2}{n^2} = \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} \geq \frac{1}{n},$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^2} \geq \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

وبما أن $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ متباعدة من النظرية ومن هذا تكون المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n^2}$$

متباعدة باستخدام اختبار المقارنة.

مثال4:

اختبر المتسلسلة الآتية من حيث كونها متقاربة أو متباعدة :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+n+1}{n^5+1}$$

الحل:

من الواضح أن الاختبار المناسب هو اختبار المقارنة

(لأن درجة البسط أقل من درجة المقام)

$$\therefore a_n=\frac{3n^2+n+1}{n^5+1}, \quad b_n=\frac{1}{n^3}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$$

ومن نظرية التقارب convergent Theorem

$$\because \frac{3n^2+n+1}{n^5+1}\le\frac{1}{n^3},$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+n+1}{n^5+1}\le\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$$

وبما أن $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ متقاربة مـ.ـن النظريـ.ـة وبالتـ.ـالي تكـ.ـون المتسـ.ـلة

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+n+1}{n^5+1}$ متقاربة باستخدام اختبار المقارنة.

مثال 5 :

اختبر المتسلسلة الآتية من حيث كونها متقاربة أو متباعدة :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$$

الحل:

يمكن في هذا المثال تطبيق اختبار التكامل على أساس أن دالة الحد العام شكلها معلوم لدينا في التكامل

$$\int_{1}^{\infty} \frac{dn}{1+n^2} = \tan^{-1} n \Big|_{1}^{\infty} = \tan^{-1}[\infty - \tan^{-1} 1]$$

$$= 90 - 45 = 45$$

وهذا عدد محدود أي أن المساحة محدودة ولذلك فهي متقاربة.

مثال 6:

اختبر المتسلسلة الآتية من حيث كونها متقاربة أو متباعدة :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$$

الحل:

من الواضح أن الاختبار المناسب هنا هو اختبار القسمة (عدد أس إن)

$$\because a_n = \frac{n}{3^n}, \quad a_{n+1} = \frac{n+1}{3^{n+1}}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3^{n+1}}\div\frac{n}{3^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{3^{n+1}}\times\frac{n+1}{n}=\frac{1}{3}\prec 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}\ \text{(convergent)}$$

وبالتالي فإن المتسلسلة متقاربة.

مثال 7:

اختبر المتسلسلة الآتية من حيث كونها متقاربة أو متباعدة :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^2}$$

الحل:

من الواضح أن الاختبار المناسب هنا هو اختبار النسبة (عدد أس إن)

$$\because a_n=\frac{3^n}{n^2},\quad a_{n+1}=\frac{3^{n+1}}{(n+1)^2}\Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}}{(n+1)^2}\div\frac{3^n}{n^2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}}{3^n}\times\frac{n^2}{(n+1)^2}=3\succ 1$$

divergent وبالتالي فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^2}$

متباعدة.

مثال 8 :

اختبر المتسلسلة الآتية من حيث كونها متقاربة أو متباعدة :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{[Ln(n)]^n}$$

الحل: الاختبار المناسب في هذه الحالة هو اختبار الجذر النوني (ذلك لأن الكل أس إن)

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{[Ln(n)]^n}}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{Ln\ (n)}=0\prec 1$$

متقاربة.

مثال 9 :

اختبر المتسلسلة الآتية من حيث كونها متقاربة أو متباعدة :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n[Ln(n)]}$$

الحل:

من الواضح أن الاختبار المناسب هو اختبار التكامل وذلك لأنها دالة سهلة التكامل

$$\int_1^{\infty}\frac{dn}{n[Ln(n)]}=[Ln.Ln(n)]_1^{\infty}=\infty$$

الناتج كمية غير محدودة وعلى ذلك يكون الناتج أو المساحة غير محدودة وبالتالي تكون متباعدة.

مثال 10:

اختبر المتسلسلة الآتية من حيث كونها متقاربة أو متباعدة :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3-4i)^n}{n!}$$

الحل:

الواضح أن الاختبار المناسب هو اختبار القسمة لأنه يوجد مضروب في المثال

$$a_{n+1}=\frac{(3-4i)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(3-4i)^{n+1}}{(n+1)!}\div\frac{(3-4i)^n}{n!}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)}\times(3-4i)=0\prec 1$$

وبالتالي فإن الدالة المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3-4i)^n}{n!}$ convergent

متقاربة.

مثال 11 :

اختبر المتسلسلة الآتية من حيث كونها متقاربة أو متباعدة :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+..........$$

الحل:

أولا يمكن كتابة الحد العام للمتسلسلة على الشكل

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+2}}$$

ويمكن حل هذا المثال باستخدام التكامل

$$\int_{1}^{\infty}\frac{dn}{\sqrt{n+2}}=\frac{2}{1}[\sqrt{n+2}]_{0}^{\infty}=\infty$$

الناتج كمية غير محدودة وعلى ذلك يكـ.ون الذ.اتج أو المـ.ساحة غيـ.ر محدودة، وتكون المتسلسلة متباعدة.

تمارين

في كلٍّ مما يأتى وضح ما إذا كانت المتسلسلة متقاربة أم متباعدة:

1) $\frac{1}{Ln2}+\frac{1}{Ln3}+..........$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{n+1}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{2}}{2^{n}}$ 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n2^{n}}$

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Ln(n)}{n}$ 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{n}$

(ب) المتسلسلة المتبادلة الإشارة (المتعاقبة)
Alternating Series

تعريف:

تسمى المتسلسلة الآتية بالمتعاقبة وتأخذ الشكل

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n = a_0 - a_1 + a_2 - \ldots$$

ويكون الاختبار فيها كما يلي (اختبار وحيد): وهو أننا نق.وم باختب.ار المتسلسلة:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

فإذا كانت متقاربة انتهى المثال وفي هذه الحالة تسمى المتسلسلة متقاربة تقارب مطلق، أما إذا كانت متباعدة نقوم بأخذ النهاية للحد العام a_n فإذا ساوى صفرا تكون متقاربة تقارب مشروط، أما غير ذلك فتكون متباعدة.

