الباب
4

الحركة التوافقية البسيطة
Simple Harmonic Motion

تعرفنا في الباب الأول على حركة جسيم في خط مستقيم، وفي الباب الثاني على حركة الجسيم في المستوى. بعد ذلك درسنا في الباب الثالث بعض أنواع الحركة في المستوى مثل حركة المقذوفات، حيث يرسم مسار الجسيم قطعاً مكافئاً. في هذا الباب نتعرف على نوع آخر من أنواع الحركة في خط مستقيم تسمى "الحركة التوافقية البسيطة".

4.1 معادلة الحركة التوافقية البسيطة

في هذا الفصل ندرس نوعاً جديداً من الحركة مثل حركة أوتار آلة الكمان *(Violin String)* وهي تعزف الألحان الجميلة، ومثل حركة الشوكة الرنانة *(Tuning Fork)* عندما تجري تجربة معامل الرنين في معمل الفيزياء، ومثل حركة البندول البسيط *(Pendulum)*. في الواقع فإن هذه الحركة تسمى حركة توافقية بسيطة.

سنحاول الحصول على أشكال العجلة والسرعة لجسيم يتحرك حركة توافقية بسيطة. نتعرف على ما يسمى "السعة" *(Amplitude)*، "التردد" *(Frequency)*، ونتعرف كذلك على ما يسمى "زاوية الطور" *(Phase Angle)*، و"الزمن الدوري" *(Periodic Time)*، وغيرها من الصفات والخواص الكيناتيكية التي تلازم الحركة التوافقية البسيطة. على أية حال دعنا نبدأ بتعريف الحركة التوافقية البسيطة تعريفاً كيناتيكياً.

4.1 تعريف الحركة التوافقية البسيطة

يقال أن الجسيم يتحرك حركة توافقية بسيطة إذن كانت عجلته تتجه في مسارها دائما نحو نقطة ثابتة في هذا المسار، تحت تأثير قوه تتناسب طردياً مع البعد عن هذه النقطة الثابتة.

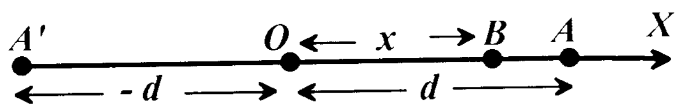
✍.

هذا، ولأن عجلة الجسيم الذي يتحرك حركة توافقية بسيطة حسب التعريف تتجه - دائماً - في مسارها نحو نقطة ثابتة في هذا المسار، إذن فهي تتجه إلى النقطة الثابتة إما من جهة اليمين أو من جهة الشمال. وسندرس - الآن - كل حالة على حده للحصول على المعادلات التي تربط الموضع، والسرعة بالزمن، وللحصول كذلك على الزمن الدوري، والتردد، لنصل في النهاية إلى الوصف العام للحركة التوافقية البسيطة.

الحالة الأولى: معادلة الحركة عندما يتجه الجسيم إلى النقطة الثابتة من جهة اليمين

لنأخذ نقطة O مركزاً الحركة (النقطة الثابتة التي يتجه نحوها الجسيم). وليكن محور - OX محوراً لقياس المسافات الموجبة. افرض أن B هو موضع الجسيم عند الزمن t حيث $OB = x$. انظر شكل (4.1).

شكل 4.1



وصف الحركة التوافقية البسيطة
في الجانب الأيمن من مركز الحركة

لنفرض أن عجلة الجسيم في اتجاه محور x هي $x^{\bullet\bullet}$. وبما أن عجلة الجسيم تتجه ـ دائماً ـ حول مركز الحركة O، إذن فالعجلة تقصيرية. أيضاً، بما أن القوة التي سببت الحركة ـ حسب التعريف ـ تتناسب مع البعد عن مركز الحركة أي تتناسب طردياً مع x، إذن فإن

$$F = kx \tag{4.1}$$

حيث k هو ثابت التناسب. وهكذا نجد أن معادلة الحركة التوافقية البسيطة لجسيم كتلته m هي

$$m\, x^{\bullet\bullet} = -kx \tag{4.2}$$

أو

$$\boxed{x^{\bullet\bullet} = -\omega^2 x \;\; ; \;\; \omega^2 = \frac{k}{m}} \tag{4.3}$$

وبما أن

$$x^{\bullet\bullet} = v\frac{dv}{dx}$$

إذن، بالتعويض في المعادلة (4.3)، وفصل المتغيرات، والتكامل نحصل على

$$v\frac{dv}{dx} = -\omega^2 x \quad \Rightarrow \quad \int v dv = -\omega^2 \int x dx + C$$

أو

$$\frac{1}{2}v^2 = -\frac{1}{2}\omega^2 x^2 + C \tag{4.4}$$

وللحصول على الثابت C فإننا نحتاج إلى شروط ابتدائية. بما أن الجسيم يتجه - دائماً - نحو O، لنفرض أن سرعته كانت صفراً عندما كان على مسافة مقدارها d عن نقطة O، بمعنى أن $v = 0$ عندما $x = d$. إذن، بالتعويض بهذه الشروط في المعادلة (4.4) نجد أن الثابت C هو

$$C = \frac{1}{2}\omega^2 d^2 \tag{4.5}$$

وبالتعويض عن الثابت C في المعادلة (4.4)، نحصل على العلاقة بين السرعة والمسافة في الصورة

$$v^2 = \omega^2\left(d^2 - x^2\right) \tag{4.6}$$

أو

$$\boxed{v = \pm\omega\sqrt{d^2 - x^2}} \tag{4.7}$$

وبما أن $v = \dfrac{dx}{dt}$، إذن، بالتعويض في المعادلة (4.7)، وفصل المتغيرات، والتكامل نحصل على

$$\frac{dx}{dt} = \pm\omega\sqrt{d^2 - x^2} \tag{4.8}$$

أو

$$\pm\int \frac{dx}{\sqrt{d^2 - x^2}} = \omega\int dt + \varepsilon \tag{4.9}$$

حيث ε هو ثابت التكامل. لنأخذ ــ أولاً ــ الإشارة الموجبة، فنحصل على

$$\int \frac{dx}{\sqrt{d^2 - x^2}} = \omega\int dt + \varepsilon$$

وبالتكامل، إذن

$$\sin^{-1}\left(\frac{x}{d}\right) = \omega t + \varepsilon \tag{4.10}$$

أو

$$\boxed{x = d\sin(\omega t + \varepsilon)} \tag{4.11}$$

وإذا أخذنا الإشارة السالبة فسنجد أن

$$-\int \frac{dx}{\sqrt{d^2 - x^2}} = \omega\int dt + \varepsilon$$

وبالتكامل، إذن

$$\cos^{-1}\left(\frac{x}{d}\right) = \omega t + \varepsilon \tag{4.12}$$

أو

$$\boxed{x = d\cos(\omega t + \varepsilon)} \tag{4.13}$$

هذا، ويمكن الحصول على قيمة الثابت ε باستخدام الشروط الابتدائية: $t = 0,\ x = x_0$. عندئذٍ نجد من (4.11) أو من (4.13) أن الثابت ε يمكن أن يأخذ أياً من القيمتين

$$\varepsilon = \sin^{-1}\left(\frac{x_0}{d}\right),\quad \varepsilon = \cos^{-1}\left(\frac{x_0}{d}\right) \tag{4.14}$$

حيث نجد من المعادلة (4.14) أن

$$x_0 = d\sin(\varepsilon) = d\cos(\varepsilon) \tag{4.15}$$

في الواقع فإن ثابت التكامل ε يسمى "زاوية الطور". الآن، بما أن

$$|\sin(\omega t + \varepsilon)| = |\cos(\omega t + \varepsilon)| \leq 1 \tag{4.16}$$

إذن، بالتعويض في المعادلة (4.11) أو في المعادلة (4.13) فإننا نجد أن

$$|x| = |d||\sin(\omega t + \varepsilon)| \leq d \tag{4.17}$$

أو

$$|x| = |d||\cos(\omega t + \varepsilon)| \leq d \tag{4.18}$$

وبالتالي فإن

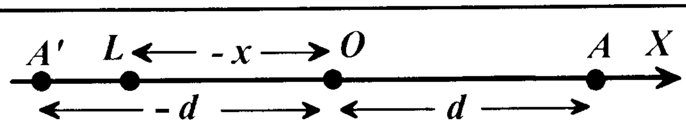
$$-d \le x \le d \qquad (4.19)$$

ماذا تعني ـ رياضياً ـ المعادلة (4.19)؟ تعني أن الجسيم يتحرك بين النقطتين $x = d$, $x = -d$. ولهذا السبب فإن المسافة d تسمى "سعة الحركة".

الحالة الثانية: معادلة الحركة عندما يتجه الجسيم إلى النقطة الثابتة من جهة اليسار

في هذه الحالة نأخذ نقطة O على أنها مركز الحركة (النقطة الثابتة التي يتجه نحوها الجسيم)، وليكن محور ـ OX محوراً لقياس المسافات الموجبة. نفرض أن L هو موضع الجسيم عند الزمن t حيث $OL = -x$. انظر شكل (4.2).

شكل 4.2



وصف الحركة التوافقية البسيطة
في الجانب الأيسر من مركز الحركة

ولنفرض ـ الآن ـ أن عجلة الجسيم في اتجاه محور x هي $\ddot{x}$. وبما أنها تتجه ـ دائماً ـ حول مركز الحركة O، إذن فهي في هذه الحالة ليست عجلة تقصيرية، ولكنها عجلة موجبة، وذلك لأنها في الاتجاه الموجب لمحور ـ x. ولكن، وبما أن القوة تتناسب مع البعد عن مركز الحركة أي تتناسب طردياً مع سالب x (لأن الجسيم يقع عن يسار O)، إذن فإن

$$F = k(-x) \tag{4.20}$$

حيث k هو ثابت التناسب. إذن فمعادلة حركة الجسيم عن يسار مركز الحركة هي

$$m\,x^{\bullet\bullet} = k(-x) \tag{4.21}$$

أو

$$x^{\bullet\bullet} = -\omega^2 x \;\; ; \;\; \omega^2 = \frac{k}{m}$$

وهي نفس معادلة الحركة في حالة تحرك الجسيم متجهاً إلى مركز الحركة من جهة اليمين حيث إشارة العجلة سالبة.

نلاحظ

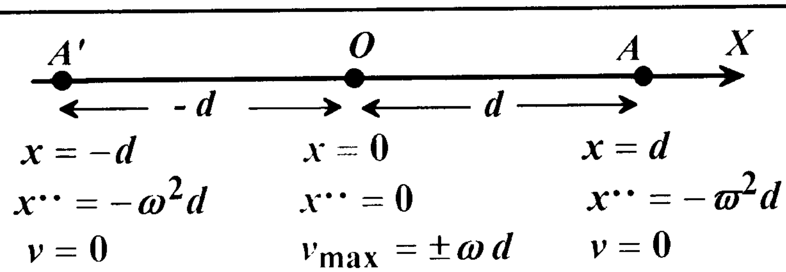
أنه في حالة حركة الجسيم عن يسار المركز أن العجلة تكون موجبة ولكن الإحداثي السيني x يكون سالباً، الأمر الذي يؤدي إلى نفس معادلة حركة الجسيم عن يمين مركز الحركة. وبالتالي فالمعادلات ,(4.7) (4.13) ,(4.11)، والتي تسري على حالة الحركة عن يمين مركز الحركة تسري - أيضاً - على حالة الحركة عن يسار مركز الحركة.

4.2 الوصف العام للحركة التوافقية البسيطة

باستخدام المعادلات التي حصلنا عليها في الحالتين السابقتين، أي في حالتي حركة الجسيم حركة توافقية بسيطة وهو عن يمين أو عن يسار مركز الحركة يمكن لنا وصف الحركة التوافقية البسيطة بصفة عامة.

حيث يمكن أن نصفها في ثلاثة مواضع، أو عند ثلاث نقط. الموضع الأول هو مركز الحركة أو O، والموضعين الأخريين هما: نقطة نهاية الحركة من جهة اليمين، ونقطة نهاية الحركة من جهة اليسارأي النقطتين A', A .انظر شكل (4.3).

