الفصل الأول *المصفوفات*

MATRICES

في العديد من المجالات يكون من المناسب أن نتعامل مع بيانات تحت الدراسة على أنها وحدة واحدة وذلك بوضعها في مستطيل يسمى مصفوفة. في هذا الفصل سنتعرف على الخواص الأساسية للمصفوفات حيث سنعتمد على مفهوم المصفوفة اعتماداً كبيراً في هذا الكتاب.

(١ ، ١) المصفوفات والعمليات عليها

Matrices and Matrix Operations

إن الغرض من هذا البند هو تعريف المصفوفة ودراسة بعض أنواع المصفوفات وكيفية جمعها وضربها ومعرفة خواصها الأساسية.

تعريف (١ ، ١)

المصفوفة عبارة عن مجموعة من الأعداد الحقيقية (أو المركبة) عناصرها مرتبة في جدول مستطيل؛ يسمى كل سطر أفقي من عناصر المصفوفة صفاً (row) ويسمى كل سطر رأسي عموداً (column). يرمز عادة للمصفوفة بأحد أحرف اللغة الإنجليزية الكبيرة مثل A,B,C وهلم جرا.

إذا كانت a_{ij} حيث $1 \le i \le m$ و $1 \le j \le n$ عناصر مصفوفة A فإننا عادة نكتب

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ونقول إن A مصفوفة من الدرجة(size) $m \times n$ حيث m هو عدد صفوف A و n عدد أعمدة A .

ملحوظات

(١) في هذا الكتاب (ما لم يذكر صراحة غير ذلك) سنعتبر أن جميع عناصر المصفوفات أعداداً حقيقية.

(٢) في كثير من الأحيان نستخدم الصيغة المختزلة $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ لكتابة المصفوفة أو ببساطة $A = [a_{ij}]$ إذا كانت درجة المصفوفة مفهومة ضمنياً.

(٣) إذا كان $m = n$ فإننا نقول إن A مصفوفة مربعة (square) من الدرجة n .

(٤) تسمى المصفوفة من الدرجة $1 \times n$ متجه صفي ونكتب ذلك على الصيغة $[a_1, a_2, . . . , a_n]$ كما تسمى المصفوفة من الدرجة $n \times 1$ متجه عمودي ونكتب ذلك على الصيغة

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

تعريف (٢ ، ١)

إذا كانت $A = [a_{ij}]$ و $B = [b_{ij}]$ مصفوفتين من الدرجة نفسها فإننا نقول أن $A = B$ إذا وفقط إذا كان $a_{ij} = b_{ij}$ لكل i,j .

مثال (١ ، ١)

المصفوفتان $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ غير متساويتين لأنهما مختلفتا الدرجة، أما المصفوفة $C = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$ فإنها تساوي المصفوفة A إذا وفقط إذا كان $a = 5$, $b = -1$, $c = 7$ و $d = 0$. □

تعريف (٣ ، ١)

إذا كانت $A = [a_{ij}]$ و $B = [b_{ij}]$ مصفوفتين من الدرجة نفسها فإن $A + B$ مصفوفة من الدرجة نفسها ونعرفها كما يلي : $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$

مثال (٢ ، ١)

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 0 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 8 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} . \square$$

مثال (٣ ، ١)

إذا كان $\begin{bmatrix} 1 & 11 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ c & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & 3 \\ 1 & b \end{bmatrix}$ فعين قيمة كل من b ,c و a .

الحل

بما أن $\begin{bmatrix} a+4 & 11 \\ 1+c & b-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ c & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & 3 \\ 1 & b \end{bmatrix}$ فإن :

$a + 4 = 1$ ، $1 + c = 5$ ، $b - 1 = -4$.

ولذا فإن $a = -3$ ، $c = 4$ و $b = -3$. □

تعريف (٤ ، ١)

تسمى المصفوفة التي جميع عناصرها أصفار المصفوفة الصفرية ويرمز لها بالرمز 0.

تعريف (٥ ، ١)

لتكن $A = [a_{ij}]$ مصفوفة وليكن $k \in \mathbb{R}$. تعرف المصفوفة kA كالتالي :

$$kA = [ka_{ij}] \, .$$

ملحوظات

(١) إذا كان $k = -1$ فإننا نكتب $-A$ بدلاً من $(-1)A$.

(٢) لاحظ أن $A - B = A + (-B)$.

تزودنا المبرهنة التالية ببعض الخواص الأساسية لعمليتي جمع المصفوفات وضربها بعدد .

مبرهنة (١ ، ١)

إذا كانت $A = [a_{ij}]$ ، $B = [b_{ij}]$ و $C = [c_{ij}]$ مصفوفات من الدرجة نفسها وكان $k \in \mathbb{R}$ فإن :

(١) $A + B = B + A$.　　(٢) $A + (B + C) = (A + B) + C$.

(٣) $A + 0 = A$.　　(٤) $A + (-A) = 0$.

(٥) $r(A + B) = rA + rB$.　　(٦) $(r + s)A = rA + sA$.

(٧) $(rs)A = r(sA)$.   (٨) $1A = A$.

البرهان

(١) لاحظ أن
$$A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}] = [b_{ij} + a_{ij}]$$
$$= [b_{ij}] + [a_{ij}] = B + A$$
وبالتالي فإن : $A + B = B + A$.

