تمارين (١ ، ١)

(٦) $4E-2D=\begin{bmatrix}22 & 2 & 8\\ -2 & 4 & 6\\ 10 & 0 & 4\end{bmatrix}$ (١٥) $(D-E)^T=\begin{bmatrix}-5 & 0 & -1\\ 4 & -1 & 1\\ -1 & -1 & 1\end{bmatrix}$

(٢٤) $C^TA^T+2E^T=\begin{bmatrix}15 & 3 & 12\\ 14 & 0 & 7\\ 12 & 12 & 13\end{bmatrix}$ ، ولذا

$$tr\left(C^TA^T+2E^T\right)=15+0+13=28$$

(٣١) $A=\dfrac{-21}{4}B$

(٣٢) $B+A=A\Rightarrow B+A+(-A)=A+(-A)\Rightarrow B+0=0\Rightarrow B=0$

(٣٧) $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\Rightarrow A^2=\begin{bmatrix}a^2+bc & b(a+d)\\ c(a+d) & cb+d^2\end{bmatrix}$.

ولذا $A^2=I$ إذا وفقط إذا كان $a^2+bc=1$ ، $b(a+d)=0$ ، $c(a+d)=0$ و $cb+d^2=1$

وبحل هذه المعادلات نجد أن جميع المصفوفات A هي :

$$\begin{bmatrix}a & b\\ \dfrac{1-a^2}{b} & -a\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1 & 0\\ c & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 0\\ c & -1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$ حيث $b\neq 0$.

(٤١) $AB-BA=I\Rightarrow tr(AB-BA)=tr\,I=2$

$$\Rightarrow tr(AB)-tr(BA)=2$$
$$\Rightarrow tr(AB)-tr(AB)=2$$
$$\Rightarrow 0=2$$

وهذا مستحيل .

(٤٢) إذا كان $BC=I$ فإن $0=ABC=AI=A$. وهذا مستحيل .

(٤٨) بما أن $AA^T = 0$ فإن $tr\left(AA^T\right) = 0$. ولكن $tr\left(AA^T\right)$ هو مجموع مربعات عناصر A وهذا مستحيل إلا إذا كان $A = 0$.

تمارين (٢ ، ١)

(٥) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. (٧) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & \frac{-11}{13} \end{bmatrix}$. (٩) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

تمارين (٣ ، ١)

(٧) $AB = AC \Rightarrow A^{-1}(AB) = A^{-1}(AC) \Rightarrow B = C$

(٨) $\left(A^2 - 3A + I\right) = 0 \Rightarrow A^{-1}\left(A^2 - 3A + I\right) = 0 \Rightarrow A^{-1} = 3I - A$.

(١١) $(AB)^2 = A^2B^2 \Rightarrow ABAB = AABB$

$$\Rightarrow A^{-1}ABABB^{-1} = A^{-1}AABBB^{-1} \Rightarrow BA = AB$$

(١٣)

(أ) $A(I + BA) = AI + ABA = (I + AB)A$.

(ب) $(I + BA)B = IB + BAB = B(I + AB)$.

(جـ) $(I + BA)\left(I - B(I + BA)^{-1}A\right) = I + BA - (I + BA)B(I + AB)^{-1}A$

$$= I + BA - B(I + AB)(I + AB)^{-1}A = I + BA - BA = I$$

وبالمثل $\left(I - B(I + AB)^{-1}A\right)(I + BA) = I$. ولذا فإن :

$$(I + BA)^{-1} = I - B(I + AB)^{-1}A .$$

تمارين (٤ ، ١)

(١)

(أ) $\left(AB+BA \right)^{T}=\left(AB \right)^{T}+\left(BA \right)^{T}=B^{T}A^{T}+A^{T}B^{T}$

$$=BA+AB=AB+BA$$

(ب) $\left(AB-BA \right)^{T}=BA-AB=-\left(AB-BA \right)$

(جـ) بما أن AB متماثلة فإن $AB=\left(AB \right)^{T}=B^{T}A^{T}=BA$. وبالعكس ، إذا كان $AB=BA$ فإن $\left(AB \right)^{T}=AB$.

(١٠) $A^{*}\left(A^{-1} \right)^{*}=\left(\overline{A} \right)^{T}\left(\overline{A}^{-1} \right)^{T}=\left(AA^{-1} \right)^{T}=I$. وبالمثل $\left(A^{-1} \right)^{*}A^{*}=I$. إذن ، $\left(A^{*} \right)^{-1}=\left(A^{-1} \right)^{*}$.

(١٢) $\left(A+A^{*} \right)^{*}=A^{*}+\left(A^{*} \right)^{*}=A^{*}+A$.

$\left(A-A^{*} \right)^{*}=A^{*}-\left(A^{*} \right)^{*}=A^{*}-A=-\left(A-A^{*} \right)$.

تمارين (١ ، ٢)

(١) -7 (٢) 0 (٣) 33 (٤) 18 (٥) 0 (٦) -51

(٩) $k=-1,2$ (١٠) $k=-1$ (١١) $k=-2,3,4$ (١٢) $\lambda=\dfrac{3\pm\sqrt{33}}{4}$.

(١٣) 1 (١٧) $\det\left(5A \right)=25\det A$.

تمارين (٢ ، ٢)

(١) 52 (٢) 0 (٣) 9 (٤) 336 (٥) -18 (٦) -80

(٧) -770 (٨) 16 (٩) -18 (١٠) 156

(١٩) $\det\left(5A^{2}A^{T} \right)=5^{4}\left(\det A \right)^{2}\left(\det A^{T} \right)=5^{4}\times 3^{2}\times 3=16875$.

(٢١) $\det\left(ABA^{T}B^{-3}A^{2}B^{T} \right)=\dfrac{\left(\det A \right)^{4}}{\det B}=\dfrac{-1}{2}\times 3^{4}$.

(٢٢) $\det\left(A^{3}+5A^{2}+6A \right)=\det A\det\left(A^{2}+5A+6 \right)=0$.

(٢٣) $\det A^3 = \det I = 1 \Rightarrow \det A = 1$ (٢٤) خاطئة

(٢٥) $\det A^2 = \det A \det A = 7 \Rightarrow \det A = \pm\sqrt{7} \neq 0$. ولذا فإن للمصفوفة A معكوساً .

تمارين (٣ ، ٢)

(١) $A(\operatorname{adj} A) = (\operatorname{adj} A)A = (\det A)I = -45\,I$. ولذا فإن :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(\operatorname{adj} A) = \frac{-1}{45}\begin{bmatrix} 9 & 9 & -9 \\ 12 & -13 & 3 \\ -24 & 11 & -6 \end{bmatrix} .$$

(٢) $A(\operatorname{adj} A) = (\operatorname{adj} A)A = (\det A)I = 17\,I$.ولذا فإن:

$$A^{-1} = \frac{1}{17}\begin{bmatrix} -1 & 8 & -13 \\ -7 & 5 & -16 \\ -2 & -1 & 8 \end{bmatrix} .$$

(٣) $A(\operatorname{adj} A) = (\operatorname{adj} A)A = (\det A)I = 252\,I$. ولذا فإن :

$$A^{-1} = \frac{1}{252}\begin{bmatrix} -72 & -18 & 54 \\ 22 & -19 & 15 \\ 16 & 32 & -12 \end{bmatrix} .$$

(٤) $A(\operatorname{adj} A) = (\operatorname{adj} A)A = (\det A)I = 21\,I$.

(٥) $(\det A)I = 18\,I$ (٦) $(\det A)I = -24\,I$.

تمارين (٤ ، ٢)

(١) $A^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (٦) استخدم الاستقراء الرياضي على m

(٧) (أ) $A^n = 0$ لكل $n \geq 4$ ولذا فإن :

$$B = A - \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{3}A^3 = \begin{bmatrix} 0 & a & \frac{1}{2}a^2 & \frac{1}{3}a^3 \\ 0 & 0 & a & \frac{1}{2}a^2 \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(ب) $B^n = 0$ لكل $n \geq 4$. ولذا فإن $B + \frac{1}{2!}B^2 + \frac{1}{3!}B^3 = A$.

(٨) كل من A^2 ، B^2 ، $AB + BA$ متماثلة ، $AB - BA$ متماثلة تخالفيا ، $A^m B^k A^m$ متماثلة إذا كان k زوجي و متماثلة تخالفيا إذا كان k فردي .