شكل 4.3



الوصف العام للحركة التوافقية البسيطة

حيث نلاحظ أن سرعة الجسيم تنعدم عند $x=\pm d$، وتكون أكبر ما يمكن عند $x=0$. نلاحظ أيضاً أن مقدار كل من السرعة والعجلة عند نقطة على بعد x عن اليمين من نقطة O يساوي مقدار كل من السرعة والعجلة على نفس البعد عن يسار النقطة O.

4.3 الزمن الدوري . Periodic Time

مادامت الحركة التوافقية البسيطة هي حركة تذبذبية، يكون من الطبيعي البحث عن زمن الذبذبة الكاملة، أو ما يسمى بالزمن الدوري.

تعريف الزمن الدوري 4.2

يعرف الزمن الدوري على أنه الزمن الذي يستغرقه الجسيم عندما يتحرك من $x = d$ إلى $x = -d$ ثم يعود ثانية إلى النقطة $x = d$. وعندئذٍ نقول أن الجسيم عمل ذبذبة كاملة.

✍.

بالطبع يمكن أن نلاحظ أن الزمن الذي يستغرقه الجسيم في الحركة من النقطة $x = d$ إلى النقطة $x = 0$ يساوي الزمن الذي يستغرقه في الحركة من $x = 0$ إلى $x = -d$.

على ذلك فإن الزمن الدوري يساوي أربعة أضعاف الزمن من النقطة $x = d$ إلى النقطة $x = 0$. هذا، وللحصول على الزمن الذي يستغرقه الجسيم في الحركة من النقطة $x = d$ إلى النقطة $x = 0$، نضع $x = d$ في (4.13) فنحصل على

$$1 = \cos(\omega t_d + \varepsilon) \;\Rightarrow\; \omega t_d + \varepsilon = 0 \;\Rightarrow\; t_d = \frac{-\varepsilon}{\omega} \qquad (4.22)$$

ثم نضع $x = 0$ في نفس المعادلة (4.13) مرة ثانية فنحصل على

$$0 = d\cos(\omega t_0 + \varepsilon)$$

أو

$$\omega t_0 + \varepsilon = \frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; t_0 = \frac{\pi}{2\omega} - \frac{\varepsilon}{\omega} \qquad (4.23)$$

من المعادلتين (4.23) ,(4.22) نحصل على الزمن الدوري، والذي سوف نرمز له بالرمز T في الصورة

$$T = 4(t_0 - t_d) = 4\left[\left(\frac{\pi}{2\omega} - \frac{\varepsilon}{\omega}\right) - \left(\frac{-\varepsilon}{\omega}\right)\right] \tag{4.24}$$

أو

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}} \tag{4.25}$$

ولأن الحركة التوافقية البسيطة هي حركة تذبذبية، ولها زمن دوري، إذا يمكن معرفة عدد الذبذبات التي يعملها الجسيم في وحدة الزمن. وهذا ما يعرف بالتردد.

4.3 تعريف التردد - Frequency

يُعَّرف التردد، ويرمز له بالرمز q ، بأنه عدد الذبذبات الكاملة التي يعملها الجسيم في وحدة الزمن أي أن

$$q = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \tag{4.26}$$

✍.

مثال 4.1 اثبت أن العلاقة $x = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ تمثل حركة توافقية بسيطة، وأوجد سعة الذبذبة، وزاوية الطور.

الحل بما أن

$$x = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

بإجراء التفاضل، إذن

$$x^{\bullet} = -A\omega\sin(\omega t) + B\omega\cos(\omega t)$$

بإجراء التفاضل مرة أخرى، إذن

$$x^{\bullet\bullet} = -A\omega^2\cos(\omega t) - Bw^2\sin\omega t$$

$$= -\omega^2(A\cos\omega t + B\sin\omega t) = -\omega^2 x$$

الأمر الذي يعني أن هذه الحركة هي حركة توافقية بسيطة. الآن، وبالتعويض عن

$$x = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

في المعادلة (4.13)، نجد أن

$$d\cos(\omega t + \varepsilon) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

$$= d\left(\cos(\omega t)\cos(\varepsilon) - \sin(\omega t)\sin(\varepsilon)\right)$$

بمقارنة المعاملات نحصل على

$$d\cos(\varepsilon) = A\ ; \qquad \text{(i)}$$

$$-d\sin(\varepsilon) = B\ ; \qquad \text{(ii)}$$

بقسمة المعادلة (ii) على المعادلة (i) نحصل على (زاوية الطور) ε، حيث نجد أن

$$\tan(\varepsilon) = -\frac{B}{A}$$

وبتربيع المعادلتين (i), (ii)، والجمع نجد أن

$$d^2 \cos^2(\varepsilon) + d^2 \sin^2(\varepsilon) = A^2 + B^2 \ ;$$

أو

$$d^2 = A^2 + B^2 \quad \Rightarrow \quad d = \pm\sqrt{A^2 + B^2}$$

✍.

مثال 4.2 في حركة توافقية بسيطة كانت السرعة $8\ ft / \sec$، وكانت العجلة $-16\ ft / \sec^2$ عندما كانت الإزاحة $4\ ft$ عن مركز الحركة. أوجد السعة والزمن الدوري.

الحل بالتعويض عن قيم العجلة والإزاحة المعطاة في المسألة في معادلة الحركة $x^{\cdot\cdot} = -\omega^2 x$ نجد أن

$$-16 = -\omega^2(4) \quad \Rightarrow \quad \omega = 2$$

وللحصول على السعة d يتم التعويض عن السرعة والإزاحة في (4.8)، إذن

$$64 = 4d\left(a^2 - 16\right) \quad \Rightarrow \quad d = \pm 4\sqrt{2}$$

إذن السعة هي $d = 4\sqrt{2}$، أما الزمن الدوري فهو

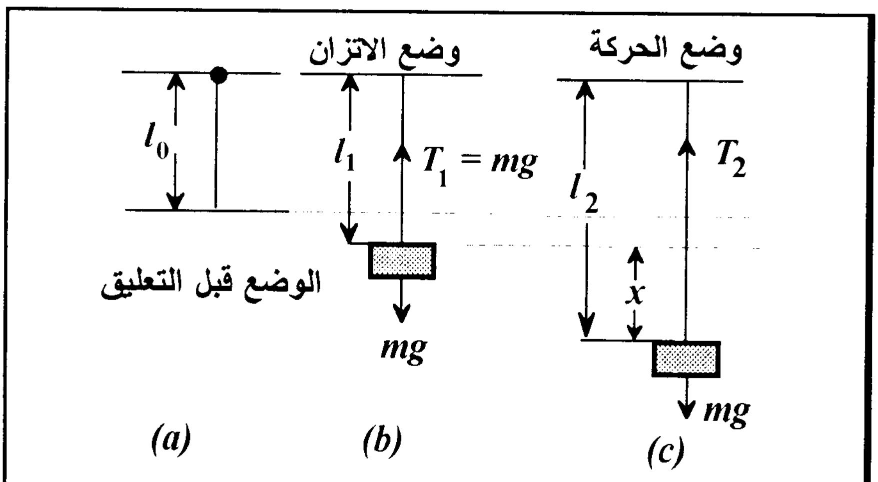
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

✍.

مثال 4.3 علق جسيم كتلته m في خيط مرن طوله الطبيعي l_0 ومعاير مرونته λ. فإذا أزيح هذا الجسيم من موضع اتزانه مسافة رأسية إلى أسفل، فاثبت أنه يتحرك حركة توافقية بسيطة، وأوجد الزمن الدوري.

الحل نفرض أن الخيط المرن قد استطال فأصبح طوله l_1 بعد تعليق الكتلة m، واتزن، ولنفرض أن l_1 قد أصبح l_2 عندما أُزيح إلى أسفل مسافة x. انظر شكل (4.4).

شكل 4.4



من وضع الاتزان، وإذا فرضنا أن معامل مرونة الخيط هو λ، إذن فحسب قانون هوك نجد أن

$$mg = T_1 = \frac{\lambda}{l_0}(l_1 - l_0) \tag{i}$$

من وضع الحركة (c)، نجد أن القوى المؤثرة على حركة الجسيم m، هي الوزن mg، والشد T_2. إذن معادلة الحركة هي

$$m\ddot{x} = mg - T_2 \tag{ii}$$

وحسب قانون هوك، فإن الشد T_2 هو

$$T_2 = \frac{\lambda}{l_0}(l_2 - l_0)$$

وبما أن

$$l_2 = l_1 + x$$

إذن فإن

$$T_2 = \frac{\lambda}{l_0}(l_1 + x - l_0) \tag{iii}$$

وبالتعويض من (iii) في (ii) نجد أن معادلة الحركة تأخذ الصورة

$$m\ddot{x} = mg - \frac{\lambda}{l_0}(l_1 + x - l_0) \tag{iv}$$

وأيضاً بالتعويض عن mg من المعادلة رقم (i) في المعادلة رقم (iv)، نحصل على معادلة الحركة في الصورة

$$m\ddot{x} = \frac{\lambda}{l_0}(l_1 - l_0) - \frac{\lambda}{l_0}(l_1 + x - l_0) = -\frac{\lambda}{l_0}x$$

أو

$$\ddot{x} = -\omega^2 x; \quad \omega^2 = \frac{\lambda}{ml_0}$$

وهذه العجلة تمثل حركة جسيم يتحرك حركة توافقية بسيطة، حيث نجد أن

$$\omega = \left(\frac{\lambda}{ml_0}\right)^{1/2}$$

إذن الزمن الدوري هو

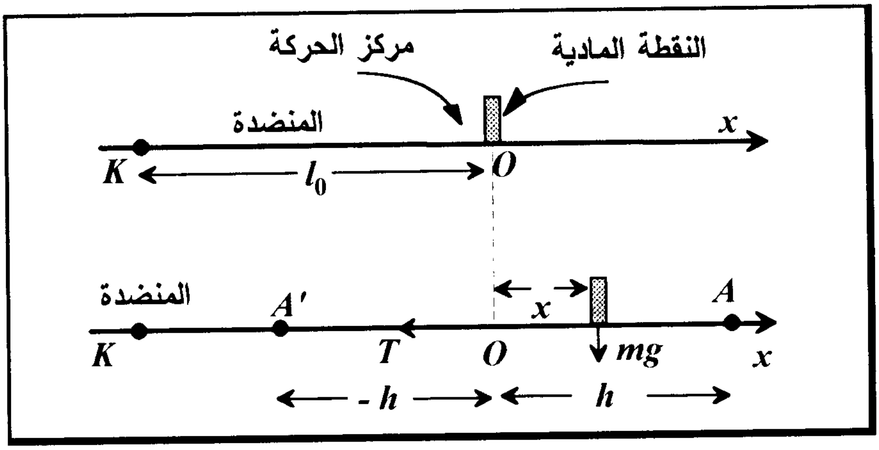
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\left(\frac{ml_0}{\lambda}\right)^{1/2}$$

.

مثال 4.4 زنبرك طوله الطبيعي l_0، ومعامل مرونته λ. ربط في أحد طرفيه جسيم كتلته m وثبت الطرف الآخر من الزنبرك على منضدة أفقية ملساء. فإذا شد هذا الجسيم في اتجاه الزنبرك، ثم ترك ليتحرك. اثبت أن الحركة توافقية بسيطة.

الحل نفرض أن النقطة المثبتة من الزنبرك هي نقطة K، وأن الجسيم أزيح من النقطة O (وضع الاتزان) إلى النقطة A مسافة: $OA = h$، ثم ترك ليتحرك. انظر شكل (4.5).

شكل 4.5



القوى المؤثرة على حركة الجسيم في اتجاه محور - x هو الشد T فقط.
معادلة حركة الجسيم عندما يكون على بعد x من مركز الحركة O هي

$$m\ddot{x} = -T$$

لنفرض أن معامل مرونة الخيط هي λ، إذن، طبقاً لقانون هوك فإن

$$T = \frac{\lambda}{l_0}\left(l_0 + x - l_0\right) = \frac{\lambda}{l_0}x$$

إذن فإن

$$\ddot{x} = -\omega^2 x \quad ; \quad \omega = \sqrt{\frac{\lambda}{ml_0}}$$

ويكون الزمن الدوري

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\left(\frac{ml_0}{\lambda}\right)^{1/2}$$

.✍

4.4 مسائل

(1) يتحرك جسيم حركة توافقية بسيطة، ووجد أن المسافات المقطوعة أثناء الحركة في نفس الاتجاه مقيسة من مركز الحركة هي x_1, x_2, x_3 عند نهاية ثلاث ثواني متتالية أوجد زمن الذبذبة الكاملة.