(٢)
$$A + (B + C) = [a_{ij}] + ([b_{ij}] + [c_{ij}]) = [a_{ij}] + [b_{ij} + c_{ij}]$$
$$= [a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})] = [(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}] + [c_{ij}]$$
$$= ([a_{ij}] + [b_{ij}]) + [c_{ij}] = (A + B) + C$$
أي أن : $A + (B + C) = (A + B) + C$.

(٣)
$$A + 0 = [a_{ij}] + [0] = [a_{ij} + 0] = [a_{ij}] = A$$
أي أن : $A + 0 = A$.

(٤)
$$A + (-A) = [a_{ij}] + [-a_{ij}] = [a_{ij} - a_{ij}] = [0] = 0$$
وبالتالي فإن : $A + (-A) = 0$.

(٥)
$$(A + B) = r([a_{ij}] + [b_{ij}]) = r[a_{ij} + b_{ij}] = [r(a_{ij} + b_{ij})] = [ra_{ij} + rb_{ij}]$$
$$= [ra_{ij}] + [rb_{ij}] = r[a_{ij}] + r[b_{ij}] = rA + rB$$
وبالتالي فإن : $r(A + B) = rA + rB$.

(٦)
$$(r + s)A = (r + s)[a_{ij}] = [(r + s)a_{ij}] = [ra_{ij} + sa_{ij}] = [ra_{ij}] + [sa_{ij}]$$
$$= r[a_{ij}] + s[a_{ij}] = rA + sA$$
وبالتالي فإن : $(r + s)A = rA + sA$.

(٧)
$$(rs)A = (rs)[a_{ij}] = [(rs)a_{ij}] = [r(sa_{ij})] = r[sa_{ij}] = r(s[a_{ij}]) = r(sA)$$
أي أن : $(rs)A = r(sA)$.

(٨) واضح من تعريف ضرب المصفوفة بعدد . ◆

مثال (٤ ، ١)

إذا كانت $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 5 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ فإن :

$$3A - B = 3\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 5 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 16 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}. \square$$

مثال (٥ ، ١)

حل المعادلة المصفوفية $A + 3\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$.

الحل

لاحظ أن درجة المصفوفة A يجب أن تكون 2. ولذا فإننا نفرض أن $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. إذن ، $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

ومنه فإن $a = 2 , b = 5 , c = 1$ و $d = 3$. $\square$

في كثير من الأحيان نستطيع معرفة الكثير من خواص صفوف مصفوفة بدراسة أعمدتها وبالعكس. إن هذا يقودنا إلى التعريف التالي :

تعريف (٦ ، ١)

لتكن $A = [a_{ij}]$ مصفوفة من الدرجة $n \times m$. يعرف منقول (transpose) المصفوفة A بأنه المصفوفة من الدرجة $m \times n$ التي نحصل عليها من A بحيث تكون صفوفها هي أعمدة A وأعمدتها هي صفوف A على التوالي. نرمز لمنقول A بالرمز A^T. أي أن $A^T = [a_{ji}]$.

تزودنا المبرهنة التالية ببعض خواص المنقول .

مبرهنة (٢ ، ١)

إذا كانت كل من $A = [a_{ij}]$ و $B = [b_{ij}]$ مصفوفة من الدرجة $m \times n$ فإن :

(١) $(A^T)^T = A$.

(٢) $(kA)^T = kA^T$ حيث $k \in \mathbb{R}$.

(٣) $(A + B)^T = A^T + B^T$.

البرهان

(١) $(A^T)^T = [a_{ji}]^T = [a_{ij}] = A$.

(٢) $(kA)^T = [ka_{ij}]^T = [ka_{ji}] = k[a_{ji}] = kA^T$.

(٣) $(A+B)^T = [a_{ij}+b_{ij}]^T = [a_{ji}+b_{ji}] = [a_{ji}] + [b_{ji}] = A^T + B^T$. ♦

لقد لاحظنا أن عملية جمع المصفوفات تشبه إلى حد كبير عملية جمع الأعداد الحقيقية. ولذا فإن القارئ قد يتوقع أن عملية ضرب المصفوفات تماثل نظيرتها من الأعداد الحقيقية، إلا أن هذا ليس صحيحاً حيث أن عملية ضرب المصفوفات أصعب

بعض الشيء من عملية ضرب الأعداد الحقيقية . وعلى الرغم من ذلك فإن عملية ضرب المصفوفات تستحق الجهد المبذول لتعريفها لما لها من تطبيقات كثيرة. قبل القيام بتعريف عملية ضرب المصفوفات نقدم مفهوم الضرب الإقليدي

.(Euclidean product)

تعريف (٧ ، ١)

إذا كان $A = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$ متجهاً صفياً وكان $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ متجهاً عمودياً فنعرف

الضرب الإقليدي للمتجهين A و B على النحو التالي :

$$AB = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \ .$$

تعريف (٨ ، ١)

إذا كانت $A = [a_{ij}]$ مصفوفة من الدرجة $m \times n$ و $B = [b_{ij}]$ مصفوفة من الدرجة $n \times k$ فإن $AB = [c_{ij}]$ مصفوفة من الدرجة $m \times k$ حيث c_{ij} هو حاصل الضرب الإقليدي للصف i من المصفوفة A في العمود j من المصفوفة B . أي أن :

$$\begin{aligned} c_{ij} &= [a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}][b_{1j}, b_{2j}, \ldots, b_{nj}]^T \\ &= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \end{aligned}$$

لاحظ أن AB غير معرف إلا إذا كان عدد أعمدة المصفوفة A مساوياً لعدد صفوف المصفوفة B .