(١٠) $\det A = 4x + 2 \neq 0$ ولذا فإن $x \neq \frac{-1}{2}$.

(١١) (أ) $B^{-1} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ (ب) $B^{-1}AB = \begin{bmatrix} 9a & 0 & 0 \\ 0 & 9b & 0 \\ 0 & 0 & 9c \end{bmatrix}$

(جـ) $\det A = \det\left(B^{-1}AB\right) = \det B^{-1} \det A = \det B = 3^6 abc$.

(١٣) $(x + 3a)(x - a)^3 = 0$ ولذا فإن $x = a$ أو $x = -3a$.

(١٤) $\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ B - A & A - B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A + B & B \\ 0 & A - B \end{vmatrix}$

$$= \left|\begin{bmatrix} I & B \\ 0 & A - B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A + B & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\right| = \begin{vmatrix} I & B \\ 0 & A - B \end{vmatrix}\begin{vmatrix} A + B & 0 \\ 0 & I \end{vmatrix}$$

$$= \det(A - B)\det(A + B)$$

(١٨) $\det\left(A^2 B^{-1} A^T B^3\right) = (\det A)^3 (\det B)^2 = 2^3(-2)^2 = 32$

(٢٢) $\det\left(AB + A^2C\right) = \det A\left(\det(B + AC)\right) = 0$.

تمارين (١ ، ٣)

(١) $S=\left\{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right\}$ (٢) $S=\left\{\left(1,\frac{1}{2}\right)\right\}$ (٣) النظام غير متسق

(٤) $S=\{(38+22t,-16-9t,t):t\in\mathbf{R}\}$ (٥) النظام غير متسق

(٦) $S=\{(2,1,-1)\}$ (٧) $S=\{(t-1,2s,s,t):s,t\in\mathbf{R}\}$

(١٢) $S=\left\{\left(1+\frac{1}{3}t,-1+\frac{7}{3}t,t\right):t\in\mathbf{R}\right\}$ (١٣) $S=\left\{\left(\frac{6}{13},-\frac{17}{13}\right)\right\}$

(١٥) $S=\left\{\left(-3r-4s-2t,r,-2s,s,t,\frac{1}{3}\right):r,s,t\in\mathbf{R}\right\}$

(١٦) $a=b+c$ (١٩) $a=2$ أو $a=\frac{-3}{2}$ (عدد لا نهائي) ، لا يوجد حل ما عدا ذلك .

(٢١) $S=\left\{\left(\frac{5}{9},9,\frac{1}{3}\right)\right\}$

(٢٤) يكون النظام متسقا إذا كان $3a+2b+2c+d=0$ وهذا مستحيل لأن $a,b,c,d>0$ ولذا لا يوجـد حل .

(٢٥) (ب) $S=\left\{\left(\frac{20}{9}-\frac{1}{6}t,-\frac{4}{9}-\frac{2}{3}t,t\right):t\in\mathbf{R}\right\}$

(جـ) $S=\left\{\left(-\frac{2}{9}-\frac{1}{2}t,t,\frac{40}{63}\right):t\in\mathbf{R}\right\}$

(٢٦) $S=\{(24+3t,4-2t+1,4+5t+2,4,t):u,t\in\mathbf{R}\}$.

(٢٧) (ب) $b_1=b_3+b_4$ و $b_2=2b_3+b_4$.

تمارين (٢ ، ٣)

(١) $a=-3$ ، $S=\{(9t,-5t,t)\}$.

(٤) $a=1$ ، $S=\{(-t,t,0):t\in\mathbf{R}\}$ أو $a=-1$ ، $S=\{(t,0,t):t\in\mathbf{R}\}$.

(٦) $(-3t,3t,t)=t(-3,3,1)$

$s(-7,-3,1,0,0)+t(-13,-10,0,0,1)$ (٨)

$s(-7,15,7,2,0)+t(-7,17,9,0,4)$ (٩)

$r(7,9,1,0,0)+s(-4,-5,0,1,0)+t(5,6,0,0,1)$ (١٠)

تمارين (٣ ، ٣)

(١) (أ) $x=\frac{-13}{22}, y=\frac{30}{11}$.　　(ب) $x=\frac{14}{17}, y=\frac{30}{17}$.

(٢) $x=1, y=\frac{1}{7}, z=\frac{6}{7}$.　　(٣) (أ) $x=-11, y=\frac{5}{2}, z=\frac{-23}{2}$.

(٤) $x_1=a, x_2=1, x_3=-1$.　　(٥) $y=\frac{705}{338}, z=\frac{107}{337}$.

(٦) $x=\frac{-3}{4}$.　　(٧) $x=\frac{12}{79}, y=\frac{-37}{79}, z=\frac{-2}{79}$.　　(٨) $x_3=3$.

(٩) $x_1=1, x_2=0, x_3=2, x_4=0$.

(١٠) $x_1=x\cos\theta+y\sin\theta \quad , \quad y_1=-x\sin\theta+y\cos\theta$.

(١١) لا ، يوجد عدد غير منته من الحلول .

(١٢) (أ) $a\neq\pm 2$ ، $y=\frac{a+8}{(a+2)(a-2)}$ ، $x=\frac{4a+2}{3(a+2)(a-2)}$.

(ب) $a\neq\pm\sqrt{3}$, $y=\frac{-4a-15}{4(a^2-3)}$, $x=\frac{5a+4}{6(a^2-3)}$.

تمارين (١ ، ٤)

(١) ليست فضاء متجهات　(٢) ليست فضاء متجهات　(٣) فضاء متجهات　(٤) ليست فضاء متجهات

(٥) فضاء متجهات　(٦) فضاء متجهات　(٧) ليست فضاء متجهات　(٨) ليست فضاء متجهات

(٩) ليست فضاء متجهات　(١٠) فضاء متجهات　(١١) ليست فضاء متجهات　(١٢) ليست فضاء متجهات

(١٣) ليست فضاء متجهات　(١٤) فضاء متجهات　(١٥) فضاء متجهات　(١٦) ليست فضاء متجهات

(١٧) فضاء متجهات　(١٨) ليست فضاء متجهات　(١٩) فضاء متجهات　(٢٠) ليست فضاء متجهات

تمارين (٢ ، ٤)

(١) فضاء جزئي (٢) فضاء جزئي (٣) ليست فضاء جزئي (٤) ليست فضاء جزئي
(٥) فضاء جزئي (٦) فضاء جزئي (٧) فضاء جزئي (٨) ليست فضاء جزئي
(٩) ليست فضاء جزئي (١٠) فضاء جزئي (١١) فضاء جزئي (١٢) ليست فضاء جزئي
(١٣) ليست فضاء جزئي (١٤) ليست فضاء جزئي (١٥) فضاء جزئي (١٦) ليست فضاء جزئي
(١٧) فضاء جزئي (١٨) فضاء جزئي (١٩) فضاء جزئي (٢٠) فضاء جزئي
(٢١) فضاء جزئي (٢٢) فضاء جزئي (٢٣) فضاء جزئي (٢٤) فضاء جزئي
(٢٥) فضاء جزئي (٢٦) ليست فضاء جزئي (٢٧) فضاء جزئي (٢٨) ليست فضاء جزئي
(٢٩) فضاء جزئي (٣٠) فضاء جزئي

تمارين (٣ ، ٤)

(١) $3(1,-1,1)+2(1,0,1)-4(1,1,0)$.

(٢) $-2(2,1,4)+(1,-1,3)-2(3,2,5)$.

(٣) $0(2,1,0,3)+0(1,-1,3)+0(3,2,5)$.

(٤) $2(2,1,0,3)-(3,-1,5,2)-(-1,0,2,1)$.

(٥) $1+x^2=\frac{1}{3}(1-x)+\frac{1}{3}(2+x+3x^2)$.

(٦) $2x^2-3x+1=-3(x+1)+0(x^2+x)+2(x^2+2)$.

(٧) $9x^2+8x+7=0(4x^2+x+2)-2(3x^2-x+1)+3(5x^2+2x+3)$.

(٨) $A=5A_1-A_2+0A_3$. (٩) $A=A_1+2A_2-3A_3$.

(١٠) $\mathbf{w}\in\langle S\rangle$ لأن $\mathbf{w}=2\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2$. (١١) $\mathbf{w}\in\langle S\rangle$ لأن $\mathbf{w}=2\mathbf{v}_1+2\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_3$.