(2) نضد أفقي خشن يتحرك حركة توافقية بسيطة زمنها الدوري 3، وأقصى سرعة لها $4\ ft/\sec$. وضع جسيم صغير على النضد. أوجد أقل قيمة لمعامل الاحتكاك بين الجسيم والنضد حتى لا ينزلق الجسيم على النضد.

(3) شد خيط مرن بين نقطتين ثابتين A,B في خط رأسي واحد وكانت B أسفل A. ثُبت جسيم في أية نقطة P من نفس الخيط وترك من هذا الموضع من سكون. اثبت أن الحركة توافقية بسيطة، وأوجد الزمن الدوري والسعة.

(4) ثبت سلك ثني على شكل منحنى الكاتينة وانزلقت عليه حلقة ملساء تحت تأثير قوة وحيدة تؤثر نحو محور ـ x وتتناسب طردياً مع البعد عن هذا المحور. اثبت أن الحركة توافقية، وأن رد الفعل يتناسب عكسياً مع مربع البعد عن محور ـ x.

(5) جسيم كتلته m يتصل بأحد طرفي خيط مرن طوله الطبيعي l وطرفه الآخر عند النقطة K. ترك الجسيم ليسقط من K. إذا كان معاير مرونة الخيط هو $\lambda = \frac{1}{2}mg$. أوجد أكبر عمق يصل إليه الجسيم، وزمن الوصول إلى هذا العمق.

(7) يعرف البندول البسيط بأنه عبارة عن نقطة مادية متصلة بخيط غير مرن مثبت من الطرف الآخر ويتذبذب في زاوية صغيرة تحت تأثير الجاذبية. اثبت أن الحركة توافقية بسيطة، وأوجد الزمن الدوري.

****

يقول علماء الرياضيات ..

قبل أن تبحث عن حل أية مشكلة

تأكد ـ أولاً ـ أنه موجود

حلول مسائل الديناميكا

ذات الأرقام الفردية

الأعمال أعلى صوتاً من الأقوال

Actions Speak Louder Than Words

1

بما أن

$$a = 4t^2 + 5$$

بفصل المتغيرات، والتكامل نجد أن

$$\frac{dv}{dt} = 4t^2 + 5 \Rightarrow \int dv = \int \left(4t^2 + 5\right)dt + C_1$$

أو

$$v = \frac{4}{3}t^3 + 5t + C_1$$

ومن الشروط الابتدائية للحركة لدينا

$$t = 3,\ v = 30 \quad \Rightarrow C_1 = -21$$

وبالتالي فإن

$$v = \frac{4}{3}t^3 + 5t - 21$$

بفصل المتغيرات، والتكامل

$$\frac{dx}{dt} = \frac{4}{3}t^3 + 5t - 21$$

أو

$$\int dx = \int \left(\frac{4}{3}t^3 + 5t - 21\right)dt + C_2$$

أو

$$x = \frac{4}{12}t^4 + \frac{5}{2}t^2 - 21t + C_2$$

ومن الشـــروط الابتدائيـة مـرة أخـرى، لدينـا

$$t = 0,\ x = 10 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 10$$

إذن

$$x = \frac{4}{12}t^4 + \frac{5}{2}t^2 - 21t + 10$$

3

الجسيم يتحرك نحو النقطة الثابتة، بحيث تتناقص المسافة مـع الزمـن، إذن فالعجلة تقصيرية. فإذا رمزنا لها بالرمز a، فإن

$$a = -k^2\left(x + \frac{b^4}{x^3}\right)$$

بفصل المتغيرات نجد أن

$$v\frac{dv}{dt} = -k^2\left(x + \frac{b^4}{x^3}\right)$$

أو

$$\int v dv = -k^2 \int \left(x + \frac{b^4}{x^3}\right) dt + C_1$$

وهكذا نجد أن

$$\frac{1}{2}v^2 = -k^2\left(\frac{x^2}{2} - \frac{b^4}{2x^2}\right) + C_1$$

ومن الشروط الابتدائية، لدينا

$$x = b,\ v = 0 \ \Rightarrow \ C_1 = 0$$

وبالتالي فإن

$$v = \pm k\sqrt{\frac{b^4}{x^2} - x^2}$$

ونعتبر هنا الإشارة السالبة، وذلك لأن المسافة x تتناقص مع الزمن، إذن فإن

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{k}{x}\sqrt{b^4 - x^4}$$

وبفصل المتغيرات، والتكامل نجد أن

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{b^4 - x^4}} = -k\int dt + C_2$$

بوضع

$$y = x^2 \Rightarrow dy = 2xdx$$

إذن فإن

$$\frac{1}{2}\int \frac{dy}{\sqrt{\left(b^2\right)^2 - y^2}} = -kt + C_2$$

عندئذٍ فإن

$$\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x^2}{b^2}\right) = -kt + C_2$$

ومن الشروط الابتدائية أيضاً لدينا

$$t = 0,\ x = b \ \Rightarrow \ C_2 = \frac{\pi}{4}$$

وبالتالي فإن

$$\sin^{-1}\left(\frac{x^2}{b^2}\right) = 2\left(-kt + \frac{\pi}{4}\right)$$

أو

$$x^2 = b^2 \sin\left(-2kt + \frac{\pi}{2}\right)$$

وعندما يصل الجسيم إلى النقطة O، فهذا يعني أن $x = 0$، وبالتالي فإن

$$\sin\left(-2kt + \frac{\pi}{2}\right) = 0 \ \Rightarrow -2kt + \frac{\pi}{2} = 0 \ \Rightarrow \ t = \frac{\pi}{4k}$$

وعندما $x = \frac{b}{\sqrt{2}}$ ، فإن

$$\frac{b^2}{2} = b^2 \sin\left(-2kt + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \frac{1}{2} = \sin\left(-2kt + \frac{\pi}{2}\right)$$

أو

$$\left(-2kt + \frac{\pi}{2}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{5\pi}{12k}$$

ويكون الزمن المطلوب هو $t = \frac{5\pi}{12k}$.

5

لمعرفة ما إذا كان الجسيم سيصل إلى المركز O أو لا يصل، علينا إيجاد العلاقة بين المسافة والزمن. بما أن القوة طاردة، إذن فالعجلة موجبة، وبالتالي فإذا رمزنا للعجلة بالرمز a، فإن معادلة الحركة تكون

$$ma = mk^2 x \quad \Rightarrow \quad a = k^2 x$$

بفصل المتغيرات، والتكامل نجد أن

$$v\frac{dv}{dx} = k^2 x \quad \Rightarrow \int v dv = k^2 \int x dx + C_1$$

أو

$$\frac{1}{2}v^2 = \frac{k^2 x^2}{2} + C_1$$

ومن الشروط الابتدائية

$$x = A,\ v = kA \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0$$

وبالتالي فإن

$$v^2 = k^2 x^2 \quad \Rightarrow \quad v = \pm kx$$

وبما أن الجسيم قد قذف نحو مركز الطرد، إذن فإن x تتناقص مع الزمن، وبالتالي نختار الإشارة السالبة. وبفصل المتغيرات، والتكامل نحصل على

$$\frac{dx}{dt} = -kx \quad \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = -k\int dt + \ln(C_2)$$

أو

$$\ln(x) = -kt + \ln(C_2) \ \Rightarrow\ x = C_2 e^{-kt}$$

ومن الشروط الابتدائية

$$t = 0,\ x = A \ \Rightarrow\ C_2 = A$$

وبالتالي فإن

$$x = Ae^{-kt}$$

وبما أن $A \neq 0$، إذن، ولكي يصل الجسيم إلى مركز الطرد $x = 0$، فهذا يتطلب أن $t \to \infty$، وهذا من المستحيل، أي أن الجسيم لا يصل إلى النقطة 0 أبداً.

7

أولاً: الحركة أثناء الصعود. من (1.28) نجد أن قوة المقاومة هي $\lambda m v^2$، حيث λ ثابت، m كتلة الجسيم. ولنفرض أن نقطة قذف الجسيم لأعلى هي نقطة الأصل، وأنه قذف بالسرعة v_0. بما أن المقاومة - دائماً - عكس اتجاه الحركة، إذن معادلة الحركة هي

$$ma = -mg - \lambda m v^2 \ \Rightarrow\ a = -\left(g + \lambda v^2\right)$$

بفصل المتغيرات، والتكامل، إذن

$$v\frac{dv}{dx} = -\left(g + \lambda v^2\right) \Rightarrow \frac{1}{2\lambda}\int \frac{2\lambda v dv}{g + \lambda v^2} = -\int dx + C_1$$

أو

$$\frac{1}{2\lambda}\ln\left(g+\lambda v^2\right)=-x+C_1$$

ومن الشروط الابتدائية لدينا

$$v=v_0,\;\; x=0\;\Rightarrow\; C_1=\frac{1}{2\lambda}\ln\left(g+\lambda {v_0}^2\right)$$

وبالتالي فإن

$$\frac{1}{2\lambda}\ln\left(g+\lambda v^2\right)=-x+\frac{1}{2\lambda}\ln\left(g+\lambda {v_0}^2\right)$$

أو

$$x=\frac{1}{2\lambda}\ln\left(\frac{g+\lambda {v_0}^2}{g+\lambda v^2}\right)$$

وللحصول على أقصى ارتفاع x_{max}، نضع $v=0$ في المعادلة السابقة فنحصل على

$$x_{max}=\frac{1}{2\lambda}\ln\left(1+\frac{\lambda}{g}{v_0}^2\right)\tag{i}$$

ولحساب زمن الوصول إلى أقصى ارتفاع، نحاول الحصول على علاقة بين المسافة والزمن، ولذا نستخدم معادلة الحركة مرة ثانية ـ مع التعويض عن العجلة كدالة فى الزمن ـ إذن

$$a=\frac{dv}{dt}=-\left(g+\lambda v^2\right)$$

وبفصل المتغيرات، والتكامل نجد أن

$$\int \frac{dv}{g+\lambda v^2} = -\int dt + C_2$$

أو

$$\int \frac{dv}{\alpha^2 + v^2} = -\lambda \int dt + C_2 \quad ; \quad \alpha = \sqrt{\frac{g}{\lambda}}$$

وعندئذٍ فإن

$$\sqrt{\frac{\lambda}{g}} \tan^{-1}\left(v\sqrt{\frac{\lambda}{g}} \right) = -\lambda t + C_2$$

ومن الشروط الابتدائية نجد أن

$$v = v_0,\ t = 0 \ \Rightarrow \ C_2 = \sqrt{\frac{\lambda}{g}} \tan^{-1}\left(v_0\sqrt{\frac{\lambda}{g}} \right)$$

وبالتالي فإن

$$\sqrt{\frac{\lambda}{g}} \tan^{-1}\left(v\sqrt{\frac{\lambda}{g}} \right) = -\lambda t + \sqrt{\frac{\lambda}{g}} \tan^{-1}\left(v_0\sqrt{\frac{\lambda}{g}} \right)$$

أو

$$t = \sqrt{\frac{1}{\lambda g}}\left(\tan^{-1}\left(v_0\sqrt{\frac{\lambda}{g}} \right) - \tan^{-1}\left(v\sqrt{\frac{\lambda}{g}} \right)\right)$$

عند أقصى ارتفاع فإن $v = 0$، وبالتالي فإن زمن الوصول إلى أقصى ارتفاع هو

$$t = \frac{1}{\sqrt{\lambda g}} \tan^{-1}\left(v_0 \sqrt{\frac{\lambda}{g}} \right) \tag{ii}$$

ثانياً: الحركة أثناء الهبوط. معادلة حركة الجسيم ـ باعتبار أن نقطة أقصى ارتفاع هي نقطة الهبوط من السكون، أي نقطة الأصل ـ تأخذ الصورة

$$ma = mg - m\lambda v^2 \;\Rightarrow\; a = g - \lambda v^2$$

وتكون السرعة عظمى (السرعة الاتزانية) عندما تنعدم العجلة أي عند $a = 0$، إذن

$$0 = g - \lambda {v_{\max}}^2 \Rightarrow \lambda = \frac{g}{v_{\max}^2} \tag{iii}$$