مثال(٦ ، ١)

إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

فاحسب كلاً من AB و BA إن أمكن ذلك .

الحل

بما أن درجة A هي 2×3 ودرجة B هي 3×2 فإن AB مصفوفة من الدرجة 3×3 والمصفوفة BA من الدرجة 2×2 . الآن :

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (1)(0)+(2)(-4) & (1)(-1)+(2)(1) & (1)(2)+(2)(0) \\ (-1)(0)+(0)(-4) & (-1)(-1)+(0)(1) & (-1)(2)+(0)(0) \\ (0)(0)+(3)(-4) & (0)(-1)+(3)(1) & (0)(2)+(0)(0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -8 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -12 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

كذلك ،

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (0)(1)+(-1)(-1)+(2)(0) & (0)(2)+(-1)(0)+(2)(3) \\ (-4)(1)+(1)(-1)+(0)(0) & (-4)(2)+(1)(0)+(0)(3) \end{bmatrix}$$

وبالتالي فإن :

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -5 & -8 \end{bmatrix} . \square$$

ملحوظات

(١) لاحظ أن $AB \neq BA$. أي أن عملية ضرب المصفوفات ليست إبدالية وهذه خاصة تميز ضرب المصفوفات عن ضرب الأعداد الحقيقية.

(٢) وهناك خاصة هامة أخرى تجعل ضرب المصفوفات مختلفًا عن مثيله في الأعداد الحقيقية هي أنه من الممكن إيجاد مصفوفتين $A \neq 0$ و $B \neq 0$ بحيث يكون $AB = 0$ على سبيل المثال، إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ فإن $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

الخواص الأساسية لضرب المصفوفات تزودنا بها المبرهنة التالية :

مبرهنة (٣ ، ١)

لتكن $A = [a_{ij}]$ ، $B = [b_{ij}]$ و $C = [c_{ij}]$ مصفوفات ذات درجات مناسبة بحيث تكون العمليات التالية معرفة. وليكن $k \in \mathbb{R}$. عندئذٍ :

(١) $A(BC) = (AB)C$.

(٢) $A(B+C) = AB + AC$.

(٣) $(B + C)A = BA + CA$.

(٤) $k(AB) = (kA)B = A(kB)$.

(٥) $(AB)^T = B^T A^T$.

البرهان

(١) لنفرض أن درجات A, B و C هي $m \times r$ ، $r \times s$ و $s \times n$ على التوالي. عندئذ :

$$(AB)C=\left[\sum_{k=1}^{r}a_{ik}b_{kj}\right]C=\left[\sum_{t=1}^{s}(\sum_{k=1}^{r}a_{ik}b_{kt})\,c_{tj}\right]=\left[\sum_{t=1}^{s}\sum_{k=1}^{r}a_{ik}b_{kt}c_{tj}\right]$$

$$=\left[\sum_{k=1}^{r}a_{ik}(\sum_{t=1}^{s}b_{kt}c_{tj})\right]=A\left[\sum_{t=1}^{s}b_{it}c_{tj}\right]=A(BC)$$

(٢) لنفرض أن درجات B,A و C هي $m\times n$ ، $n\times p$ و $n\times p$ على التوالي. عندئذٍ :

$$A(B+C)\;=A\;[b_{ij}+c_{ij}]=\left[\sum_{k=1}^{n}a_{ik}(b_{kj}+c_{kj})\right]=\left[\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}+\sum_{k=1}^{n}a_{ik}c_{kj}\right]$$

$$=\left[\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\right]+\left[\sum_{k=1}^{n}a_{ik}c_{kj}\right]=AB+AC$$

(٣) برهان هذه الفقرة مشابه لبرهان الفقرة (٢)؛ ولذا فإننا نتركه كتمرين للقارئ.

(٤) لنفرض أن A من الدرجة $m\times n$ و B من الدرجة $n\times p$. عندئذٍ :

$$k(AB)=k\left[\sum_{r=1}^{n}a_{ir}b_{rj}\right]=\left[\sum_{r=1}^{n}(ka_{ir})b_{rj}\right]=(kA)B$$

و بالمثل $k(AB)=A(kB)$.

(٥) لنفرض أن درجة A هي $m\times n$ ودرجة B هي $n\times p$. عندئذٍ :

$A^T=[a_{ji}]$ وكذلك $B^T=[b_{ji}]$. وبالتالي فإن :

$$B^TA^T=\left[\sum_{k=1}^{n}b_{ki}a_{jk}\right]=\left[\sum_{k=1}^{n}a_{jk}b_{ki}\right]=(AB)^T$$

وبهذا نكون قد أتممنا البرهان . ♦

إذا كانت $A=[a_{ij}]$ مصفوفة مربعة من الدرجة n فإن عناصر القطر الرئيسي للمصفوفة A هي a_{ii} حيث $i=1,2,\dots,n$. ونقول إن A مصفوفة قطرية (diagonal) إذا كان $a_{ij}=0$ لكل $i\neq j$ ، ونقول إن المصفوفة القطرية هي مصفوفة الوحدة أو المحايدة (identity) إذا كان $a_{ii}=1$ لكل $i=1,2,\dots,n$. نرمز عادة لمصفوفة الوحدة

بالرمز I_n أو I إذا كانت الدرجة معلومة لدينا. تلعب مصفوفة الوحدة في المصفوفات المربعة دور العدد 1 في الأعداد الحقيقية. أي أنها تحقق العلاقة $AI_n = I_nA = A$ لكل مصفوفة مربعة A من الدرجة n (تحقق من ذلك).