(١٢) (أ) $\mathbf{w}_1\in\langle S\rangle$ (ب) $\mathbf{w}_2\notin\langle S\rangle$. (١٣) $p(x)\notin\langle S\rangle$.

(١٤) $p(x)\in\langle S\rangle$ لأن $p(x)=4p_1(x)-5p_2(x)+p_3(x)$.

(١٥) كل من $\cos 2x$ و 1 ينتمي إلى $\langle S\rangle$ ولكن x^2+3 و $\sin x$ لا ينتميان إلى $\langle S\rangle$.

(١٦) $A\in\langle S\rangle$ لأن $A=3A_1-A_2$.

(١٧) (أ) $\langle S_1\rangle=\mathbf{R}^3$ (ب) $\langle S_2\rangle=\mathbf{R}^3$ (جـ) $\langle S_3\rangle\neq\mathbf{R}^3$.

(١٨) (أ) $\langle S_1\rangle=\mathbf{P}_2$ (ب) $\langle S_2\rangle\neq\mathbf{P}_2$ (جـ) $\langle S_3\rangle=\mathbf{P}_2$.

(١٩) (أ) $\langle S_1 \rangle = \mathbf{M}_{22}$ (ب) $\langle S_2 \rangle \neq \mathbf{M}_{22}$.

(٢٠) (أ) لا (ب) نعم (جـ) لا .

(٢١) (أ) $\alpha_1 = -\beta_1 = \beta_2$ و $\alpha_2 = -2\beta_1$

(٢٣) (أ) $\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_1 x - \alpha_2 x^2$ (جـ) $5\beta_3 = -\beta_4$.

تمارين (٤ ، ٤)

(١) مستقلة خطيا (٢) مستقلة خطيا (٣) مستقلة خطيا (٤) مرتبطة خطيا (٥) مرتبطة خطيا

(٦) مرتبطة خطيا (٧) مرتبطة خطيا (٨) مرتبطة خطيا (٩) مستقلة خطيا (١٠) مرتبطة خطيا

(١١) مرتبطة خطيا (١٢) مستقلة خطيا (١٣) مرتبطة خطيا (١٤) مستقلة خطيا (١٥) مستقلة خطيا

(١٦) مرتبطة خطيا (١٧) مستقلة خطيا (١٨) مستقلة خطيا (١٩) مرتبطة خطيا (٢٠) مستقلة خطيا

(٢١) (ب) $x \neq -\frac{1}{3}$.

تمارين (٥ ، ٤)

(١) كل من (أ) ، (ب) و (د) أساس . (٢) كل من (ب) ، (جـ) و (د) أساس . (٣) كل من (جـ) و (د) أساس .

(٤) كل من (أ) و (د) أساس . (٥) كل من (ب) ، (جـ) و (د) أساس . (٦) (ب) $\{(-1,1,-1)\}$ ،

(هـ) $\{(-1,1,-1,0),(0,0,-1,1)\}$ (ز) $\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$

(ي) $\{x - x^2, 1\}$

(٧) (أ) $\{(-1,7,10)\}$ (ب) $\{(-1,5,4,0),(1,7,0,-4)\}$

(جـ) $\left\{\left(-\frac{1}{4},-\frac{1}{4},1,0\right),(0,-1,0,1)\right\}$ (د) $\{(4,-5,1)\}$

(هـ) $\{(3,5,1,0),(-2,-4,0,1)\}$ (و) $\{(-3,-2,-1,1)\}$

(ز) $\{(-1,1,0,0,0),(0,0,-1,1,0),(-1,0,0,0,1)\}$

(٨) (د) $\{(0,0,1,1),(1,1,1,1),(0,1,0,0),(0,0,1,0)\}$

(هـ) $\{x^2+1, x^2+x, 1, x^3\}$

(٩) (د) $\{(1,2),(1,3)\}$ (هـ) $\{(-1,1,0),(1,0,-1),(0,1,1)\}$

(و) $\{(1,1,0,0),(0,1,1,0),(0,0,1,1),(1,0,1,0)\}$

(ز) $\left\{x^2+x-1, 2x^2-3, 3x+1\right\}$

(١٣) مستحيل ، كثيرات الحدود هذه تولد فضاءاً جزئياً أساسه $\left\{x-1, x^2-1, x^3-1\right\}$.

(١٤) (أ) أساس وكل من (ب) ، (جـ) و (د) ليست أساس .

(١٥) يمكن أن تولد $\mathbb{R}^3$ ولكن لا يمكن أن تكون أساس .

تمارين (٦ ، ٤)

(١) (د) $\begin{bmatrix} a \\ 2b-c \\ c-b \end{bmatrix}$ (هـ) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} a-b \\ a+b \\ -a+3b+2c \end{bmatrix}$ (و) $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

(٣) ${}_{C}P_{B}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$ ، $[\mathbf{v}]_B=\begin{bmatrix} -2 \\ 7 \end{bmatrix}$ ، $[\mathbf{v}]_C=\begin{bmatrix} -1 \\ 6 \end{bmatrix}$.

(٥) ${}_{C}P_{B}=\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{12} \\ \frac{-3}{4} & \frac{-17}{12} & \frac{-17}{12} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ ، $[\mathbf{v}]_C=\begin{bmatrix} \frac{19}{12} \\ \frac{-43}{12} \\ \frac{4}{3} \end{bmatrix}$.

(٧) ${}_{C}P_{B}=\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{7}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$ ، ${}_{B}P_{C}=\begin{bmatrix} -\frac{2}{9} & \frac{7}{9} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$ ، $[\mathbf{v}]_B=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ، $[\mathbf{v}]_C=\begin{bmatrix} -\frac{11}{4} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

(٩) ${}_{C}P_{B}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

$$
\cdot\ [\mathbf{v}]_C = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{26}{3} \\ \frac{-13}{3} \\ \frac{-7}{3} \end{bmatrix} \text{،} \quad [\mathbf{v}]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix} \text{،} \quad {}_C P_B = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \ (١١)
$$

$$
\cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \text{ و } \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} (\text{أ})(١٧) \ . \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{-1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} (\text{جـ}) \text{،} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} (\text{ب})(١٦)
$$

تمارين (٧ ، ٤)

(١) $\text{rank} = 2$ ، $\text{nullity} = 1$ (٣) $\text{rank} = 2$ ، $\text{nullity} = 0$

(٤) $\text{rank} = 2$ ، $\text{nullity} = 1$ (٥) $\text{rank} = 2$ ، $\text{nullity} = 2$

(٦) $\text{rank} = 4$ ، $\text{nullity} = 1$

(٩) $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ ،

$\{[1,0,-1,1]^T,[0,1,2,0]^T,[0,0,2,-1]^T\}$.

(١١) $\{(1,2,-1,3),(0,3,1,1)\}$ ، $\{[1,0]^T,[0,1]^T\}$.

(١٢) $\text{rank}(A) = 6$ ، النظام متسق . (١٣) $\text{rank}(A) = 6$ ، $\text{nullity}(A) = 8-6 = 2$.

(١٤) $\text{nullity } A = 5$ ، $\dim(\text{row}A) = 3$ ، $\text{rank}(A^T) = 3$.

(١٥) $\dim \text{col}(A) = 2$ (١٦) $\dim \text{row}(A) = 3$ (١٧) 5 (١٨) 5 (١٩) 2

(٢٠)(أ) $\{(1,1,0,0,0),(0,-2,2,5,1),(0,0,2,-3,6)\}$

(ب) $\{[1,5,-6]^T,[0,1,-1]^T,[0,0,1]^T\}$

تمارين (٨ ، ٤)

(١) (أ) ليس جمعا مباشرا (ب) جمعا مباشرا (جـ) ليس جمعا مباشرا (د) ليس جمعا مباشرا
(هـ) جمعا مباشرا (و) ليس جمعا مباشرا

(٢) (أ) جمعا مباشرا (ب) جمعا مباشرا (جـ) ليس جمعا مباشرا .

(٣) نعم (٤) لا (٥) نعم

(٧) $\mathbf{W}_1 = \langle \{ (0,0,1,0), (0,0,0,1) \} \rangle$ و

$\mathbf{W}_2 = \langle \{ (1,1,1,1), (1,1,1,-1) \} \rangle$ (أجوبة أخرى ممكنة) .