وبالتالي فإن

$$a = g - \frac{g}{v_{\max}^2} v^2 \;\Rightarrow\; v\frac{dv}{dx} = \frac{g}{v_{\max}^2}\left(v_{\max}^2 - v^2 \right)$$

بفصل المتغيرات، والتكامل

$$\frac{-1}{2}\int \frac{-2v\,dv}{\left(v_{\max}^2 - v^2\right)} = \frac{g}{v_{\max}^2}\int dx + C_1$$

أو

$$\ln\left(v_{\max}^2 - v^2\right) = \frac{-2g}{v_{\max}^2}x + C_1$$

ومن الشروط الابتدائية

$$x = 0,\ v = 0 \quad \Rightarrow \quad C = \ln\left(v_{\max}^2\right)$$

وبالتالي فإن

$$\ln\left(v_{\max}^2 - v^2\right) = \frac{-2g}{v_{\max}^2}x + \ln\left(v_{\max}^2\right)$$

أو

$$\ln\left(\frac{v_{\max}^2 - v^2}{v_{\max}^2}\right) = \frac{-2g}{v_{\max}^2}x \qquad \text{(iv)}$$

ولإيجاد سرعة الوصول إلى سطح الأرض، والتي نرمز لها بالرمز v_E، نضع $x_{\max}$ بدلاً من x في المعادلة السابقة فنحصل على

$$\ln\left(\frac{v_{\max}^2 - v_E^2}{v_{\max}^2}\right) = \frac{-2g}{v_{\max}^2}x_{\max} \qquad \text{(v)}$$

بالتعويض عن قيمة λ من (iii) في أقصى ارتفاع $x_{\max}$ كما في (i)، نجد أن

$$x_{\max} = \frac{v_{\max}^2}{2g}\ln\left(\frac{v_{\max}^2 + v_0{}^2}{v_{\max}^2}\right) \qquad \text{(vi)}$$

وبالتعويض من (vi) في (v) نجد أن

$$\ln\left(\frac{v_{\max}^2 - v_E^2}{v_{\max}^2}\right) = \ln\left(\frac{v_{\max}^2}{v_{\max}^2 + v_0^2}\right)$$

ومنها نحصل على سرعة الوصول إلى الأرض بدلالة السـرعة الابتدائيـة، والسرعة الاتزانية في الصورة

$$v_E^2 = v_{\max}^2 - \frac{v_{\max}^4}{v_{\max}^2 + v_0^2} = \frac{v_{\max}^4 + v_0^2 v_{\max}^2 - v_{\max}^4}{v_{\max}^2 + v_0^2}$$

$$= v_0^2\left(\frac{v_{\max}^2}{v_{\max}^2 + v_0^2}\right) = v_0^2\left(\frac{1}{1+\beta^2}\right) \;;\; \beta = \frac{v_0}{v_{\max}}$$

وبالتالي فإن

$$v_E = v_0\sqrt{\frac{1}{1+\beta^2}} \;;\beta = \frac{v_0}{v_{\max}}$$

أيضاً، يمكن أن نحصل على سرعة الوصـول إلى سـطح الأرض في صـورة أخرى هي

$$v_E = v_{\max}\sqrt{1 - \frac{1}{1+\beta^2}}$$

ومن المعادلة (iv) نجد ـ أيضاً ـ أن

$$\frac{v_{max}^2 - v^2}{v_{max}^2} = e^{\left(\frac{-2g}{v_{max}^2}\right)x}$$

أو

$$v^2 = v_{max}^2\left(1 - e^{\frac{-2g}{v_{max}^2}x}\right)$$

حيث نلاحظ في هذه المعادلة أن السرعة تصل إلى سرعتها الاتزانية v_{max} عندما $x \to \infty$. وهذا ـ طبعاً ـ لايمكن حدوثه، وبالتالي فالسرعة لن تصل إلى السرعة الاتزانية أبداً.

9

نفرض أن كتلة الجسيم m، وعجلته هي a. بما أن المقاومة تتناسب مع السرعة، إذن فإن المقاومة تكون kmv وتؤثر في عكس اتجاه الحركة، أي رأسياً لأعلى، حيث k هو ثابت الوسط المقاوم. معادلة حركة الجسيم إذن هي

$$ma = mg - kmv \;\Rightarrow\; a = g - kv$$

وعندما يتزن الجسيم تحت تأثير وزنه، والمقاومة، فإن السرعة تأخذ قيمتها العظمى (الاتزانية) v_{max}، وتتلاشى العجلة ($a = 0$)، إذن فإن

$$0 = g - kv_{\max} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{g}{v_{\max}}$$

وبالتعويض عن ثابت الوسط k في معادلة الحركة فإنها تتحول إلى الصورة

$$a = g - \frac{g}{v_{\max}} v = \frac{g}{v_{\max}} \left(v_{\max} - v\right)$$

بفصل المتغيرات، والتكامل نجد أن

$$\frac{dv}{dt} = \frac{g}{v_{\max}} \left(v_{\max} - v\right)$$

وهكذا نجد أن

$$\int \frac{dv}{\left(v_{\max} - v\right)} = \frac{g}{v_{\max}} \int dt + C_1$$

وبالتالي فإن

$$-\ln\left(v_{\max} - v\right) = \frac{g}{v_{\max}} t + C_1$$

ومن الشروط الابتدائية، والتي تفيد أن الجسيم قد سقط من سكون نجد أن

$$t = 0,\ v = 0 \Rightarrow C_1 = \ln\left(\frac{1}{v_{\max}}\right)$$

إذن

$$-\ln\left(v_{\max} - v\right) = \frac{g}{v_{\max}} t + \ln\left(\frac{1}{v_{\max}}\right)$$

أو

$$\ln\left(\frac{v_{max}-v}{v_{max}}\right)=-\frac{g}{v_{max}}t$$

وهكذا نجد أن

$$\frac{v_{max}-v}{v_{max}}=e^{-\frac{g}{v_{max}}t}$$

ومن هذه المعادلة يمكن أن نحصل على السرعة كدالة في الزمن في الصورة

$$v=v_{max}\left(1-e^{-\frac{g}{v_{max}}t}\right) \qquad \text{(i)}$$

وبالتعويض عن

$$t=\frac{v_{max}}{g}\ln(4)$$

نحصل على

$$v=v_{max}\left(1-e^{-\ln(4)}\right)=v_{max}\left(1-\frac{1}{e^{\ln(4)}}\right)$$

$$=v_{max}\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{4}v_{max}$$

ولمعرفة المسافة المقطوعة بعد زمن قدره $t=\frac{v_{max}}{g}\ln(4)$ نحاول إيجاد علاقة بين المسافة والزمن.

وبما أن $v = \dfrac{dx}{dt}$، إذن، وبالتعويض في (i) نجد أن

$$\frac{dx}{dt} = v_{\max}\left(1 - e^{-\frac{g}{v_{\max}}t}\right)$$

وبفصل المتغيرات، والتكامل نحصل على

$$\int dx = v_{\max}\int\left(1 - e^{-\frac{g}{v_{\max}}t}\right)dt + C_1$$

أو

$$x = v_{\max}\left(t + \frac{v_{\max}}{g}e^{-\frac{g}{v_{\max}}t}\right) + C_1$$

ومن الشروط الابتدائية لدينا

$$t = 0,\ x = 0 \ \Rightarrow C_1 = -\frac{v_{\max}^2}{g}$$

وبالتالي فإن

$$x = v_{\max}\left(t + \frac{v_{\max}}{g}e^{-\frac{g}{v_{\max}}t}\right) - \frac{v_{\max}^2}{g}$$

وعندما

$$t = \frac{v_{\max}}{g}\ln(4)$$

فإن

$$x = v_{\max}\left(\frac{v_{\max}}{g}\ln(4) + \frac{v_{\max}}{g}e^{-\ln(4)}\right) - \frac{v_{\max}^2}{g}$$

$$= \frac{v_{\max}^2}{g}\left[\left(\ln(4) + \frac{1}{4}\right) - 1\right] = \frac{v_{\max}^2}{g}\left(\ln(4) - \frac{3}{4}\right)$$

11

نفرض أن كتلة الجسيم الأول هي m_1، وسرعته هي v_1، وثابت الوسط المقاوم لحركته هو λ_1، إذن معادلة حركة الجسيم الأول هي

$$m_1 a = m_1 g - m_1 \lambda_1 v_1^2 \;\Rightarrow\; a = g - \lambda_1 v_1^2$$

وعندما $a = 0$، فإن السرعة v_1 تصبح نهائية (اتزانية)، لنرمز لها بالرمز v_m. عندئذٍ فإن

$$g - \lambda_1 v_m^2 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_1 = \frac{g}{v_m^2} \qquad \text{(i)}$$

وبالتعويض في معادلة الحركة عن $a = \dfrac{dv_1}{dt}$، والتعويض كذلك عن λ_1 من (i)، إذن فإن

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{g}{v_m^2}\left(v_m^2 - v_1^2\right)$$

وبفصل المتغيرات، والتكامل نحصل على

$$\int \frac{dv_1}{v_m^2 - v_1^2} = \frac{g}{v_m^2}\int dt + C_1$$

وباستخدام نظرية الكسور الجزئية نجد أن

$$\frac{1}{v_m^2 - v_1^2} = \frac{1}{2v_m}\left(\frac{1}{v_m + v_1} - \frac{-1}{v_m - v_1}\right)$$

وبالتالي فإن

$$\frac{1}{2v_m}\int\left(\frac{1}{v_m + v_1} - \frac{-1}{v_m - v_1}\right)dv_1 = \frac{g}{v_m^2}\int dt + C_1$$

أو

$$\frac{1}{2v_m}\ln\left(\frac{v_m + v_1}{v_m - v_1}\right) = \frac{g}{v_m^2}t + C_1$$

ومن الشروط الابتدائية لدينا

$$t = 0,\ v_1 = 0 \ \Rightarrow\ C_1 = 0$$

إذن العلاقة بين سرعة الجسيم الأول v_1 والزمن t تعطى بدلالة السرعة الاتزانية v_m في الصورة

$$\frac{1}{2v_m}\ln\left(\frac{v_m+v_1}{v_m-v_1}\right)=\frac{g}{v_m^2}t \qquad \text{(ii)}$$

أو

$$\ln\left(\frac{v_m+v_1}{v_m-v_1}\right)=\frac{2g}{v_m}t \qquad \text{(iii)}$$

الأن، نفرض أن كتلة الجسيم الثاني هي m_2، وسرعته هي v_2، وثابت الوسط المقاوم لحركته هي λ_2، إذن معادلة حركة الجسيم الثاني هي

$$m_2a=m_2g-m_2\lambda_2v_2^2 \;\Rightarrow\; a=g-\lambda_2v_2^2$$

وعندما $a=0$، فإن السرعة v_2 تصبح نهائية (اتزانية)، وحسب معطيات المسألة فهي تساوي نصف السرعة الاتزانية للجسيم الأول أي تساوي $\frac{1}{2}v_m$ عندئذٍ فإن

$$g-\frac{1}{4}\lambda_2v_m^2=0 \;\Rightarrow\; \lambda_2=\frac{4g}{v_m^2}$$

بنفس الطريقة يمكن الحصول على العلاقة بين سرعة الجسيم الثاني v_2، والزمن t بدلالة السرعة الاتزانية v_m، أو بوضع $\frac{1}{2}v_m$ بدلاً من v_m في (iii) فنحصل على

$$\ln\left(\frac{\frac{1}{2}v_m+v_2}{\frac{1}{2}v_m-v_2}\right)=\frac{2g}{\frac{1}{2}v_m}t$$

أو

$$\ln\left(\frac{v_m+2v_2}{v_m-2v_2}\right)=\frac{4g}{v_m}t \qquad \text{(iv)}$$

بقسمة (iv) على (iii) نحصل على

$$\ln\left(\frac{v_m+2v_2}{v_m-2v_2}\right)=\ln\left(\frac{v_m+v_1}{v_m-v_1}\right)^2$$