ننهي هذا البند بتقديم مفهوم أثر (trace) المصفوفة.

تعريف (٩ ، ١)

إذا كانت $A = [a_{ij}]$ مصفوفة مربعة من الدرجة n فإننا نعرف أثر A ونكتب $\text{tr}(A)$ على أنه مجموع عناصر القطر الرئيسي. أي أن : $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

مثال (٧ ، ١)

إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ فإن : $\text{tr}(A) = 1 + 5 + (-3) = 3$. □

تزودنا المبرهنة التالية بالخواص الأساسية لأثر المصفوفة المربعة والتي نترك برهانها كتمرين للقارئ.

مبرهنة (٤ ، ١)

إذا كانت كل من A و B مصفوفة من الدرجة n وكان $k \in \mathbb{R}$ فإن :

(١) $\text{tr}(A+B) = \text{tr}(A)+\text{tr}(B)$. (٢) $\text{tr}(A^T) = \text{tr}(A)$.

(٣) $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$. (٤) $\text{tr}(kA) = k\,\text{tr}(A)$.

(٥) $\text{tr}\left(AA^T\right)$ يساوي مجموع مربعات عناصر A . ♦

تمارين (١ ، ١)

لتكن $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ، $C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ ،

$D = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ ، $E = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

في التمارين من (١) إلى (٣٠) احسب المصفوفة المبينة إن أمكن ذلك.

(١) $D + E$.
(٢) $D - E$.
(٣) $5A$.
(٤) $-7C$.
(٥) $2B - C$.
(٦) $4E - 2D$.
(٧) $-3(D + 2E)$.
(٨) $C - C$.
(٩) $tr(D)$.
(١٠) $tr(D - 3E)$.
(١١) $4tr(7B)$.
(١٢) $tr(A)$.
(١٣) $2A^T + C$.
(١٤) $D^T - E^T$.
(١٥) $(D - E)^T$.
(١٦) $B^T + 5C^T$.
(١٧) $\frac{1}{4}C^T - \frac{1}{2}A$.
(١٨) $C^T - C$.
(١٩) $3E^T - 2D^T$.
(٢٠) AB .
(٢١) BA .
(٢٢) $A(BC)$.
(٢٣) $(C^T B)A^T$.
(٢٤) $tr(C^T A^T + 2E^T)$.
(٢٥) $4BC + 2B$.
(٢٦) $B^T(CC^T - A^TA)$.
(٢٧) $D^TE^T - (ED)^T$.
(٢٨) $3A - B^TC^T$.
(٢٩) $tr(DE + ED)$.
(٣٠) $tr(DE - ED)$.

(٣١) إذا كانت $2A - 3B = 6(A + 3B)$ فعين A بدلالة B .

(٣٢) إذا كانت B مصفوفة من الدرجة $m \times n$ حيث $B + A = A$ لكل مصفوفة A من الدرجة $m \times n$ فأثبت أن $B = 0$.

(٣٣) أثبت أن $A = -A$ إذا وفقط إذا كانت $A = 0$.

(٣٤) إذا كانت كل من A و B مصفوفة قطرية فأثبت أن كلاً من المصفوفات التالية قطرية :

(أ) $A + B$. (ب) $A - B$. (ج) kA حيث $k \in \mathbb{R}$.

(٣٥) إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ فأثبت أن $A^2 - A - 6I = 0$.

(٣٦) عين جميع المصفوفات من الدرجة 2 التي تحقق $A^2 = 0$.

(٣٧) عين جميع المصفوفات من الدرجة 2 التي تحقق $A^2 = I$.

(٣٨) عين جميع المصفوفات من الدرجة 2 التي تحقق $A^2 = A$.

(٣٩) عين مصفوفتين A و B من الدرجة 2 بحيث يتحقق $AB = 0$ ولكن $BA \neq 0$.

(٤٠) إذا كانت A مصفوفة من الدرجة $m \times n$ و B مصفوفة من الدرجة $n \times 1$ وكان $AB = 0$ فهل من الممكن أن تكون $A = 0$ ؟

(٤١) بين إستحالة وجود مصفوفتين A و B من الدرجة 2 بحيث أن $AB - BA = I$.

(٤٢) إذا كانت B مصفوفة من الدرجة n و A مصفوفة من الدرجة $m \times n$ حيث $AB = 0$ فأثبت إستحالة وجود مصفوفة C من الدرجة n تحقق $BC = I$.

(٤٣) اثبت فقرات المبرهنة (٤ ، ١) .

(٤٤) إذا كانت كل من A و B مصفوفة قطرية من الدرجة n فأثبت أن AB مصفوفة قطرية وأن $AB = BA$.

(٤٥) لتكن كل من A و B مصفوفة من الدرجة n. أثبت أن :

(أ) $AB = BA$ إذا وفقط إذا كانت $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

(ب) $AB = BA$ إذا وفقط إذا كانت $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$.

(ج) $AB = BA$ إذا وفقط إذا كانت $A^T B^T = B^T A^T$.

(٤٦) لتكن A مصفوفة من الدرجة 2 ولتكن $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(أ) إذا كانت $AB = BA$ فأثبت أن $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$ حيث $a, b \in \mathbb{R}$.