(١٤) $\mathbf{W}_1 = \langle \{ (1,0,0), (0,1,0) \} \rangle$ ، $\mathbf{W}_2 = \langle \{ (1,0,0), (0,0,1) \} \rangle$

و $\mathbf{W}_3 = \langle \{ (1,0,0), (1,1,1) \} \rangle$ (أجوبة أخرى ممكنة) .

تمارين (١ ، ٥)

(١) ليست ضربا داخليا (٢) ليست ضربا داخليا (٣) ضربا داخليا (٤) ليست ضربا داخليا
(٥) ليست ضربا داخليا (٦) ليست ضربا داخليا (٧) ليست ضربا داخليا (٨) ليست ضربا داخليا
(١٠) ليست ضربا داخليا (١٢) ليست ضربا داخليا (١٣) ليست ضربا داخليا (١٤) ليست ضربا داخليا
(١٥) ليست ضربا داخليا .

تمارين (٢ ، ٥)

(١) $\cos\theta = 0$ والمتجهان متعامدان (٣) $\cos\theta = \frac{-4}{\sqrt{194}}$ (٥) $\cos\theta = -1$

(٧) $\cos\theta = \frac{27}{\sqrt{13770}}$ (٩) $\cos\theta = \frac{5}{6}$ (١١) $\cos\theta = \frac{37}{\sqrt{1860}}$

(١٣) $\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{7}}$ (١٥) $\cos\theta = \frac{27}{\sqrt{2580}}$ (١٧) $\cos\theta = 0$ والمتجهان متعامدان

(١٩) $\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{175}}$ (٢٢) $\cos\theta = 0$ والمتجهان متعامدان .

(٣٠) $\| \mathbf{u} \| = \| (\mathbf{u} - \mathbf{v}) + \mathbf{v} \| \le \| \mathbf{u} - \mathbf{v} \| + \| \mathbf{v} \|$.

(٣١) $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle = \| \mathbf{u} \|^2 - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle - \| \mathbf{v} \|^2 = 0$

(لأن $\| \mathbf{u} \| = \| \mathbf{v} \|$) .

تمارين (٣ ، ٥)

(١)(أ) $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{10}},-\frac{3}{\sqrt{10}}\right),\left(\frac{3}{\sqrt{10}},\frac{1}{\sqrt{10}}\right)\right\}$ (ب) $\{(1,0),(0,-1)\}$

(٣)(أ) $\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1),\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,1),\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)\right\}$

(ب) $\left\{(1,0,0),\frac{1}{\sqrt{53}}(0,7,-2),\frac{1}{\sqrt{53}}\left(0,2,\frac{7}{\sqrt{53}}\right)\right\}$

(٤)(جـ) $\left\{\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,1),\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-1),\frac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,0)\right\}$

(٥)

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}(0,2,1,0),\frac{1}{\sqrt{30}}(5,-1,2,0),\frac{1}{\sqrt{10}}(1,1,-2,-2),\frac{1}{\sqrt{15}}(1,1,-2,3)\right\}$$

(٧)(أ) $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0),\frac{1}{3}(-1,-1,2)\right\}$

(ب) $\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}(0,1,2),\left(\frac{-\sqrt{5}}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{30}},\frac{1}{\sqrt{30}}\right)\right\}$

(٩)(أ) $\left\{(1,-1,0,1),(1,1,0,0),\frac{1}{3}(-1,1,0,2)\right\}$

(ب) $\left\{(1,1,-1,-1),(2,1,1,2),\frac{1}{10}(4,-3,7,-6)\right\}$

(١١)(ب) $\left\{1,x-1,x^2-2x+\frac{2}{3}\right\}$ (١٢) $\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin x,\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos x\right\}$

(١٣) $\left\{1,\frac{\sqrt{2}\left(e^x-e+1\right)}{\sqrt{4e-e^2-3}}\right\}$ (١٤) $\{1,x,3x^2-1\}$

(١٥) $\{1,x,x^2-2,-17x+5x^3,72-155x^2+35x^4\}$

(١٧)(أ) $\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1),\frac{1}{\sqrt{6}}(-2,1,1),\frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1)\right\}$

(ب) $\left\{ \frac{1}{5}(3,0,4), \frac{1}{\sqrt{850}}(-12,25,9), \frac{1}{\sqrt{34}}(4,3,-3) \right\}$

تمارين (٤ ، ٥)

(١) $\mathbf{v}=\left(-\frac{2}{5},2,\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{7}{5},0,\frac{14}{5}\right)$ (٢) $\mathbf{v}=\left(\frac{10}{3},\frac{2}{3},\frac{8}{3}\right)+\left(-\frac{7}{3},\frac{7}{3},\frac{7}{3}\right)$.

(٣) $\mathbf{v}=(2,4,0,0,)+(2,-1,3,-1)$

(٤) $\mathbf{v}=\left(0,\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)+\left(1,-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$

(٥) $\mathbf{v}=\left(-\frac{1}{5},\frac{2}{5},1,1\right)+\left(\frac{6}{5},-\frac{1}{5},0,0\right)$

(٦) $\mathbf{v}=\left(x+\frac{6}{5}\right)+\left(x^2-x+\frac{1}{6}\right)$

تمارين (١ ، ٦)

(١) تحويل خطي (٢) تحويل خطي (٣) تحويل خطي (٥) تحويل خطي (٦) تحويل خطي (٧) تحويل خطي

(١٠) تحويل خطي (١٣) ليس تحويلا خطيا (١٦) تحويل خطي (١٧) تحويل خطي (١٨) تحويل خطي

(٢٠) تحويل خطي (٢١) تحويل خطي (٢٢) تحويل خطي (٢٣) تحويل خطي (٢٤) ليس تحويلا خطيا

(٢٧) تحويل خطي (٢٨) تحويل خطي (٣٠) ليس تحويلا خطيا (٣٤) تحويل خطي (٣٨) ليس تحويلا خطيا

(٤٠) تحويل خطي (٤٢) ليس تحويلا خطيا (٤٣) تحويل خطي

(٤٤) $T(x,y)=(-4x+5y,x-3y)$.

(٤٥) $T(x,y)=\frac{1}{3}(x-y,3y,x-y)$.

(٤٧) $T(2\mathbf{v}_1-3\mathbf{v}_2+4\mathbf{v}_3)=(-10,-7,6)$.

(٥٠) $T\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=3a-3c+2b$.

(٥١) (ب) $T(\mathbf{v})=\frac{1}{3}(7\mathbf{v}-9\mathbf{w}), T(\mathbf{w})=\frac{1}{3}(\mathbf{v}+3\mathbf{w})$.

(٥٢) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$ (٥٤) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ (٥٦) $\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ (٥٧) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(١٢)(ب) خذ $T:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ حيث $T(x,y)=(x,0)$.

تمارين (٢ ، ٦)

(١) $\text{nullity}\,T = 1$ ، $\ker T = \{(24,-12,4,1)t : t \in \mathbf{R}\}$ ،

$\text{rank}\,T = 3$ ، $\text{Im}\,T = \{(r,s,t) : r,s,t \in \mathbf{R}\}$.

(٤) $\text{nullity}\,T = 1$ ، $\ker T = \{(-1,2,1)t : t \in \mathbf{R}\}$ ،

$\text{rank}\,T = 3$ ، $\text{Im}\,T = \{(s,t,s-t,s-2t) : s,t \in \mathbf{R}\}$

(٨) $\text{nullity}\,T = 2$ ، $\ker T = \{(-3s+t, 7s+t, s, -t) : s,t \in \mathbf{R}\}$

$\text{rank}\,T = 2$ ، $\text{Im}\,T = \{(s,t,s-t) : s,t \in \mathbf{R}\}$

(١٠) $\text{nullity}\,T = 1$ ، $\ker T = \{(-s,2s,s) : s \in \mathbf{R}\}$

$\text{rank}\,T = 2$ ، $\text{Im}\,T = \{(s,t,s-t,s-2t) : s,t \in \mathbf{R}\}$.

(١٢) $\text{nullity}\,T = 3$ ، $\ker T = \{(-t-s-2r, 6t-2s, r, s, t) : r,s,t \in \mathbf{R}\}$

$\text{rank}\,T = 2$ ، $\text{Im}\,T = \{(17s, 17t, 18s-5t) : s,t \in \mathbf{R}\}$.