أو

$$\left(\frac{v_m+2v_2}{v_m-2v_2}\right)=\left(\frac{v_m+v_1}{v_m-v_1}\right)^2$$

بعد الاختصار نجد أن

$$-4v_m^2v_1+\left(4v_2v_m^2+4v_2v_1^2\right)=0$$

إذن

$$v_m^2v_1=v_2\left(v_m^2+v_1^2\right)$$

13

نفرض أن القوة الثابتة هي F، وأن كتلته m، وأن عجلته a، إذن معادلة الحركة هي

$$ma=F-mc\left(1+v^2\right)$$

وبما أنه عندما تنعدم العجلة ($a=0$) فإن السرعة تصبح نهائية ($v=u$)، إذن فإن

$$0 = F - mc\left(1+u^2\right) \Rightarrow F = mc\left(1+u^2\right)$$

وبالتعويض فى معادلة الحركة، إذن

$$ma = mc\left(1+u^2\right) - mc\left(1+v^2\right) = mc\left(u^2 - v^2\right)$$

أو

$$v\frac{dv}{dx} = c\left(u^2 - v^2\right)$$

وبفصل المتغيرات، والتكامل، إذن

$$\frac{-1}{2}\int \frac{-2v\,dv}{\left(u^2 - v^2\right)} = c\int dx + C_1$$

أو

$$\ln\left(u^2 - v^2\right) = -2cx + C_1$$

وبما أنه من الشروط الابتدائية لدينا

$$x = 0,\ v = 0 \Rightarrow C_1 = \ln\left(u^2\right)$$

إذن فإن

$$\ln\frac{u^2 - v^2}{u^2} = -2cx$$

أو

$$\frac{u^2 - v^2}{u^2} = e^{-2cx} \Rightarrow v^2 = u^2\left(1 - e^{-2cx}\right)$$

وعندما يكون c صغيراً جداً، عندئذٍ يمكن ـ باستخدام مفكوك ماكلورين ـ أن نجد أن

$$e^{-2cx} = 1 - 2cx$$

وعندئذٍ فإن

$$v^2 = u^2\left(1-(1-2cx)\right) \Rightarrow v = u\sqrt{2cx}$$

****

1

معادلة المسار نحصل عليها بحذف البارامتر t من المعادلات القطبية، إذن معادلة المسار هي $r = \lambda \sin(\theta)$، وهذه معادلة دائرة في الإحداثيات القطبية نصف قطرها $\frac{\lambda}{2}$، حيث r مقاسة من نقطة على محيط الدائرة.

للحصول على سرعة الجسيم في أية لحظة لدينا

$$r = \lambda \sin(t),\ r^{\bullet} = -\lambda \cos(t),\ r^{\bullet\bullet} = -\lambda \sin(t)\ ; \qquad \text{(i)}$$
$$\theta = t,\ \theta^{\bullet} = 1,\ \theta^{\bullet\bullet} = 0$$

إذن متجه السرعة هو

$$\vec{v} = r^{\bullet}\,\hat{u} + r\theta^{\bullet}\,\hat{\theta} = -\lambda \cos(t)\,\hat{u} + \lambda \sin(t)\,\hat{\theta} \qquad \text{(ii)}$$

ومقدارها هو

$$v = \sqrt{r^{\bullet 2} + \left(r\theta^{\bullet}\right)^2} = \sqrt{\lambda^2 \cos^2(t) + \lambda^2 \sin^2(t)} = \lambda \qquad \text{(iii)}$$

وبالتالي فإن

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(\lambda) = 0 \qquad \text{(iv)}$$

متجه الوحدة في اتجاه المماس هو

$$\hat{t} = \frac{-\lambda \cos(t)\,\hat{u} + \lambda \sin(t)\,\hat{\theta}}{\lambda} = -\cos(t)\,\hat{u} + \sin(t)\,\hat{\theta} \qquad \text{(v)}$$

وبالتعويض من (i) في (2.45) يمكن الحصول على متجه العجلة في الصورة

$$\vec{a} = \left(r^{\cdot\cdot} - r\theta^{\cdot 2} \right) \hat{u} + \left(2r^{\cdot}\theta^{\cdot} + r\theta^{\cdot\cdot} \right) \hat{\theta}$$

$$= -2\lambda \sin(t)\ \hat{u} - 2\lambda \cos(t)\ \hat{\theta} \qquad \text{(vi)}$$

ويكون مقدار العجلة هو

$$a = \sqrt{4\lambda^2 \sin^2(t) + 4\lambda^2 \cos^2(t)} = 2\lambda \qquad \text{(vii)}$$

بالتعويض من (iv), (v), (vii) في (2.22) يمكن أن نحصل على المركبة العمودية، a_n، للعجلة حيث نجد أن

$$(2\lambda)^2 = 0 + a_n^2 \;\Rightarrow\; a_n = 2\lambda \qquad \text{(viii)}$$

وللحصول على متجه الوحدة في اتجاه العمودي للداخل على مسار الجسيم، $\hat{n}$، يتم التعويض من (iv), (v), (vi), (viii) في (2.21) فنجد أن

$$-2\lambda \sin(t)\ \hat{u} - 2\lambda \cos(t)\ \hat{\theta} = 2\lambda\, \hat{n} \qquad \text{(ix)}$$

إذن العمودي للداخل هو

$$\hat{n} = -\sin(t)\hat{u} - \cos(t)\hat{\theta} \qquad \text{(x)}$$

وبالتعويض من (iii), (viii) في (2.83) نجد أن نصف قطر انحناء المسار والانحناء هما

$$\mu = \frac{v^2}{a_n} = \frac{\lambda^2}{2\lambda} = \frac{\lambda}{2},\ K = \frac{2}{\lambda} \qquad \text{(xi)}$$

3

متجه الموضع هو

$$\vec{r} = \left(\sin(t) - t\cos(t)\right)\hat{i} + \left(\cos(t) + t\sin(t)\right)\hat{j} + t^2\hat{k} \qquad \text{(i)}$$

بتفاضل متجه الموضع (i) - بالنسبة إلى الزمن - نحصل على متجه السرعة في الصورة

$$\vec{v} = \left(t\sin(t)\right)\hat{i} + \left(t\cos(t)\right)\hat{j} + 2t\hat{k} \qquad \text{(ii)}$$

وبالتالي فإن مقدار السرعة هو

$$v = \sqrt{t^2\left(\sin^2(t) + \cos^2(t)\right) + 4t^2} = \sqrt{5}\,t \qquad \text{(iii)}$$

بتفاضل متجه السرعة (ii) نحصل على متجه العجلة في الصورة

$$\vec{a} = \left(t\cos(t) + \sin(t)\right)\hat{i} + \left(-t\sin(t) + \cos(t)\right)\hat{j} + 2\hat{k} \qquad \text{(iv)}$$

ومقدارها هو

$$a = \sqrt{t^2 + 5} \qquad \text{(v)}$$

متجه الوحدة المماسي هو

$$\hat{t} = \frac{\vec{v}}{v} = \frac{\left(t\sin(t)\right)\hat{i} + \left(t\cos(t)\right)\hat{j} + 2t\hat{k}}{\sqrt{5}\,t}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sin(t)\hat{i} + \cos(t)\hat{j} + 2\hat{k}\right) \qquad \text{(vi)}$$

بتفاضل السرعة في (iii) نحصل على مركبة العجلة في اتجاه المماس لنجد أنها

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sqrt{5}\,t\right) = \sqrt{5} \qquad \text{(vii)}$$

للحصول على المركبة العمودية للعجلة يتم التعويض من (v), (vii) في (2.22) فنجد أن

$$t^2 + 5 = 5 + a_n^2 \qquad \text{(viii)}$$

إذن المركبة العمودية للعجلة هي

$$a_n = t \qquad \text{(ix)}$$

أما متجه الوحدة في اتجاه العمودى للداخل، $\hat{n}$، فنحصل عليه بالتعويض من (iv), (vi), (vii), (ix) في (2.21) فنحصل على

$$\left(t\cos(t) + \sin(t)\right)\hat{i} + \left(-t\sin(t) + \cos(t)\right)\hat{j} + 2\hat{k}$$

$$= \sqrt{5}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sin(t)\hat{i} + \cos(t)\hat{j} + 2\hat{k}\right)\right) + (t)\hat{n}$$

وبالتالي فإن

$$\hat{n} = \frac{1}{t}\left(t\cos(t)\hat{i} - t\sin(t)\hat{j} + 0\hat{k}\right)$$

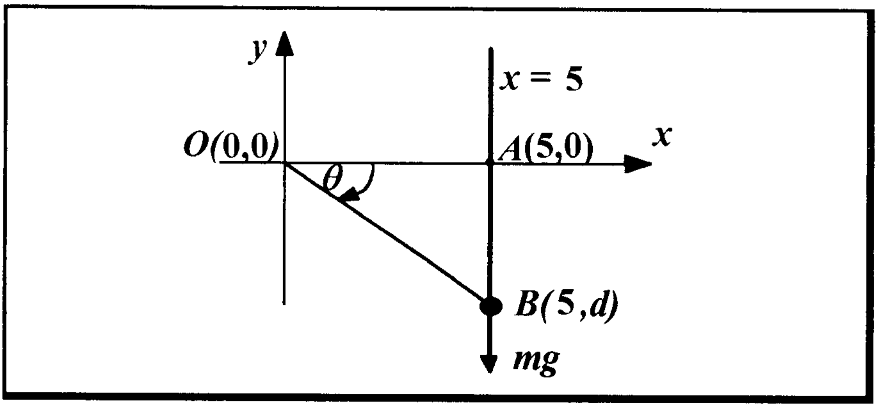
$$= \cos(t)\hat{i} - \sin(t)\hat{j} + 0\hat{k}$$

وأخيراً، وبالتعويض من (iii), (ix) في (2.83) نجد أن نصف قطر الانحناء هو

$$\mu = \frac{5t^2}{t} = 5t \quad \Rightarrow \quad K = \frac{1}{5t}$$

5

نفرض أن كتلة الجسيم هي m، وأن عجلته هي a، وأنه وصل إلى الموضع $B(5,d)$ بعد الزمن t مبتدءاً من النقطة $A(5,0)$، حيث d هي المسافة المقطوعة في الزمن t. انظر شكل (2.26).



شكل 2.26

معادلة الحركة تُعطي

$$ma = mg \;\Rightarrow\; a = g \;\Rightarrow\; \frac{dv}{dt} = g$$

وبفصل المتغيرات، والتفاضل نجد أن

$$\int dv = g\int dt + C_1 \quad \Rightarrow \quad v = gt + C_1$$

ومن الشروط الابتدائية لدينا

$$t = 0,\ v = 0 \ \Rightarrow \ C_1 = 0$$

إذن فإن

$$v = gt$$

وبفصل المتغيرات، والتكامل نجد أن

$$\frac{dy}{dt} = gt \Rightarrow \int dy = g\int tdt + C_2 \Rightarrow y = \frac{1}{2}gt^2 + C_2$$

ومن الشروط الابتدائية لدينا

$$t = 0,\ y = 0 \ \Rightarrow \ C_2 = 0$$

وبالتالي فإن

$$y = \frac{1}{2}gt^2 \ \Rightarrow \ d = \frac{1}{2}gt^2 \ \ ft$$

من الشكل نجد أن

$$\tan(\theta) = \frac{AB}{OA} = \frac{\frac{1}{2}gt^2}{5} = \frac{gt^2}{10}$$

بالتفاضل - بالنسبة إلى t - نحصل على

$$\sec^2(\theta)\theta^{\bullet} = \frac{gt}{5}$$

عندئذ فإن

$$\theta^{\bullet} = \frac{gt}{5} \times \frac{1}{\sec^2(\theta)} = \frac{gt}{5} \cos^2(t)$$

وبما أنه من شكل (2.26) نجد أن

$$\cos(\theta) = \frac{OA}{OB} = \frac{OA}{\sqrt{(5)^2 + (d)^2}} = \frac{5}{\sqrt{25 + \frac{1}{4} g^2 t^4}}$$