(ب) إذا كانت $AC = CA$ فأثبت أن $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & a \end{bmatrix}$ حيث $a, b \in \mathbb{R}$.

(٤٧) لتكن A مصفوفة من الدرجة2.إذا كانت $AB = BA$ لكل مصفوفة B من الدرجة2 فأثبت أن $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ حيث $a \in \mathbb{R}$.

(٤٨) إذا كانت A مصفوفة من الدرجة $m \times n$ على الأعداد الحقيقية حيث $AA^T = 0$ فأثبت أن $A = 0$.

(٤٩) إذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n حيث $A = A^T$ و $A^2 = 0$ فأثبت أن $A = 0$.

(٥٠) إذا كانت كل من A و B مصفوفة مربعة حيث $AB = A$ و $BA = B$ فأثبت أن $A^2 = A$ وأن $B^2 = B$.

(٥١) إذا كانت A مصفوفة مربعة حيث $A^2 = A$ فأثبت أن $(I - A)^2 = I - A$.

(٥٢) أثبت أن $A^3 - I = (A - I)(A^2 + A + I)$ حيث A مصفوفة مربعة .

(٥٣) لنفرض أن A مصفوفة من الدرجة $n \times 1$ حيث $A^T A = I$ ولنفرض أن $H = I - 2A A^T$. أثبت أن : (أ) $H = H^T$. (ب) $H^T H = I$.

(٥٤) إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ فأثبت أن

ولكن $(A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$

. $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2 B + 3AB^2 + B^3$

(٥٥) لتكن $[AB] = AB - BA$ لكل A و B من الدرجة n. أثبت أن

(أ) $[[AB] C] + [[BC] A] + [[CA] B] = 0$.

(ب) $[(A + B) C] = [AC] + [BC]$.

(ج) هل من الضروري أن يكون $[[AB] C] = [A [BC]]$.

(٥٦) لتكن كل من A , B و C مصفوفة من الدرجة 2.

(أ) أثبت أن $tr (AB - BA) = 0$.

(ب) إذا كان $tr (A) = 0$ فأثبت أن $A^2 = kI$ حيث $k \in \mathbb{R}$.

(ج) أثبت أن $(AB - BA)^2 C = C (AB - BA)^2$.

(٥٧) إذا كانت A مصفوفة مربعة وكانت $A^2 = A$ و $(A - A^T)^2 = 0$ فأثبت أن $(A A^T)^2 = A A^T$.

(٢،١) العمليات الصفية الأولية

Elementary Row Operations

سندرس في الفصل الثالث أنظمة المعادلات الخطية وطرق حلها حيث نستخدم لهذا الغرض مصفوفة خاصة تعرف بالمصفوفة المختزلة وهي ما نحن بصدد التعرف عليها في هذا البند. سنجري ثلاث عمليات على صفوف المصفوفة تسمى العمليات الصفية الأولية (elementary row operation) وهي :

(١) تغيير ترتيب أي صفين من المصفوفة .

(٢) ضرب أي صف من صفوف المصفوفة بعدد غير صفري .

(٣) ضرب أي صف من صفوف المصفوفة بعدد وإضافة الناتج إلى صف آخر.

تعريف (١٠ ، ١)

لتكن A و B مصفوفتين. نقول إن A و B متكافئتان صفيًا (row equivalent) ونكتب $A \sim B$ إذا حصلنا على إحداهما من الأخرى بإجراء أي عدد منته من العمليات الصفية الأولية .

ملحوظات

(١) إذا كانت $A \sim B$ فإنه من الواضح أن درجة A تساوي درجة B .

(٢) نستخدم الترميز التالي لتوضيح العمليات الصفية المجراة على المصفوفة :

(أ) R_{ij} (تعني استبدال الصف i بالصف j).

(ب) kR_i (تعني ضرب الصف i بالعدد $k \neq 0$).

(جـ) kR_{ij} (تعني ضرب الصف i بالعدد k وإضافة الناتج إلى الصف j).

(٣) إذا حصلنا على B من A بإجراء عملية صفية أولية فإنه من الواضح أن نحصل على A من B بعكس العمليات الصفية الأولية السابقة وهي :

(أَ) R_{ij} (بَ) $\frac{1}{k}R_i$ (جـَ) $-kR_{ij}$

(٤) إذا كانت A مصفوفة فإنه من الواضح أنه يمكننا الحصول على عدد من المصفوفات المكافئة صفيًا للمصفوفة A. ولكننا سنقتصر البحث على نوعين من هذه المصفوفات المكافئة والتي نستخدمها لحل أنظمة المعادلات الخطية.

تعريف (١١ ، ١)

نقول إن المصفوفة A تكون على صيغة درجية صفية (row echelon form) إذا تحققت الشروط التالية :

(١) كل صف غير صفري يجب أن يكون أول عنصر غير صفري فيه يساوي 1 (يسمى العنصر المتقدم leading element).

(٢) الصفوف الصفرية (إن وجدت) يجب أن تكون في أسفل المصفوفة .

(٣) إذا وجد صفان غير صفريين فإن العنصر المتقدم 1 في الصف الأعلى يجب أن يكون على يسار العنصر المتقدم1 في الصف الأسفل

مثال (٨ ، ١)

كل من المصفوفتين $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ على صيغة درجية صفية.

أما المصفوفة $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ فإنها ليست على صيغة درجية صفية . □

إذا كانت A مصفوفة فهل نستطيع أن نجد صيغة درجية صفية لها ؟ إن الإجابة على هذا السؤال هي نعم، حيث نقدم الآن خوارزمية تستخدم العمليات الصفية الأولية لإيجاد صيغة درجية صفية لأي مصفوفة A .