(١٣) $\text{nullity}\,T = 2$ ، $\ker T = \{(-2s+t, 5+2t, s, -4t, t) : s,t \in \mathbf{R}\}$

$\text{rank}\,T = 3$ ، $\text{Im}\,T = \{(s+2t+r, 2s+t+r, -s, 2t) : s,t,r \in \mathbf{R}\}$.

(١٦) $\text{nullity}\,T = 2$ ، $\ker T = \left\{ t\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : t,s \in \mathbf{R} \right\}$

$\text{rank}\,T = 2$ ، $\text{Im}\,T = \left\{ t\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : t,s \in \mathbf{R} \right\}$.

(١٧) $\text{nullity}\,T = 2$ ، $\ker T = \left\{ s\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : t,s \in \mathbf{R} \right\}$.

$\ker T=\{a(x^2-x):a\in\mathbf{R}\}$, $\text{nullity}\, T=1$ (٢١)

. $\text{Im}T=\{(s,t):s,t\in\mathbf{R}\}$, $\text{rank}T=2$

تمارين (٣ ، ٦)

(١) تماثل (٢) $\ker T=\left\{\left(-\frac{3}{2}t,t\right):t\in\mathbf{R}\right\}\neq\{0\}$

(٣) $\ker T=\{(t,t):t\in\mathbf{R}\}\neq\{0\}$. (٤) $\ker T=\{(0,t,-t):t\in\mathbf{R}\}\neq\{0\}$.

(٥) تماثل (٦) تماثل (٧) تماثل (٨) $\ker T\neq\{0\}$

(٩) تماثل ،

. $T^{-1}=(x,y,z)=(4x-2y-3z,-11x+6y+9z,-12x+7y+10z)$

(١٠) تماثل ، $T^{-1}=(x,y,z,t)=(y-x,-x,z,-t)$.

(١١) (أ) $\det A=6$ ولذا فإن T_A تماثل (ب) $\det A=-1$ ولذا فإن T_A تماثل

(جـ) $\det A=0$ ولذا فإن T_A ليس تماثل .

(١٢) (أ) $\det A=0$ ولذا فإن T_A ليس تماثل (ب) $\det A=15$ ولذا فإن T_A تماثل

(جـ) $\det A=1$ ولذا فإن T_A تماثل .

(١٣) $\ker T=\{0\}$ ، تماثل . (١٤) $\ker T=\{0\}$ ، تماثل .

(١٥) $\ker T=\{0\}$ ، تماثل ، $T^{-1}\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3a-2c & 3b-2d\\ a+c & b+d\end{bmatrix}$

(١٦) تماثل ، (١٧) تماثل ، $T^{-1}(a,b,c)=\frac{1}{2}\left[2a+(b-c)x-(2a-b-c)x^2\right]$

(١٨) تماثل ، $T^{-1}(p(x))=p(x+3)$ (١٩) تماثل ، (٢٠) تماثل .

تمارين (٤ ، ٦)

(١) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0\\ -5 & 6 & 4\end{bmatrix}$.

(٢) (أ) $T(\mathbf{v}_1)=-\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_3$ ، $T(\mathbf{v}_2)=-\mathbf{w}_1-\mathbf{w}_3$ و $T(\mathbf{v}_3)=\mathbf{w}_1-\mathbf{w}_2$.

(ب) $[T(\mathbf{v}_1)]_B=\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix},[T(\mathbf{v}_2)]_B=\begin{bmatrix}-1\\0\\-1\end{bmatrix}\ [T(\mathbf{v}_3)]_B=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$

(جـ) $\begin{bmatrix}0&-1&1\\-1&0&-1\\1&1&0\end{bmatrix}$ (٤) (أ) $[T]_B=\begin{bmatrix}2&4&1&5\\-3&0&0&1\\1&0&4&0\\0&-5&0&-1\end{bmatrix}$

(ب) $P=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-2&1&0&0\\1&1&1&0\\1&-3&5&1\end{bmatrix}$ (جـ) $[T]_C=\begin{bmatrix}0&-10&26&5\\-2&-23&57&11\\7&37&-79&-16\\-32&-246&535&107\end{bmatrix}$

(د) $T(\mathbf{v}_1)=-2\mathbf{v}_2+7\mathbf{v}_3-32\mathbf{v}_4$

$T(\mathbf{v}_2)=-10\mathbf{v}_1-23\mathbf{v}_2+37\mathbf{v}_3-246\mathbf{v}_4$

$T(\mathbf{v}_3)=26\mathbf{v}_1+57\mathbf{v}_2-79\mathbf{v}_3+535\mathbf{v}_4$

$T(\mathbf{v}_4)=5\mathbf{v}_1+11\mathbf{v}_2-16\mathbf{v}_3+107\mathbf{v}_4$

(٦) $[T]_B=\begin{bmatrix}5&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ (٧) $[T]_B=\begin{bmatrix}3&0&0&0\\0&2&1&0\\0&0&2&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$

(٩) (أ) $[T(\mathbf{v}_1)]_B=\begin{bmatrix}1\\2\\6\end{bmatrix}$ ، $[T(\mathbf{v}_2)]_B=\begin{bmatrix}3\\0\\-2\end{bmatrix}$ و

$[T(\mathbf{v}_3)]_B=\begin{bmatrix}-1\\5\\4\end{bmatrix}$.

(ب) $T(\mathbf{v}_1)=16+51x+19x^2$ ، $T(\mathbf{v}_2)=-16-5x+5x^2$ و

$T(\mathbf{v}_3)=7+40x+15x^2$.

(جـ) $T\left(a_0+a_1x+a_2x^2\right)=\dfrac{239a_0-161a_1+289a_2}{24}$

$+\dfrac{201a_0-111a_1+247a_2}{8}x+\dfrac{61a_0-31a_1+107a_2}{12}x^2$

(د) $T\left(1+x^2\right)=22+56x+14x^2$.

(١٠) $\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 3 & 2\\ \frac{1}{2} & 1 & 1\end{bmatrix}$ (١١) $\begin{bmatrix}2 & 2\\ -3 & -2\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ (١٢) $\begin{bmatrix}0 & 1 & -1 & -1\\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2}\end{bmatrix}$

(١٣) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$ (١٤) $\begin{bmatrix}-1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}$ (١٥) $\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$

(١٨) $\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$ (٢١) $\begin{bmatrix}5 & -1\\ -2 & 0\end{bmatrix}$

(٢٩) (أ) $T\left(2-x+x^2\right)=10-3x+4x^2+x^3$

(ب) $T[p(x)+q(x)]=(x+5)[p(x)+q(x)]$

$=(x+5)p(x)+(x+5)q(x)=T(p(x))+T(q(x))$

$T(\alpha p(x))=(x+5)(\alpha(p(x)))=\alpha(x+5)p(x)=\alpha T(p(x))$

(جـ) $[T]_B^C=\begin{bmatrix}5 & 0 & 0\\ 1 & 5 & 0\\ 0 & 1 & 5\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

(٣٠) (أ) $(2,5,8)$ (جـ) $\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$

(٣٢) $T(e^{2x}) = 2e^{2x} = 2\mathbf{v}_1$ ، $T(x e^{2x}) = \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2$ و $T(x^2 e^{2x}) = 2\mathbf{v}_2 + 3\mathbf{v}_3$

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

تمارين (١ ، ٧)

(١) $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = -5$ و $E_5 = \langle (2,1) \rangle, E_{-5} = \langle (-1,2) \rangle$.

(٢) $\lambda_2 = -2, \lambda_1 = 3$ و $E_{-2} = \langle (1,1) \rangle$ ، $E_3 = \langle (4,-1) \rangle$.

(٣) $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$ ، $E_4 = \langle (\frac{3}{2},1) \rangle$.

(٤) $\lambda_1 = \sqrt{12}$ ، $\lambda_2 = -\sqrt{12}$ و $E_{\sqrt{12}} = \langle (\frac{3}{\sqrt{12}},1) \rangle E_{-\sqrt{12}} = \langle (\frac{-3}{\sqrt{12}},1) \rangle$.