وبالتالي فإن

$$\cos^2(\theta) = \frac{25}{25 + \frac{1}{4} g^2 t^4}$$

إذن فإن السرعة الزاوية للخط OB الواصل بين نقطة الأصل والجسيم هي

$$\theta^{\bullet} = \frac{gt}{5} \times \frac{25}{25 + \frac{1}{4} g^2 t^4} = \frac{20gt}{100 + g^2 t^4}$$

وبعد ثانيتين فإن السرعة الزاوية تصبح

$$\theta^{\bullet} = \frac{20 \times 32 \times 2}{100 + (32)^2 \times 16} \approx \frac{65}{100} \quad radian / \sec$$

---

7 بما أن

$$x = \cos(t), \; y = \sin(t)$$

إذن، بالجمع، والتربيع نجد أن

$$x^2 + y^2 = \cos^2(t) + \sin^2(t) \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$$

وهي معادلة دائرة نصف قطرها الوحدة، ومركزها نقطة الأصل. متجه موضع المسار هو

$$\vec{r} = \cos(t)\hat{i} + \sin(t)\hat{j}$$

وبالتالي فإن متجهات السرعة والعجلة هي

$$\vec{v} = -\sin(t)\hat{i} + \cos(t)\hat{j} \quad \Rightarrow \quad v = 1;$$

$$\vec{a} = -\cos(t)\hat{i} - \sin(t)\hat{j} \quad \Rightarrow \quad a = 1$$

متجه الوحدة المماسي هو

$$\hat{t} = \frac{-\sin(t)\hat{i} + \cos(t)\hat{j}}{1} = -\sin(t)\hat{i} + \cos(t)\hat{j}$$

أما مركبة العجلة المماسية، a_t، فهي

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(1) = 0$$

من المعادلة (2.22) نجد أن

$$a^2 = a_t^2 + a_n^2 \Rightarrow 1 = 0 + a_n^2 \Rightarrow a_n = 1$$

من المعادلة (2.21) نجد أن

$$-\cos(t)\hat{i}-\sin(t)\hat{j}=(0)\hat{t}+(1)\hat{n}$$

وهكذا نجد أن متجه الوحدة العمودي للداخل على مسار الجسيم هو

$$\hat{n}=-\cos(t)\hat{i}-\sin(t)\hat{j}$$

نصف قطر الانحناء هو

$$\mu=\frac{v^2}{a_n}=\frac{1}{1}=1 \quad\Rightarrow\quad K=1$$

---

9 بما أن

$$x=4\sin(2t),\ \ y=t,\ \ z=4\cos(2t)$$

إذن معادلة المسار نحصل عليها بحذف البارامتر t من الإحداثيين $x,\ z$ فنحصل على

$$x^2+z^2=4^2\left(\sin^2(2t)+\cos^2(2t)\right)=16$$

وبالتالي معادلة المسار هي

$$x^2+z^2=16$$

وهي تمثل اسطوانة دائرية قائمة، محورها هو محور ـ y، ونصف قطرها

4. بتفاضل متجه الموضع بالنسبة إلى الزمن نحصل على متجه السرعة

$$\vec{v}=8\cos(2t)\hat{i}+\hat{j}-8\sin(2t)\hat{k}$$

إذن

وبفصل المتغيرات، والتفاضل نجد أن

$$\int dv = g\int dt + C_1 \;\Rightarrow\; v = gt + C_1$$

ومن الشروط الابتدائية لدينا

$$t = 0,\; v = 0 \;\Rightarrow\; C_1 = 0$$

إذن فإن

$$v = gt$$

وبفصل المتغيرات، والتكامل نجد أن

$$\frac{dy}{dt} = gt \Rightarrow \int dy = g\int tdt + C_2 \Rightarrow y = \frac{1}{2}gt^2 + C_2$$

ومن الشروط الابتدائية لدينا

$$t = 0,\; y = 0 \;\Rightarrow\; C_2 = 0$$

وبالتالي فإن

$$y = \frac{1}{2}gt^2 \;\Rightarrow\; d = \frac{1}{2}gt^2 \;\; ft$$

من الشكل نجد أن

$$\tan(\theta) = \frac{AB}{OA} = \frac{\frac{1}{2}gt^2}{5} = \frac{gt^2}{10}$$

بالتفاضل - بالنسبة إلى t - نحصل على

$$\sec^2(\theta)\theta^{\bullet} = \frac{gt}{5}$$

عندئذٍ فإن

$$\theta^{\bullet} = \frac{gt}{5} \times \frac{1}{\sec^2(\theta)} = \frac{gt}{5}\cos^2(t)$$

وبما أنه من شكل (2.26) نجد أن

$$\cos(\theta) = \frac{OA}{OB} = \frac{OA}{\sqrt{(5)^2 + (d)^2}} = \frac{5}{\sqrt{25 + \frac{1}{4}g^2t^4}}$$

وبالتالي فإن

$$\cos^2(\theta) = \frac{25}{25 + \frac{1}{4}g^2t^4}$$

إذن فإن السرعة الزاوية للخط OB الواصل بين نقطة الأصل والجسيم هي

$$\theta^{\bullet} = \frac{gt}{5} \times \frac{25}{25 + \frac{1}{4}g^2t^4} = \frac{20gt}{100 + g^2t^4}$$

وبعد ثانيتين فإن السرعة الزاوية تصبح

$$\theta^{\bullet} = \frac{20 \times 32 \times 2}{100 + (32)^2 \times 16} \approx \frac{65}{100} \ \textit{radian} / \sec$$

---

7 بما أن

$$x = \cos(t),\ y = \sin(t)$$

$$v_{t=5}=\sqrt{2gD_{t=5}}=\sqrt{2\times 32\times\frac{2225}{4}}=188.7\,ft/\sec$$

طريقة أخرى يمكن الحصول على السرعة عند $t = 5$ بطريقة أخرى. من المعادلة (3.38) نجد أن

$$\vec{v}_P(t_P)=v_0\cos(\alpha)\hat{i}+\left(v_0\sin(\alpha)-g(t_P)\right)\hat{j}$$

$$=100\cos(0)\hat{i}+\left(100\sin(0)-32\times 5\right)\hat{j}=100\hat{i}-160\hat{j}$$

ويكون مقدار السرعة بعد خمس ثوان هو

$$v_{t=5}=\sqrt{(100)^2+(-160)^2}=188.7\ ft/\sec$$

وهي نفس النتيجة السابقة. بالنسبة إلى معادلة المسار (3.21) فنجدها في الصورة

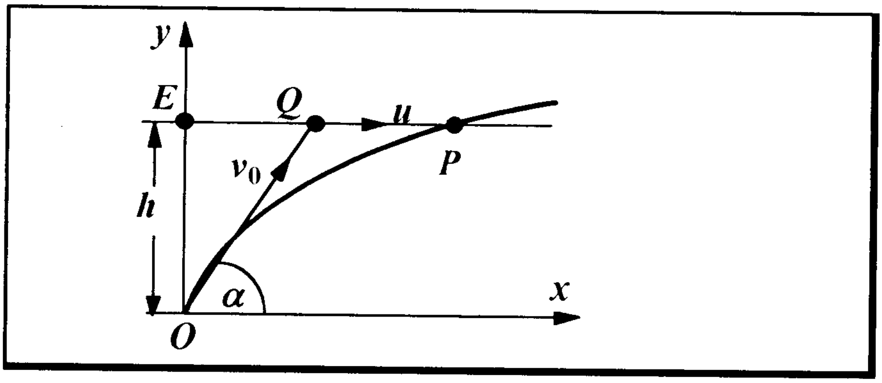
$$y=\frac{-32x^2}{2(100)^2\cos^2(0)}+x\tan(0)=-\frac{x^2}{625}$$

أو في الصورة $x^2=-625y$، وهي بالطبع معادلة قطع مكافيء، محوره هو محور ـ y، ومفتوح لأسفل، ورأسه نقطة الأصل (0,0)، وإحداثيات البؤرة هي $\left(0,-\frac{625}{4}\right)$ حيث $4p=-625$.

3

لنفرض أن المدفع موجود في نقطة الأصل. وبالتالي فإن نقطة القذف هي نقطة الأصل. وبالطبع فإن شرط أن تصيب القذيفة الهدف هو أن تنطبق إحداثيات القذيفة على إحداثيات الطائرة في نفس اللحظة t_P.

لنرمز للإحداثي السيني للطائرة عند النقطة P عند الزمن t_P بالرمز $\left(x_P\right)_A$، ولنرمز للإحداثي السيني للقذيفة عند نفس النقطة P ونفس اللحظة t_P بالرمز $\left(x_P\right)_B$. لنرمز - أيضاً - للإحداثي الصادي للقذيفة بالرمز $\left(y_P\right)_B$، ولنفرض أن الإحداثي الصادي للطائرة هو $h = \left(y_P\right)_A$. انظر شكل (3.16).



شكل 3.16

إذن فإن شرط أن تصيب القذيفة الهدف هو أن تتساوى الإحداثيات السينية والصادية لكل من القذيفة والطائرة عند النقطة P وعند الزمن t_P، أي أن

$$\left(x_P\right)_A = \left(x_P\right)_B \tag{i}$$

$$\left(y_P\right)_A = \left(y_P\right)_B \tag{ii}$$

للحصول على $\left(x_P\right)_A$، نفرض أن الطائرة بدأت الرحلة من النقطة E. إذن فإن الطائرة عندما تصل إلى النقطة Q تكون قد قطعت المسافة EQ. وفي هذه اللحظة (الخط الواصل بين الطائرة والمدفع يصنع الزاوية α مع الأفقي) أطلقت القذيفة من المدفع. وحتى تصل هذه القذيفة إلى الطائرة (لنفرض أنها استغرقت الزمن t_P) تكون الطائرة قد قطعت المسافة QP بالسرعة الثابتة u وبالتالي فإن

$$\left(x_P\right)_A = EQ + QP = h\cot(\alpha) + ut_P \tag{iii}$$

أيضاً، من المعادلة (3.11) لدينا

$$\left(x_P\right)_B = \left(v_0\cos(\alpha)\right) t_P \tag{iv}$$

بالتعويض من (iv), (iii) في (i) نجد أن

$$\left(v_0\cos(\alpha)\right) t_P = h\cot(\alpha) + ut_P$$

وبالتالي فإن

$$t_P = \frac{h\cot(\alpha)}{v_0\cos(\alpha) - u} \tag{v}$$

من المعادلة (3.16) نجد أن

$$\left(y_P\right)_B = -\frac{1}{2} g\, t_P^2 + \left(v_0 \sin(\alpha)\right) t_P \qquad \text{(vi)}$$

وبالتعويض من (vi) في (ii)، إذن فإن

$$-\frac{1}{2} g\, t_P^2 + \left(v_0 \sin(\alpha)\right) t_P = h \qquad \text{(vii)}$$

إذن، بالتعويض من (v) في (vii) نجد أن

$$h = v_0 \sin(\alpha) \frac{h \cot(\alpha)}{v_0 \cos(\alpha) - u} - \frac{1}{2} g \left(\frac{h \cot(\alpha)}{v_0 \cos(\alpha) - u} \right)^2 \qquad \text{(viii)}$$

بقسمة طرفي المعادلة (viii) على المقدار

$$\frac{h \cot^2(\alpha)}{\left(v_0 \cos(\alpha) - u\right)^2}$$

نحصل على المعادلة

$$\frac{\left(v_0 \cos(\alpha) - u\right)^2}{\cot^2(\alpha)} = v_0 \sin(\alpha) \frac{\left(v_0 \cos(\alpha) - u\right)}{\cot(\alpha)} - \frac{1}{2} g h \qquad \text{(ix)}$$

أو

$$\tan^2(\alpha)\left(v_0 \cos(\alpha) - u\right)^2$$

$$= v_0 \sin^2(\alpha) \frac{v_0 \cos(\alpha) - u}{\cos(\alpha)} - \frac{1}{2} g h$$