خوارزمية (١ ، ١)

لتكن A مصفوفة. الخطوات التالية تحول A إلى صيغة درجية صفية :

(١) ابدأ من يسار المصفوفة وعين أول عمود غير صفري وليكن J_1. استخدم العملية الصفية (١) لجعل العنصر الأول من الصف الأول من العمود J_1 غير صفري.

(٢) استخدم العمليات الصفية (٢) و (٣) لجعل العنصر غير الصفري الذي وجدته بالخطوة (١) مساويًا العدد 1 وباقي عناصر العمود J_1 أصفارًا.

(٣) تحرك الآن إلى اليمين لإيجاد عمود آخر J_2 يحتوي على عنصر غير صفري في الصف 2 أو أي صف اسفل ذلك، ثم استخدم العمليات الصفية لجعل هذا العنصر 1 والعناصر التي أسفله أصفارًا.

(٤) استمر على هذا المنوال حتى تحصل على الأعمدة $J_1, J_2, \ldots, J_r$ حيث الصفوف $r+1, r+2, \ldots, r+m$ جميعها أصفارًا (من الممكن أن يكون $m = 0$).

(٥) توقف هنا وتكون قد حصلت على الصيغة الدرجية الصفية للمصفوفة A .

ملحوظة

كما سبق وأن ذكرنا بأننا سوف نستخدم الصيغة الدرجية الصفية لمساعدتنا في حل أنظمة معادلات خطية؛ ولذا فإننا ننوه بأن الخوارزمية (١،١) تزودنا بطريقة واضحة وسهلة البرمجة إذا أردنا الاستعانة بالحاسب الآلي ولكنها ليست الطريقة الأكثر كفاءة لأنها في حالات معينة (وخاصة إذا كان هناك عمليات حسابية كثيرة) تكون مملة؛ ولذا فإننا نشجع القارئ على استخدام طرق مختصرة ولكننا في الوقت نفسه نحذره من مغبة الوقوع في الخطأ وخاصة عند محاولته دمج خطوات كثيرة في خطوة واحدة.

نقدم الآن بعض الأمثلة التي توضح لنا الخوارزمية (١ ، ١).

مثال (٩ ، ١)

ضع المصفوفة $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 4 & 4 \\ 6 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ على صيغة درجية صفية.

الحل

باستخدام الخوارزمية (١ ، ١) نحصل على المصفوفات التالية :

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 4 & 4 \\ 6 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 7 & 3 & 4 & 4 \\ 6 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-7R_{12},\,-6R_{13}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -3 & -10 \\ 0 & -5 & -4 & -11 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{4}R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} & \frac{5}{2} \\ 0 & -5 & -4 & -11 \end{bmatrix} \xrightarrow{5R_{23}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-1}{4} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-4R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -6 \end{bmatrix}$$

وبالتالي فإن الصيغة الدرجية الصفية للمصفوفة هي :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -6 \end{bmatrix}. \square$$

مثال (١٠ ، ١)

ضع المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & -1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 5 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 8 & -2 & 8 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 6 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ على صيغة درجية صفية.

الحل

باستخدام الخوارزمية (١ ، ١) نحصل على المصفوفات التالية :

$$A \xrightarrow{-1R_{12},\,-2R_{13},\,-2R_{14},\,-1R_{15}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 3 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 3 & -2 & -11 \\ 0 & 0 & 6 & -6 & 6 & 6 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{3}R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 3 & -2 & -11 \\ 0 & 0 & 6 & -6 & 6 & 6 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-R_{23},\,-6R_{24}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_{35}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{5}R_3\,,\,R_{45}}\begin{bmatrix}1&2&1&2&1&0&7\\0&0&1&-1&1&1&-2\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&-5&-5\\0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{5}R_4}\begin{bmatrix}1&2&1&2&1&0&7\\0&0&1&-1&1&1&-2\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

والمصفوفة الأخيرة هي الصيغة الدرجية الصفية للمصفوفة A . □

نستطيع أن نجري تعديلاً على الخوارزمية (١ ، ١) لنحصل على ما يعرف بالصيغة الدرجية الصفية المختزلة للمصفوفة (reduced row echelon form).

تعريف (١٢ ، ١)

تكون المصفوفة A على صيغة درجية صفية مختزلة إذا تحقق ما يلي :

(١) A على صيغة درجية صفية.

(٢) جميع عناصر الأعمدة التي تحتوي على العناصر المتقدمة أصفارًا بإستثناء العناصر المتقدمة .

لوضع مصفوفة A في صيغة درجية صفية مختزلة نستخدم الخوارزمية (١ ، ١) مع تعديل بسيط ألا وهو عند إيجادنا الأعمدة $J_1,J_2,\ldots,J_r$ التي تحتوي على العناصر المتقدمة فإننا نستخدم العمليات الصفية الأولية لجعل جميع العناصر الواقعة أعلى العنصر المتقدم لكل من هذه الأعمدة أصفارًا. نوضح ذلك ببعض الأمثلة.

مثال (١١ ، ١)

ضع المصفوفة $A=\begin{bmatrix}5 & 2 & 2\\ 7 & 3 & 4\\ 6 & 1 & 2\end{bmatrix}$ في صيغة درجية صفية مختزلة.