(٥) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$ و

$$E_1 \langle (0,1,0) \rangle, E_2 = \langle (-\frac{1}{2},1,1) \rangle, E_3 = \langle (-1,1,1) \rangle$$

(٦) $\lambda = -8$ و $E_{-8} = \langle (-\frac{1}{6},-\frac{1}{6},1) \rangle$

(٧) $\lambda_1 = -4,\ \lambda_2 = 3$ و $E_{-4} \langle (-2,\frac{8}{3},1) \rangle, E_3 = \langle (5,-2,1) \rangle$

(٨) $\lambda_2 = \lambda_3 = -9,\ \lambda_1 = 9$ و

$$E_{-9} \langle (1,0,4),(0,1,1) \rangle \text{، } E_9 = \langle (4,1,-1) \rangle$$

(٩) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = -2, \lambda_4 = 5$ و

$$E_1 = \langle (3,-1,0,0) \rangle,\ E_2 = \langle (0,0,1,1) \rangle$$
$$E_{-2} = \langle (0,0,1,-1) \rangle, E_5 = \langle (1,1,0,0) \rangle$$

(١٠) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -2, \lambda_4 = -1$ و $E_1 = \langle (0,0,0,1),(2,3,1,0) \rangle$,

$E_{-2} = \langle (-1,0,1,0) \rangle$, $E_{-1} = \langle (-2,1,1,0) \rangle$.

(١١) $\lambda_1=1, \lambda_2=8$ و $E_1=\langle(-3,1)\rangle, E_8=\langle(1,2)\rangle$.

(١٢) $\lambda_1=0, \lambda_2=2$ و $E_0=\langle(1,-1)\rangle, E_2=\langle(1,1)\rangle$.

(١٣) $\lambda_1=2, \lambda_2=-2, \lambda_3=-4$ و

$E_1=\langle(-1,1,0)\rangle, E_{-2}=\langle(0,1,3)\rangle, E_{-4}=\langle(1,0,1)\rangle$.

(١٤) $\lambda_1=1, \lambda_2=\lambda_3=2$ و

$E_1=\langle(-2,1,1)\rangle, E_2=\langle(-1,0,1),(0,1,0)\rangle$.

(١٥) كما في التمرين (٩) . (١٦) $\lambda=1$ و $E_1=\langle x, 1+x^2\rangle$.

(١٧) $\lambda_1=-4, \lambda_2=3$ و $E_{-4}(T)=\langle -2+\frac{8}{3}x+x^2\rangle$ ، $E_3(T)=\langle 5-2x+x^2\rangle$

(١٨) $\lambda_1=\lambda_2=-2$ ، $\lambda_3=5$ و $E_{-2}(T)=\langle x, 4-3x^2\rangle, E_5(T)=\langle 1+x^2\rangle$.

(١٩) $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$ ، $\lambda_4=-1$ و

$E_{-1}(T)=\left\langle\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}\right\rangle$ ، $E_1(T)=\left\langle\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right\rangle$.

(٢٠) $\lambda_1=1, \lambda_2=-2, \lambda_3=-1$ و

$E_{-1}(T)=\left\langle\begin{bmatrix}-2&1\\1&0\end{bmatrix}\right\rangle$ ، $E_{-2}(T)=\left\langle\begin{bmatrix}-1&0\\1&0\end{bmatrix}\right\rangle$ ، $E_1(T)=\left\langle\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2&3\\1&0\end{bmatrix}\right\rangle$.

(٢٢) $AX=\lambda X$. ولذا فإن

$A^kX=A^{k-1}(\lambda X)=A^{k-2}(\lambda^2X)=\cdots=A(\lambda^{k-1}X)=\lambda^kX$.

(٢٤) $(A-4I)X=AX-4IX=(\lambda X-4IX)=(\lambda-4)X$.

(٢٥) ضع $A=\begin{bmatrix}1&1\\3&-1\end{bmatrix}$. (٢٦) الجذور المركبة تحدث أزواجا .

(٢٨) $AX=\lambda X\Rightarrow A^kX=\lambda^kX\Rightarrow 0X=\lambda^kX\Rightarrow\lambda^k=0\Rightarrow\lambda=0$

(٣٠) لا ، خذ $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$. 1 قيمة مميزة للمصفوفة A ولكن $1+1=2$ ليست قيمة مميزة

(٣٢) (أ) نعلم أن $\operatorname{tr}(XA)=\operatorname{tr}(AX)$ لأي مصفوفتين X و A . الآن

$$A = P^{-1} B P \Rightarrow \operatorname{tr}(A)=\operatorname{tr}\left(P^{-1} B P\right)$$

$$= \operatorname{tr}\left(\left(P^{-1} B\right)P\right)= \operatorname{tr}\left(P\left(P^{-1} B\right)\right)= \operatorname{tr}(B)$$

(ب) $\operatorname{rank}(A)= \operatorname{rank}\left(P^{-1} A P\right) = \operatorname{rank}(AP)= \operatorname{rank} A$

(٣٧) $\lambda = 0$ قيمة مميزة $\Leftrightarrow \det(0I - A) = 0 \Leftrightarrow \det A = 0 \Leftrightarrow A$ ليس لها معكوس .

(٣٨) لنفرض أن λ قيمة مميزة لـ A وأن X المتجه المميز المقابل لها .

بما أن A^{-1} موجود فإن $\lambda \neq 0$. الآن :

$$AX = \lambda X \Rightarrow X = A^{-1}AX = A^{-1}\lambda X = \lambda A^{-1}X \Rightarrow \frac{1}{\lambda} X = A^{-1} X .$$

ولذا فإن X متجه مميز للمصفوفة A^{-1} وأن $\frac{1}{\lambda}$ القيمة المميزة المقابلة لها .

(٣٩) $T\left(e^{x}\right)=\frac{d}{dx}\left(e^{x}\right)= e^{x} = 1 e^{x}$.

(٤٠) $T\left(e^{-2x}\right)=-2 e^{-2x}$. ولذا فإن القيمة المميزة المقابلة للمتجه المميز e^{-2x} هي $\lambda = -2$.

تمارين (٧،٢)

(١) $A^{4} = \begin{bmatrix} 226 & -525 \\ 90 & -209 \end{bmatrix}$ (٢) $A^{13} = \begin{bmatrix} -8190 & 0 & -16382 \\ 8191 & 8192 & 8191 \\ 8191 & 0 & 16383 \end{bmatrix}$

(٣) $A^{4} = \begin{bmatrix} 313 & -312 & 0 \\ -313 & -313 & 0 \\ 0 & 0 & 625 \end{bmatrix}$ (٦) غير قابلة للاستقطار .

(٧) $P=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ ، $D=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$.

(٨) $P=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & -3 & 2\\ 6 & 0 & 0\end{bmatrix}$ ، $D=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$.

(٩) $P=\begin{bmatrix}2 & 2 & 3\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 3\end{bmatrix}$ ، $D=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$.

(١٠) $(\lambda-2)(\lambda-3)^2=0$ ، $\dim E_3=1<2$ ، غير قابلة للاستقطار .

(١١) $P=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 3 & 1\\ 4 & 3 & 1\end{bmatrix}$ ، $D=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

(١٢) $P=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 1\\ -1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$ ، $D=\begin{bmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

(١٣) $P=\begin{bmatrix}-1 & -4 & -2\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$ ، $D=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

(١٤) غير قابلة للاستقطار . (١٥) غير قابلة للإستقطار

(١٦) غير قابلة للإستقطار (١٧) غير قابلة للإستقطار

(١٨) $P=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ ، $D=\begin{bmatrix}-2 & & & O\\ & -2 & & \\ & & 3 & \\ O & & & 3\end{bmatrix}$.

(١٩) $P = \begin{bmatrix} -8 & -16 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، $D = \begin{bmatrix} 5 & & & O \\ & 5 & & \\ & & -3 & \\ O & & & -3 \end{bmatrix}$

(٢٢) لنفرض أن A قابلة للاستقطار وأن $D = P^{-1}AP$ هي المصفوفة القطرية . الآن

$$D^T = \left(P^{-1}AP\right)^T = P^T A^T \left(P^T\right)^{-1}$$

مصفوفة قطرية ومن ثم فإن A^T قابلة للاستقطار .