هذا، وللحصول على المسافة بين النقطتين A, B نستخدم العلاقة

$$AB = \sqrt{\left(y_B - y_A\right)^2 + \left(x_B - x_A\right)^2}$$

وبالتالي فإن

$$AB = ut\sqrt{\left(\cos(\beta) - \sin(\beta)\right)^2 + \left(-\sin(\beta) - \cos(\beta)\right)^2}$$

$$= ut\sqrt{2\cos^2(\beta) + 2\sin^2(\beta)} = \sqrt{2}ut$$

ومعنى أن المسافة بين النقطتين A, B تزداد بمعدل ثابت هو أن تكون قيمة المشتقة الأولى للمسافة AB بالنسبة إلى الزمن مقداراً ثابتاً، وبما أن

$$\frac{d}{dt}(AB) = \frac{d}{dt}\left(\sqrt{2}ut\right) = \sqrt{2}u$$

ومادامت المشتقة الأولى تساوي مقداراً ثابتاً لا يتوقف على الزمن هو $\sqrt{2}u$، حيث السرعة الابتدائية u ثابتة فهذا يعني أن المسافة تزداد بمعدل ثابت. وتصل النقطة A إلى الأرض بعد زمن يساوي زمن الطيران الكلي (معادلة (3.27))، أي يساوي

$$T = \frac{2u\sin(\beta)}{g}$$

وتكون النقطة B قد قطعت مسافة أفقية (معادلة (3.11)) تساوي

$$x_B = u\cos\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)T = -u\sin(\beta)T = \frac{-2u^2\sin^2(\beta)}{g}$$

إذن

$$|x_B| = \frac{2u^2\sin^2(\beta)}{g} = 4\left(\frac{u^2\sin^2(\beta)}{2g}\right)$$

وبما أن أقصى ارتفاع يصل إليه الجسيم A نحصل عليه من المعادلة (3.33) في الصورة

$$(y_A)_{max} = \frac{u^2\sin^2(\beta)}{2g}$$

الأمر الذي يعني أن

$$|x_B| = 4(y_A)_{max}$$

11

بما أن مدى القذيفة الأولى التي أصابت الهدف الأرضي نحصل عليها من المعادلة (3.29) في الصورة

$$R = \frac{v_0{}^2\sin(2\alpha)}{g} = \frac{u^2\sin(2\alpha)}{g}$$

إذن، إحداثيات الهدف الأرضي هي $(R,0)$، وبالتالي فإن إحداثيات الهدف الجوي الذي تصيبه القذيفة الثانية هي (R,h)، أي

ولكن الزاوية γ هي

$$\gamma = \alpha - \beta = \frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2} - \beta = \frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2} \Rightarrow 2\gamma = \frac{\pi}{2} - \beta$$

وبالتالي فإن

$$\cos(2\gamma) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \sin(\beta)$$

وبالتعويض في (i) نجد أن

$$\tilde{R}_{\max} = \frac{2H}{1+\cos(2\gamma)}$$

وبما أن

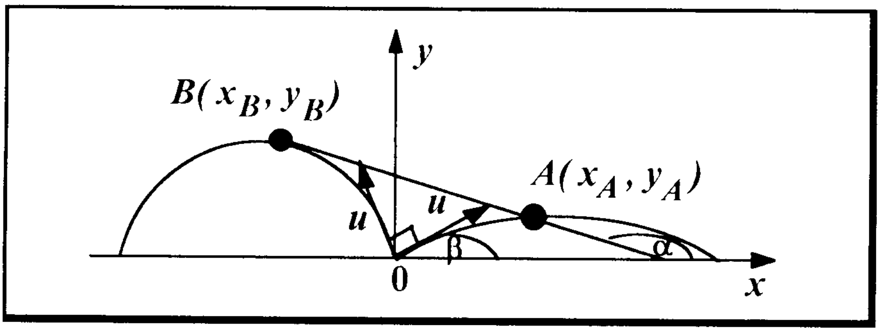
$$\cos^2(\gamma) = \frac{1}{2}\left(1+\cos(2\gamma)\right)$$

إذن فإن

$$\tilde{R}_{\max} = \frac{2H}{2\cos^2(\gamma)} = H\sec^2(\gamma)$$

9

نفرض أن سرعة القذف للجسيمين هي u، وأن زاوية القذف للجسيم A مع الأفقي هي β. ولأن القذف تم في اتجاهين متعامدين فإن زاوية قذف الجسيم الثاني B تصبح $\frac{\pi}{2} + \beta$. انظر شكل (3.17).



شكل 3.17

في الواقع، فإن معنى أن يتحـرك الخـط AB موازياً لنفسـه هـو أن ميلـه لايتوقف على الزمن t، أى أن ميله يساوي مقداراً ثابتاً. ولإثبـات ذلـك نجد من شكل (3.17) أن ميل الخط المستقيم AB هو

$$slop_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

للحصـول علـى الكميـات x_A, x_B نسـتخدم المعادلـة (3.11)، أمـا الكميات y_A, y_B فيمكن الحصول عليها باسـتخدام المعادلـة (3.16) فنجد أن

$$slop_{AB} = \frac{ut\sin\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right) - \frac{1}{2}gt^2 - ut\sin(\beta) + \frac{1}{2}gt^2}{ut\cos\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right) - ut\cos(\beta)}$$

$$= \frac{ut\cos(\beta) - ut\sin(\beta)}{-ut\sin(\beta) - ut\cos(\beta)} = \frac{\cos(\beta) - \sin(\beta)}{-\sin(\beta) - \cos(\beta)} = C$$

حيث C مقدار ثابت، وذلك لأن الزاوية β زاوية ثابتة.

هذا، وللحصول على المسافة بين النقطتين A, B نستخدم العلاقة

$$AB = \sqrt{\left(y_B - y_A\right)^2 + \left(x_B - x_A\right)^2}$$

وبالتالي فإن

$$AB = ut\sqrt{\left(\cos(\beta) - \sin(\beta)\right)^2 + \left(-\sin(\beta) - \cos(\beta)\right)^2}$$

$$= ut\sqrt{2\cos^2(\beta) + 2\sin^2(\beta)} = \sqrt{2}ut$$

ومعنى أن المسافة بين النقطتين A, B تزداد بمعدل ثابت هو أن تكون قيمة المشتقة الأولى للمسافة AB بالنسبة إلى الزمن مقداراً ثابتاً، وبما أن

$$\frac{d}{dt}(AB) = \frac{d}{dt}\left(\sqrt{2}ut\right) = \sqrt{2}u$$

ومادامت المشتقة الأولى تساوي مقداراً ثابتاً لا يتوقف على الزمن هو $\sqrt{2}u$، حيث السرعة الابتدائية u ثابتة فهذا يعني أن المسافة تزداد بمعدل ثابت. وتصل النقطة A إلى الأرض بعد زمن يساوي زمن الطيران الكلي (معادلة (3.27))، أي يساوي

$$T = \frac{2u\sin(\beta)}{g}$$

وتكون النقطة B قد قطعت مسافة أفقية (معادلة (3.11)) تساوي

$$x_B = u\cos\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)T = -u\sin(\beta)T = \frac{-2u^2\sin^2(\beta)}{g}$$

إذن

$$\left|x_B\right| = \frac{2u^2\sin^2(\beta)}{g} = 4\left(\frac{u^2\sin^2(\beta)}{2g}\right)$$

وبما أن أقصى ارتفاع يصل إليه الجسيم A نحصل عليه من المعادلة (3.33) في الصورة

$$\left(y_A\right)_{\max} = \frac{u^2\sin^2(\beta)}{2g}$$

الأمر الذي يعني أن

$$\left|x_B\right| = 4\left(y_A\right)_{\max}$$

11

بما أن مدى القذيفة الأولى التي أصابت الهدف الأرضي نحصل عليها من المعادلة (3.29) في الصورة

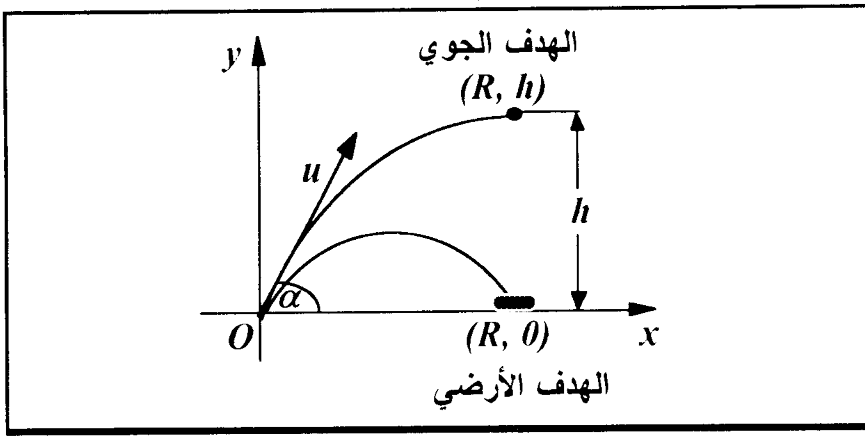
$$R = \frac{{v_0}^2\sin(2\alpha)}{g} = \frac{u^2\sin(2\alpha)}{g}$$

إذن، إحداثيات الهدف الأرضي هي $(R,0)$، وبالتالي فإن إحداثيات الهدف الجوي الذي تصيبه القذيفة الثانية هي (R,h)، أي

$$\left(R,h\right)=\left(\frac{u^{2}\sin\left(2\alpha\right)}{g},h\right)$$

انظر شكل (3.18).

شكل 3.18



بتطبيق معادلة المسار (3.21) عند النقطة $\left(R,h\right)$ ـ مع الأخذ في الاعتبار أن زاوية القذف للقذيفة الثانية هي نفسها زاوية القذف للقذيفة الأولى أي تساوي α، وأن سرعة القذف (المطلوبة) هي U ـ فإننا نحصل على

$$h=\frac{-g\left(\dfrac{u^{2}\sin\left(2\alpha\right)}{g}\right)^{2}}{2U^{2}\cos^{2}\left(\alpha\right)}+\frac{u^{2}\sin\left(2\alpha\right)}{g}\tan\left(\alpha\right)$$

وبما أن

$$\sin\left(2\alpha\right)=2\sin\left(\alpha\right)\cos\left(\alpha\right)$$

إذن فإن

$$h = \frac{-2u^4 \sin^2(\alpha)}{gU^2} + \frac{2u^2 \sin^2(\alpha)}{g}$$

وبضرب الطرفين في $\frac{g}{2\sin^2(\alpha)}$ نحصل على

$$\frac{gh}{2\sin^2(\alpha)} = u^2 - \frac{u^4}{U^2} \Rightarrow \frac{u^4}{U^2} = u^2 - \frac{gh}{2\sin^2(\alpha)}$$

وهكذا نجد أن

$$U = \frac{u^2}{\sqrt{u^2 - \frac{gh}{2\sin^2(\alpha)}}}$$

****

1

بما أن المسافة x تعطى من (4.11) في الصورة

$$x = d\sin(\omega t + \varepsilon)$$

من الشروط الابتدائية لدينا

$$t = 0,\ x = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin(\varepsilon) = 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = 0$$

وبالتالي فإن

$$x = d\sin(\omega t)$$

إذن، في نهاية ثلاث ثوان من بدء الحركة، فإن المسافات المقطوعة هي على التوالي

$$x_1 = d\sin(\omega t),\ x_2 = d\sin(\omega(t+1));$$

$$x_3 = d\sin(\omega(t+2))$$

إذن، بجمع x_1 مع x_3 - مع الأخذ في الاعتبار قانون حساب المثلثات – الذي ينص على

$$\sin(a) + \sin(b) = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

نجد أن

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= d\left(\sin(\omega t) + \sin(\omega(t+2))\right) \\ &= 2d\sin(\omega(t+1))\cos(\omega) \end{aligned}$$

وبما أن $x_2 = d\sin\left(\omega\,(t+1)\right)$، إذن فإن

$$x_1 + x_3 = 2x_2\cos(\omega)$$

ومنها نجد أن

$$\omega = \cos^{-1}\left(\frac{x_1 + x_3}{2x_2}\right)$$

ويكون زمن الذبذة الكاملة هو

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\cos^{-1}\left(\dfrac{x_1 + x_3}{2x_2}\right)}$$

3

نفرض أن معامل المرونة للخيط هو λ، وأن الطول الطبيعي للخيط هو $l = l_0 + l_1$، ولنفرض أن الجسيم ُثبت في نقطة P على بعد l_0 من نقطة A وعلى بعد l_1 من نقطة B.