الحل

$$A\xrightarrow{\frac{1}{2}R_1}\begin{bmatrix}1 & \frac{2}{5} & \frac{2}{5}\\ 7 & 3 & 4\\ 6 & 1 & 2\end{bmatrix}\xrightarrow{-7R_{12},-6R_{13}}\begin{bmatrix}1 & \frac{2}{5} & \frac{2}{5}\\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{6}{5}\\ 0 & \frac{-7}{5} & \frac{-2}{5}\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{5R_2}\begin{bmatrix}1 & \frac{2}{5} & \frac{2}{5}\\ 0 & 1 & 6\\ 0 & \frac{-7}{5} & \frac{-2}{5}\end{bmatrix}\xrightarrow{\frac{-2}{5}R_{21},\frac{7}{5}R_{23}}\begin{bmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 6\\ 0 & 0 & 8\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{8}R_3}\begin{bmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 6\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow{2R_{31},-6R_{32}}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

ولذا فإن المصفوفة الأخيرة هي الصيغة الدرجية الصفية المختزلة للمصفوفة A. □

مثال (١٢ ، ١)

ضع المصفوفة $A=\begin{bmatrix}3 & 7 & -3\\ 2 & 5 & 1\\ 2 & 6 & 10\end{bmatrix}$ على صيغة درجية صفية مختزلة.

الحل

$$A\xrightarrow{\frac{1}{3}R_1}\begin{bmatrix}1 & \frac{7}{3} & -1\\ 2 & 5 & 1\\ 2 & 6 & 10\end{bmatrix}\xrightarrow{-2R_{12},-2R_{13}}\begin{bmatrix}1 & \frac{7}{3} & -1\\ 0 & \frac{1}{3} & 3\\ 0 & \frac{4}{3} & 12\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{3R_2}\begin{bmatrix}1 & \frac{7}{3} & -1\\0 & 1 & 9\\0 & \frac{4}{3} & 12\end{bmatrix}\xrightarrow{\frac{-7}{3}R_{21},\ \frac{-4}{3}R_{23}}\begin{bmatrix}1 & 0 & -22\\0 & 1 & 9\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

ولذا فإن المصفوفة الأخيرة هي الصيغة الدرجية الصفية المختزلة للمصفوفة A. □

ملحوظات

(١) نلفت انتباه القارئ إلى أن الصيغة الدرجية الصفية المختزلة لمصفوفة A وحيدة.

(٢) عدد الصفوف غير الصفرية في الصيغة الدرجية الصفية المختزلة مهم جداً ويسمى رتبة (rank) المصفوفة ولكننا سنؤجل دراسة الرتبة إلى فصل قادم.

تمارين (٢ ، ١)

ضع كلاً من المصفوفات الآتية على صيغة درجية صفية مختزلة .

(١) $\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 1\\1 & -1 & 4 & 2\\2 & 1 & 3 & 1\\-3 & 1 & 1 & 4\end{bmatrix}$.

(٢) $\begin{bmatrix}1 & 3 & 1 & 7\\3 & -2 & 4 & 1\\4 & 1 & 9 & 6\end{bmatrix}$.

(٣) $\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\1 & 3 & 5\\2 & 5 & 6\\3 & 7 & 7\end{bmatrix}$.

(٤) $\begin{bmatrix}0 & 2 & 4\\1 & -3 & 5\\3 & -1 & -1\end{bmatrix}$.

(٥) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 \end{bmatrix}$. (٦) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

(٧) $\begin{bmatrix} 6 & 4 & -5 \\ 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}$. (٨) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & 6 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 4 & 2 & -2 \end{bmatrix}$.

(٩) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. (١٠) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & -1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 5 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 8 & -2 & 8 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 6 & 0 & 7 \end{bmatrix}$.

(٣ ، ١) معكوس المصفوفة

Inverse of Matrix

في هذا البند نقصر دراستنا على المصفوفات المربعة ونبين متى يكون لمصفوفة مربعة معكوس ثم نستخدم العمليات الصفية الأولية لإيجاد معكوس المصفوفة. ولكننا ننوه عن وجود طرق أخرى لإيجاد معكوس المصفوفة ندرسها في الفصل القادم.

تعريف (١٣ ، ١)

لتكن A مصفوفة مربعة من الدرجة n . نقول إن المصفوفة B معكوس (inverse) للمصفوفة A إذا كانت B مصفوفة مربعة من الدرجة n وكان $AB = BA = I$.

في هذه الحالة نقول إن A قابلة للعكس (invertible) أو غير شاذة (nonsingular) ونرمز لمعكوس المصفوفة A عادة بالرمز A^{-1}. أي أن :

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I \; .$$

مثال (١٣ ، ١)

أثبت أن $B = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ هي معكوس المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$.

الحل

بما أن $AB = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$

وأن $BA = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$

فإن : $B = A^{-1}$. □

مثال (١٤ ، ١)

أثبت أن المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ليس لها معكوس .

الحل

لنفرض أن $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ هي معكوس A. عندئذٍ ،

$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & d \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. ولذا فإن $c = 1$ و $c = 0$

وهذا مستحيل. إذن A ليس لها معكوس . □

يتبين لنا من المثال (١٤ ، ١) أنه ليس من الضروري أن يوجد معكوس لمصفوفة مربعة. نقدم في هذا البند الشرط اللازم والكافي لوجود معكوس مصفوفة مربعة ونزود القارئ بخوارزمية لحساب هذا المعكوس في حالة وجوده. ولكن قبل ذلك دعنا ندرس بعض خواص المصفوفات القابلة للعكس.