(٢٥) معادلة كثيرة الحدود المميزة للمصفوفة A هي :

$h(\lambda) = \lambda^2 - (a+d) + (ad-bc)^2 = 0$. ولهذه المعادلة جذران حقيقيان مختلفان إذا وفقط إذا كان $(a+d)^2 = 4(ad-bc) > 0$ إذا وفقط إذا كان $(a-d)^2 > -4bc$ ومن ثم نحصل على المطلوب .

(٢٦) لاحظ أن $\det A = \det\left(P^{-1}AP\right) = \begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & O \\ & & \ddots & \\ O & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$

(٢٧) بما أن A متلاشية القوى فإن القيمة المميزة الوحيدة لها هي $\lambda = 0$. لنفرض أن A قابلة للاستقطار . عندئذ يوجد P حيث $D = P^{-1}AP$ و D مصفوفة صفرية . إذن ، $A = PDP^{-1} = 0$ وهذا مستحيل .

تمارين (٣، ٧)

(١) $P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ و $P^T AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

(١) $P = \begin{bmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$ و $P^T AP = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

(٣) $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$ و $P^T AP = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

(٤) $P = \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 2\sqrt{6} & -1 \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \sqrt{6} & 2 \\ \sqrt{5} & 0 & 5 \end{bmatrix}$ و $P^T AP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

(٥) $P = \begin{bmatrix} \sqrt{5} & -6 & 2 \\ 2\sqrt{5} & 3 & 4 \\ -2\sqrt{5} & 0 & 5 \end{bmatrix}$ و $P^T AP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$.

(٧) $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{bmatrix}$ و $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 7 & & & \\ & 1 & & O \\ & & 1 & \\ O & & & 1 \end{bmatrix}$

تمارين (٤، ٧)

(١) ليكن B الأساس المعتاد ، عندئذ $A = [T]_B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$. الآن :

$$h(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (\lambda - 5)(\lambda + 5)$$

ومن ثم فإن $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = -5$ القيم المميزة لـ T .

عند $\lambda_1 = 5$ نجد ان $E_5 = \left\langle \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ و عند $\lambda_2 = -5$ نجد ان $E_{-5} = \left\langle \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$.

ومن ثم فإن $C = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ وان

$$[T]_C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$$

(٢) $[T]_B = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ، B الأساس المعتاد ، $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 4$.

$E_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ و $E_4 = \left\langle \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$. $C = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ ، $P = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

$[T]_C = P^{-1} [T]_B P = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$.

(٣) $[T]_B = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ ، B الأساس المعتاد ، $\lambda_1 = 1$ ، $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$.

$E_1 = \langle [1,1,1]^T \rangle$ ، $E_2 = \langle [2,3,3]^T \rangle$, $E_3 = \langle [1,3,4]^T \rangle$.

. $P=\begin{bmatrix}1&2&1\\1&3&3\\1&3&4\end{bmatrix}$, $C=\{(1,1,1),\ (2,3,3),(1,3,4)\}$

. $[T]_C=P^{-1}[T]_B\,P=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$

(٤) $[T]_B=\begin{bmatrix}-7&-9&3\\2&4&-2\\-3&-3&-1\end{bmatrix}$ ، حيث B الأساس المعتاد .

$\lambda_3=-4\ ,\ \lambda_2=-2$ ، $\lambda_1=2$

. $E_{-4}=\langle\,[1,0,1]^T\,\rangle, E_{-2}=\langle\,[0,1,3]^T\,\rangle$ ، $E_2=\langle\,[-1,1,0]^T\,\rangle$

. $P=\begin{bmatrix}-1&0&1\\1&1&0\\0&3&1\end{bmatrix}$ و $C=\{(-1,1,0),(0,1,3),(1,0,1)\}$

. $[T]_C=P^{-1}[T]_B\,P=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&-2&0\\0&0&-4\end{bmatrix}$

(٥) $[T]_B=\begin{bmatrix}0&0&-2\\1&2&1\\1&0&3\end{bmatrix}$ ، B الأساس المعتاد . $\lambda_1=\lambda_2=2$, $\lambda_3=1$.

. $E_1=\langle\,[-2,1,1]^T\,\rangle, E_2=\langle\,[-1,0,1]^T,[0,1,0]^T\,\rangle$

. $P=\begin{bmatrix}-1&0&-2\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}$, $C=\{(-1,0,1),(0,1,0),(-2,1,1)\}$

$$. \quad [T]_C = P^{-1}[T]_B P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(٦) $C = \{(1,1),(-1,1)\}$ ، $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$. \quad [T]_C = P^{-1}[T]_B P = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^5 = P[T]_C^5 P^{-1} = \begin{bmatrix} 121 & 122 \\ 122 & 121 \end{bmatrix} . \quad T^5(2,-1) = A^5\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120 \\ 123 \end{bmatrix} .$$

(٧) (أ) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ ، $E_1 = \langle [0,1,1]^T \rangle$. غير قابل للاستقطار .

(ب) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ ، $E_1 = \langle [1,0,1]^T \rangle$. غير قابل للاستقطار .

(جـ) $\lambda_1 = -1$ ، $\lambda_2 = 3 - 2\sqrt{2}$ ، $\lambda_3 = 3 + 2\sqrt{2}$.

$E_{\lambda_1} = \langle [-1,1,0]^T \rangle$ ، $E_{\lambda_2} = \langle [1,1,-\sqrt{2}]^T \rangle$, $E_{\lambda_3} = \langle [1,1,\sqrt{2}]^T \rangle$. قابل للاستقطار .

(٨) $\lambda_1 = -4$ و $\lambda_2 = 3$. $E_{-4} = \langle -2 + \frac{8}{3}x + x^2 \rangle$, $E_3 = \langle 5 - 2x + x^2 \rangle$. غير قابل للاستقطار .

(٩) $\lambda_1 = 1$ ، $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -1$

$E_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle$ ، $E_{-2} = \left\langle \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle$ و $E_{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ، غير قابل للاستقطار .

(١٠) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, $\lambda_4 = -1$.

$E_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle$, $E_{-1} = \left\langle \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle$. قابل للاستقطار .

(١١) (أ) $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = \lambda_4 = -1$. $E_4 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle$ ولذا غير قابل للاستقطار .

(ب) $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ ، $\lambda_3 = -5$. $E_2 = \langle 1+2x^2 \rangle$ ولذا غير قابل للاستقطار .

تمارين (٨،١)

(١) (ب) $x - 3y + 10 = 0$ (د) $x + 2y - 10 = 0$ (و) $y = 4$.

(٥) مساحة المثلث تساوي $\frac{3}{2}$. (٦) $4x - 3y + 5z = -3$.

تمارين (٨،٢)

(٢) (أ) بحل نظام المعادلات :

$$\begin{aligned} I_1 - I_2 + I_3 &= 0 \\ 3I_1 + 2I_2 \qquad &= 7 \\ 2I_2 + 4I_3 &= 8 \end{aligned}$$

نحصل على $I_1 = 1$ ، $I_2 = 2$ و $I_3 = 1$.

(ب) بحل نظام المعادلات

$$\begin{aligned} I_1 - I_2 + I_3 &= 0 \\ I_1 - I_2 + I_4 &= 0 \\ I_3 - I_5 + I_6 &= 0 \\ I_4 - I_5 + I_6 &= 0 \\ 2I_1 + 4I_2 &= 10 \\ 4I_2 + I_3 + 2I_4 + 2I_5 &= 17 \\ 2I_5 + 4I_6 &= 14 \end{aligned}$$

نحصل على $I_1 = 1$ ، $I_2 = 2$ ، $I_3 = 1$ ، $I_4 = 1$ ، $I_5 = 3$ و $I_6 = 2$.

تمارين (٨،٣)

(١) $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ثم احسب M^3 .

(٣) $S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ثم احسب S^3 .

تمارين (٨،٤)

(١) $X^{(5)} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 19971 \\ 0 \cdot 80029 \end{bmatrix}$.

(٢) $X^{(3)} = \begin{bmatrix} \frac{11}{32} \\ \frac{6}{32} \\ \frac{15}{32} \end{bmatrix}$.

(٤) جميع عناصر P^2 موجبة ولذا P منتظمة . متجه حالة الاستقرار هو $q = \begin{bmatrix} \cdot 4 \\ \cdot 3 \\ \cdot 3 \end{bmatrix}$

تمارين (٨،٥)

(٤) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$.