لنفرض ـ أيضاً ـ أنه عندما ُشد الخيط بين النقطتين الثابتتين $A,\ B$ فإن الأطوال السابقة تغيرت لتصبح

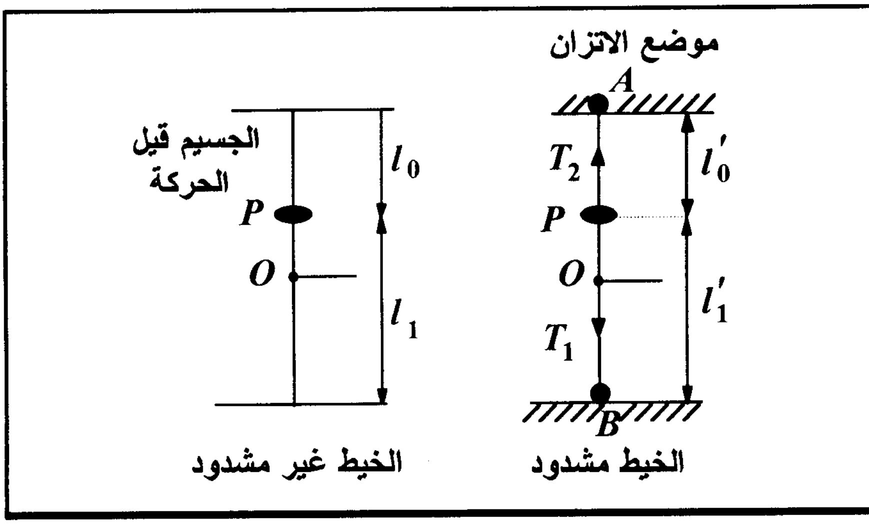
$$AP = l_0',\ PB = l_1',\ AB = l_0' + l_1' \qquad \text{(i)}$$

بحيث يتناسب الطولان المشدودان مع الطولين الطبيعيين، أي أن

$$l_0' = \alpha\, l_0,\ l_1' = \alpha\, l_1 \qquad \text{(ii)}$$

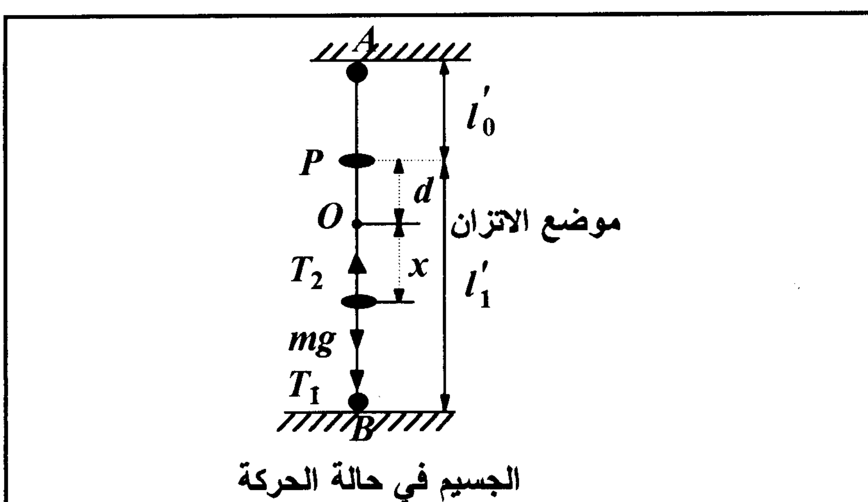
حيث α ثابت. انظر شكل (4.6).

شكل 4.6



الجسيم يتحرك تحت تأثير ثلاث قوى هي الوزن mg رأسياً لأسفل، وقوة الشد T_1 رأسياً لأسفل نتيجة التثبيت عند النقطة B، وقوة الشد T_2، وتؤثر لأعلى نتيجة التثبيت عند النقطة A. انظر شكل (4.7).

شكل 4.7



معادلة حركة الجسيم هي

$$mx^{\bullet\bullet} = mg + T_1 - T_2 \tag{iii}$$

وبما أنه ـ من قانون هوك ـ نجد أن طول الخيط في حالة T_1 تناقص بمقدار ليصبح $l_1' - d - x$، بينما ازداد طول الخيط في حالة T_2 ليصبح $l_0' + d + x$، إذن فإن

$$T_1 = \frac{\lambda}{l_1}\left(l_1' - d - x - l_1\right),\ T_2 = \frac{\lambda}{l_0}\left(l_0' + d + x - l_0\right) \tag{iv}$$

بالتعويض من (ii) في (iv) نحصل على

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{\lambda}{l_1}\left(l_1(\alpha-1) - d - x\right) \\ T_2 &= \frac{\lambda}{l_0}\left(l_0(\alpha-1) + d + x\right) \end{aligned} \tag{v}$$

بالتعويض من (v) في (iii) نحصل على

$$mx^{\bullet\bullet} = mg + \frac{\lambda}{l_1}\left(l_1(\alpha-1) - d - x\right)$$

$$-\frac{\lambda}{l_0}\left(l_0(\alpha-1) + d + x\right) = mg - \lambda(d+x)\left(\frac{l_0 + l_1}{l_0 l_1}\right) \tag{vi}$$

أو

$$mx^{\bullet\bullet} = mg - \lambda(d+x)\left(\frac{l}{l_0 l_1}\right) \tag{vii}$$

ومن الشروط الابتدائية نجد أن الجسيم بدأ من سكون، الأمر الذي يعني أن

$$x = 0, \quad x^{\bullet\bullet} = 0 \tag{viii}$$

بالتعويض من (viii) في (vii) نحصل على

$$0 = mg - \lambda d\left(\frac{l}{l_0 l_1}\right) \Rightarrow \lambda d\left(\frac{l}{l_0 l_1}\right) = mg \tag{ix}$$

إذن السعة هي

$$d = mg\left(\frac{l_0 l_1}{\lambda l}\right) \tag{x}$$

وبالتعويض عن السعة من (x) في معادلة الحركة (vii) نجد أن

$$mx^{\bullet\bullet} = mg - \lambda\left(mg\left(\frac{l_0 l_1}{\lambda l}\right) + x\right)\left(\frac{l}{l_0 l_1}\right)$$

$$= mg - \left(mg + \frac{\lambda l}{l_0 l_1}x\right) = -\frac{\lambda l}{l_0 l_1}x \tag{xi}$$

أو

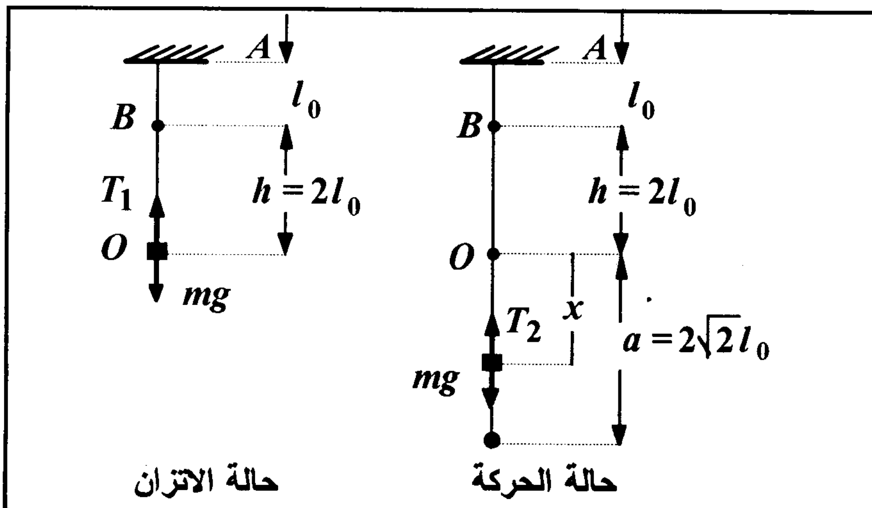
$$x^{\bullet\bullet} = -\left(\frac{\lambda l}{m l_0 l_1}\right)x \tag{xii}$$

الأمر الذي يثبت أن الحركة هي حركة توافقية بسيطة، حيث $\omega^2 = \frac{\lambda l}{m l_0 l_1}$.

5

الجسيم يسقط من نقطة A إلى نقطة B تحت تأثير الجاذبية الأرضية نتيجة لوزنه، ثم يتحرك حركة توافقية بسيطة ذات سعة معينة، ثم يتزن عند النقطة O. وعلى هذا فسوف ندرس ثلاث حالات. الحالة الأولى الحركة الخطية من النقطة A إلى النقطة B، الحالة الثانية هي حالة الاتزان، والحالة الثالثة هي حالة الحركة التوافقية البسيطة عند لحظة معينة. انظر شكل (4.8).

شكل 4.8



بما أن الجسيم يتحرك (يسقط من سكون) من النقطة A إلى النقطة B، إذن فهو يقطع المسافة l_0 حركة خطية، إذن سرعته الخطية عند النقطة B، والتي نرمز لها بالرمز v_B تعطى من المعادلة

$$v_B^2 = v_0^2 + 2gl_0 \qquad \text{(i)}$$

ولأن الجسيم سقط من سكون، فإن $v_0 = 0$، وبالتالي فإن سرعته الخطية عند النقطة B تعطى من العلاقة

$$v_B^2 = 2gl_0 \qquad \text{(ii)}$$

في موضع الاتزان O فإن الجسيم يتزن تحت تأثير وزنه، والشد في الخيط. بفرض أن الخيط المرن قد استطال بمقدار h مثلاً ثم اتزن، إذن باعتبار أن $\lambda = \frac{1}{2}mg$، وتطبيق قانون هوك نجد أن

$$mg = T_1 = \frac{\lambda}{l_0}\left(l_0 + h - l_0\right) = \frac{mgh}{2l_0} \qquad \text{(iii)}$$

وبالتالي فإن

$$h = 2l_0 \qquad \text{(iv)}$$

الآن، ندرس حركة الجسيم عند أي موضع على بعد x من موضع التوازن. في هذه الحالة الجسيم يتحرك تحت تأثير قوتين هما وزنه لأسفل، والشد في الخيط T_2 (الشد في حالة الاتزان يختلف عن الشد في حالة الحركة) ويؤثر لأعلى. إذن معادلة حركة الجسيم هي

$$m\ddot{x} = mg - T_2 = mg - \frac{\lambda}{l_0}\left(l_0 + h + x - l_0\right) \qquad \text{(v)}$$

بالتعويض عن قيمة h من (iv)، والتعويض عن $\lambda = \frac{1}{2}mg$ نحصل على

$$m\ddot{x} = mg - \frac{mg}{2l_0}\left(2l_0 + x\right) = -\frac{mg}{2l_0}x \qquad \text{(vi)}$$

إذن

$$\ddot{x} = -\frac{g}{2l_0}x = -\omega^2 x; \quad \omega^2 = \frac{g}{2l_0} \qquad \text{(vii)}$$

الأمر الذي يؤكد أن الحركة توافقية بسيطة. وللحصول على سعة هذه الحركة، نجد من أن سرعة الجسيم الذي يتحرك حركة توافقية بسيطة تعطى من (4.7) في الصورة

$$v^2 = \omega^2\left(d^2 - x^2\right) \qquad \text{(viii)}$$

حيث d هي سعة الحركة. إذن، فإن السرعة عند النقطة B وذلك عندما يكون الجسيم تحرك مسافة $x = h = 2l_0$ ـ مع الأخذ في الاعتبار أن $\omega^2 = \frac{g}{2l_0}$ ـ تأخذ الصورة

$$v_B^2 = \frac{g}{2l_0}\left(d^2 - (2l_0)^2\right) \qquad \text{(ix)}$$

بمقارنة (ix) مع (ii) نحصل على

$$\frac{g}{2l_0}\left(d^2 - (2l_0)^2\right) = 2gl_0 \;\Rightarrow\; d^2 = 8l_0^2$$

وبالتالي فالسعة هي

$$d = 2\sqrt{2}\, l_0$$

ويكون العمق المطلوب هو

$$l_0 + h + d = l_0 + 2l_0 + 2\sqrt{2}\, l_0 = \left(3 + 2\sqrt{2}\right)l_0$$

****