أمثلة عامة :

اختبر المتسلسلات الآتية من حيث التقارب أو التباعد:

1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$

الحل:

بما أن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ متسلسلة متقاربة من اختبار المقارنة العادي

وعلى ذلك تكون المتسلسلة المتعاقبة $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ متقاربة تقارب مطلق.

2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}$

الحل:

بما أن $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ باستخدام اختبار المقارنة نجد أن

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n-1} \geq \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n} \text{ (divergent)}$$

ويكون على ذلك المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ متباعدة وعلى ذلك نق.وم بأخذ نهاية الحد العام

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n-1}=0,$$

وعلى ذلك تكون المتسلسلة المتعاقبة الإشارة $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}$ متقاربة تقارب مشروط.

3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^n}{n}$

الحل:

واضح أننا سنطبق على المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n}$ اختبار النسبة وهي تباعدي.ة

(تمرين) لذلك نقوم بأخذ النهاية للحد العام $\lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{n} = \infty$

فعلى ذلك تكون **متباعدة**.

(ج) متسلسلة القوى
Power series

تعريف:

تسمى المتسلسلة ذات الشكل

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

بمتسلسلة القوى في x حيث إنه متغير والأعداد

$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n,\ldots}$

ثوابت. وهذه المتسلسلة تكون تقاربية أو تباعدية على فترات ينتمي لهـا المتغير x وذلك يخضع لثلاث حالات:

1) إذا كانت المسألة تحتوي على مضروب في المقام كـان النـاتج = صفر 0 وتكون تقاربية على كل قيم R.

وفى هذه الحالة نصف قطر التقارب هو ∞.

2) إذا كانت المسألة تحتوي على مضروب في البسط كـان النـاتج = ∞ وتكون تباعدية على R .

وفي هذه الحالة نصف قطر التقارب = صفر.

3) إذا كانت لا تحتوي على مضروب أو مضروب في البسط والمقام كانت هناك فترة تقارب [a, b].

وفى هذه الحالة يكون نصف قطر التقارب هو نصف الفترة.

ملاحظة: والاختبارات الخمس السابقة هي التي تطبق هنا ولكن الأكثـ.ر استخداما هو اختبار القسمة.

أمثلة

في كلٍّ مما يأتي عين نصف قطر التقارب (أو عين فترة التقارب):

$$1)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

الحل:

من الواضح أنها متسلسلة قوى لوجود المتغير x ومن الواضح أيـ.ضا أنه لا يوجد مضروب، لذلك الناتج سيكون فترة وعـ.ن طريـ.ق اختبـ.ار النسبة

$$a_n = \frac{x^n}{n}\ ,\quad a_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)} \div \frac{x^n}{n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n}{(n+1)} \times x \right|$$

$$= |x| \prec 1$$

$$\Rightarrow -1 \prec x \prec 1$$

في هذه الفترة تكون متقاربة ولكن يبقى أن ندرس ذلك عندما

x = 1 أو x=-1

أولا: عندما: x = 1

فتصبح المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}$ متباعدة (لماذا؟) وبعدها

عندما x = -1 تكون المتسلسلة $\sum_{0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ المتبادلة الإشارة متقاربة (لماذا؟) وعلى ذلك تكون فترة التقارب هـ.ي $-1 \le x \prec 1$ ونـ.صف قطر التقارب هو 1.

$$2)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!\,x^{2n}}{n+1}$$

الحل:

من الواضح أنها متسلسلة قوى لوجود المتغير x ومن الواضح أيـ.ضا أنه يوجد مضروب في البسط لذلك الناتج سيكون ∞ وستكون تباعديـ.ة على كل R ويكون نصف قطر التقارب مساويا صفر

$$\because a_n = \frac{n!x^{2n}}{n+1},$$

$$a_{n+1} = \frac{x^{2n+2}(n+1)!}{(n+2)}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+2}(n+1)!}{(n+2)} \div \frac{n!x^{2n}}{n+1}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)(n+1)}{(n+2)}\times x^2\right| = \infty \succ 1$$

لذلك تكون تباعدية على كل R ويكون نصف قطـ.ر التقـ.ارب مـ.ساويا صفر.

$$3)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

الحل:

من الواضح أنها متسلسلة قوى لوجود المتغير x ومن الواضح أيضا أنه يوجد مضروب في المقام لذلك الناتج سيكون مساويا صفر وتكون فترة التقارب R ويكون نصف قطر التقارب ∞.

$$\because a_n=\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\ ,\ \ a_{n+1}=\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}\div\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}x^2\right|=0\prec 1$$

وعلى ذلك يكون هذا مؤديا إلى أنها متقاربة على كل قيم R ونصف قطر التقارب مساويا ∞.

* * *

تمارين

أوجد فترة التقارب لكل من المتسلسلات الآتية:

1) $\sum_{n=0}^{\infty}(x+i)^n$

2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}n!}{(2n+1)!}$

3) $\sum_{n=0}^{\infty}n^n x^n$

4) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-a)^n}{(2n+1)!}$

5) $\frac{x}{e^x}+\frac{2x}{e^{2x}}+\dots,$

6) $\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+x^2}+\dots$

7) $Ln(x)+Ln^2x+\dots$

❋ ❋ ❋