تمارين (٨،٦)

(١) (أ) $\mathbf{P}=\begin{bmatrix}2t\\3t\\2t\end{bmatrix}$ ، $t>0$. (ب) $\mathbf{P}=\begin{bmatrix}t\\3t\\t\end{bmatrix}$ ، $t>0$. (ج) $\mathbf{P}=\begin{bmatrix}14t\\17t\\47t\\23t\end{bmatrix}$ ، $t>0$.

(٧) $\mathbf{X}=\begin{bmatrix}8622\\4658\\3661\end{bmatrix}$. (٨) $\mathbf{X}=\begin{bmatrix}226\\119\\78\end{bmatrix}$.

تمارين (٨،٧)

(٥) (أ) $X_0=\begin{bmatrix}24\\24\\20\end{bmatrix}$ (ب) $L=\begin{bmatrix}0&6&8\\0\cdot5&0&0\\0&0\cdot5&0\end{bmatrix}$

(ج) $X_1=LX_0=\begin{bmatrix}304\\12\\12\end{bmatrix}$ ، $X_2=LX_1=\begin{bmatrix}168\\152\\6\end{bmatrix}$.

(د) $\det(\lambda I-L)=(\lambda+1)^2(\lambda-2)$. ولذا فإن $\lambda_1=2$ هي القيمة المميزة الغالبة وأن $E_2=\{(16,4,1)t:t\in R\}$.

كشاف وثبت المصطلحات
Subject Index

trace of a matrix	١٢	أثر مصفوفة
basis	١٦٦	أساس
orthonormal basis	٢٤٧	أساس عياري متعامد
standard basis	١٦٨	أساس معتاد
orthogonal projection	٢٦٢	الإسقاط العمودي
ampere	٣٧٩	أمبير
weights of inner product	٢٣٠	أوزان الضرب الداخلي
ohm	٣٧٩	أوم
inductively	٢٧	استقرائياً
diagonalization	٣٤٦	استقطار
diagonalization of symmetric matrices	٣٦٠	استقطار المصفوفات المتماثلة
dimension of vector space	١٧٤	بعد فضاء المتجهات
one to one transformation	٢٩١	تحويل آحادي
linear transformation	٢٦٥	تحويل خطي
onto transformation	٢٩١	تحويل شامل
zero transformation	٢٦٧	تحويل صفري
identity transformation	٢٦٧	تحويل محايد
matrix transformation	٢٧٣	تحويل مصفوفي
composition of linear transformations	٣٠١	تركيب التحويلات الخطية
linear combination	١٠٩، ١٤٣	تركيب خطي
multiplicity	٣٥٢	تعدد
algebraic multiplicity	٣٥٢	تعدد جبري
geometric multiplicity	٣٥٢	تعدد هندسي
inductive definition	٥١	تعريف استقرائي
cryptography	٤١٠	التعمية
isomorphism	٣٠٣	تماثل
equilibrium	٤٢٢	توازن
direct current	٣٧٨	تيار مباشر
alternate current	٣٧٨	تيار متناوب

algebra of linear transformations	٢٩٩	جبر التحويلات الخطية
matrix additions	٣	جمع المصفوفات
direct sum	٢١٨، ٢٢٢	جمع مباشر
directed edge	٣٨٢	حافة موجهة
trivial solution	١٠٨	حل تافه
solution of a system of equations	٨٤	حل نظام معادلات
Gram-Schmidt algorithm	٢٥٠	خوارزمية جرام ـ شميت
matrix size	٢	درجة المصفوفة
electrical circuits	٣٧٨	دوائر كهربائية
tournaments	٣٩٣	دورات تنافسية
vertex	٣٨٢	رأس
rank of a linear transformation	٢٨٥	رتبة تحويل خطي
rank of a matrix	٢٤، ٢٠٢	رتبة مصفوفة
directed subgraph	٣٨٩	رسم جزئي موجه
directed graph	٣٨٢	رسم موجه
dominance graphs	٣٩٣	رسومات المنافسة
angle between vectors	٢٤٠	زاوية بين متجهين
Markov chains	٣٩٨	سلاسل ماركوف
row	١	صف
nullity of a matrix	١٩٩	صفرية المصفوفة
nullity of a linear transformation	٢٨٥	صفرية تحويل خطي
image of linear transformation	٢٨٤	صورة التحويل الخطي
row echelon form	١٧	صيغة درجية صفية
reduced row echelon form	٢٢	صيغة درجية صفية مختزلة
Euclidean product	٨ ، ٢٢٨	ضرب إقليدي
matrix multiplication	٨	ضرب المصفوفات
inner product	٢٢٧	ضرب داخلي
polygraphic	٤١٢	الطريقة التعددية
Gauss method	٨٦	طريقة جاوس
Gauss-Jordan method	٨٧	طريقة جاوس - جوردان

Hill ciphers	٤١٢	طريقة هل للتعمية
norm	٢٣٥	طول (معيار)
n-tuple	١٢١	عديد من النوع n
clique	٣٨٨، ٣٨٩	عصبة
elementray row operations	١٦	العمليات الصفية الأولية
enciphering	٤١١	عملية التعمية
column	١	عمود
leading element	١٨	العنصر المتقدم
Euclidean space	١٢١	فضاء إقليدي
spaned subspace	١٥٢	الفضاء الجزئي المولد
solution space	١٣٨، ١٧١	فضاء الحل
null space	١٢٨، ١٩٩	الفضاء الصفري
null space of a matrix	١٣٨، ١٧١	الفضاء الصفري لمصفوفة
image space	١٣٨	فضاء الصورة
subspace	١٣٤	فضاء جزئي
row space	١٩٩	فضاء صفي
Euclidean product space	٢٢٨	فضاء ضرب إقليدي
weighted Euclidean product space	٢٣٠	فضاء ضرب إقليدي موزون
inner product space	٢٢٧	فضاء ضرب داخلي
column space	١٩٩	فضاء عمودي
vector space	١٢٣	فضاء متجهات
vector space of linear transformations	٣٠٣	فضاء متجهات التحويلات الخطية
complement space	٢١٨	فضاء متمم
eigenspace	٣٣٣	فضاء مميز
deciphering	٤١١	فك التعمية
volt	٣٧٩	فولت
Cramer`s rule	١١٤	قاعدة كرامر
Ohm`s law	٣٧٩	قانون أوم
Kirchoff `s law	٣٧٩	قانون كركوف
eigenvalue	٣٢٥	قيمة مميزة
dominant eigenvalue	٤٣٩	قيمة مميزة غالبة
polynomial	١٢٦	كثيرة حدود
characteristic polynomial	٣٢٦	كثيرة الحدود المميزة

linear operator	٢٦٥	مؤثر خطي
diagonalizable linear operator	٣٦٩	مؤثر خطي قابل للإستقطار
dimension theorem	٢٠٦	مبرهنة البعد
dimension theorem for transformations	٢٩٠	مبرهنة البعد للتحويلات
orthogonal decomposition theorem	٢٦٢	مبرهنة التفريق العمودي
principal axes theorem	٣٦٣	مبرهنة المحاور الرئيسة
triangular inequality	٢٣٩	متباينة المثلث
Cauchy-Schwartz inequality	٢٣٧	متباينة كوشي - شوارتز
coordinate vector	١٨٨	متجه احداثيات
state vector	٤٠١	متجه حالة
steady state vector	٤٠٦	متجه حالة الاستقرار
row vector	٢	متجه صفي
column vector	٢	متجه عمودي
eigenvector	٣٢٥	متجه مميز
orthogonal vectors	٢٤٠، ٢٤٥	متجهات متعامدة
row equivalent	١٧	متكافئتان صفياً
orthogonal complement	٢٥٩	متمم عمودي
orthonormal set of vectors	٢٤٥	مجموعة عيارية متعامدة
linearly dependent set	١٥٨	مجموعة مرتبطة خطياً
linearly independent set	١٥٨	مجموعة مستقلة خطياً
spanning set	١٤٨	مجموعة مولدة
additive identity	١٢٣	محايد جمعي
determinant of a matrix	٥٢	محدد مصفوفة
orthogonal component	٢٦٢	المركبة العمودية
directed path	٣٨٥	مسار موجه
distance	٢٣٥	مسافة
minor of an element	٥٤	مصغر عنصر
matrices	١	المصفوفات
elementary matrix	٣٠	مصفوفة أولية
transition matrix	١٩٢	مصفوفة الانتقال