المبرهنة التالية تثبت لنا وحدانية المعكوس في حالة وجوده.

مبرهنة (٥ ، ١)

إذا كانت A مصفوفة مربعة وكان كل من B و C معكوساً للمصفوفة A فإن $B = C$.

البرهان

بما أن كلاً من B و C معكوس للمصفوفة A فإن :

$AB = BA = I$ و $AC = CA = I$.

إذن ، $C = C\,I = C\,(AB) = (CA)\,B = I\,B = B$. ♦

تعريف (١٤ ، ١)

إذا كانت A مصفوفة مربعة وكان k عددًا صحيحًا غير سالب فإننا نعرف A^k استقرائيًا (inductively) كالتالي :

$A^0 = I$ و $A^{k+1} = A^k A$ لكل $k \geq 0$.

وإذا كان للمصفوفة A معكوس فإننا نعرف $A^{-k} = (A^{-1})^k$.

من السهل أن نرى أنه إذا كانت A مصفوفة مربعة وكان كل من k و m عددًا صحيحًا موجبًا فإن $A^k A^m = A^{k+m}$.

في المبرهنة التالية جميع المصفوفات الواردة مربعة من الدرجة نفسها .

مبرهنة (٦ ، ١)

(١) إن معكوس مصفوفة الوحدة I هي نفسها ، أي أن $I = I^{-1}$.

(٢) إذا كان للمصفوفة A معكوس فإن للمصفوفة A^{-1} معكوس كذلك ويكون $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.

(٣) إذا كان لكل من A و B معكوس فإن للمصفوفة AB معكوس كذلك وأن $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

(٤) إذا كان لكل من المصفوفات $A_1, A_2, \ldots, A_k$ معكوساً فإن للمصفوفة $A_1A_2\cdots A_k$ معكوس كذلك وأن $(A_1 A_2 \ldots A_k)^{-1} = A_k^{-1} \ldots A_2^{-1} A_1^{-1}$.

(٥) إذا كان للمصفوفة A معكوس فإن للمصفوفة A معكوساً كذلك لكل $k \geq 1$ وأن $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$.

(٦) إذا كان للمصفوفة A معكوس وكان $0 \neq r \in \mathbb{R}$ فإن للمصفوفة rA معكوس كذلك وأن $(rA)^{-1} = \frac{1}{r}A^{-1}$.

(٧) إذا كان للمصفوفة A معكوس فإن للمصفوفة A^T معكوس كذلك وأن $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$.

البرهان

(١) بما أن $I\,I = I$ فإن $I^{-1} = I$.

(٢) بما أن A^{-1} موجود فإن $A\,A^{-1} = I = A^{-1}\,A$. ولذا باستخدام وحدانية المعكوس نجد أن A هي معكوس A^{-1}. أي أن $(A^{-1})^{-1} = A$.

(٣) بما أن $(A\,B)\,(B^{-1}\,A^{-1}) = A\,(B\,B^{-1})\,A^{-1} = A\,I\,A^{-1} = A\,A^{-1} = I$ وأن

$(B^{-1}\,A^{-1})\,(A\,B) = B^{-1}\,(A^{-1}\,A)\,B = B^{-1}\,I\,B = B^{-1}\,B = I$.

فإننا نجد من وحدانية المعكوس أن $(A\,B)^{-1} = B^{-1}\,A^{-1}$.

(٤) باستخدام الإستقراء الرياضي على k .

إذا كان $k = 1$ فإنه من الواضح أن العبارة محققة .

وإذا كان $k = 2$ فإن العبارة صحيحة باستخدام الفقرة (٣) .

لنفرض الآن أن $k > 2$ وأن العبارة صحيحة عندما $k = m$. أي أن

$(A_1\,A_2\,\ldots\,A_m)^{-1} = A_m^{-1}\,\ldots\,A_2^{-1}\,A_1^{-1}$. الآن :

$(A_1\,A_2\ldots A_m\,A_{m+1})^{-1} = A_{m+1}^{-1}(A_1\,A_2\ldots A_m)^{-1} = A_{m+1}^{-1}A_m^{-1}\ldots\,A_1^{-1}$.

إذن ، العبارة صحيحة عندما $k = m + 1$.

(٥) هذه الفقرة حالة خاصة من الفقرة (٤) وذلك بوضع $A_1 = A_2 = \ldots = A_k = A$.

(٦) لاحظ أن $(r\,A)\,(\frac{1}{r}\,A^{-1}) = r\,(\frac{1}{r})\,A\,A^{-1} = 1\,I = I$.

وأن $(\frac{1}{r}\,A^{-1})\,(r\,A) = \frac{1}{r}.\,r\,A^{-1}\,A = 1\,I = I$.

إذن ، $(r\,A)^{-1} = \frac{1}{r}\,A^{-1}$.

(٧) لاحظ أن $A^T\,(A^{-1})^T = (A^{-1}\,A)^T = I^T = I$.

وأن $(A^{-1})^T\,A^T = (A\,A^{-1})^T = I^T = I$.

إذن ، $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$. ♦

ننتقل الآن إلى محاولة إيجاد طريقة نستطيع من خلالها معرفة ما إذا كان لمصفوفة A معكوس. وإذا كانت كذلك فكيف نحسب هذا المعكوس. تعتمد الطريقة

التي نقدمها الآن على العمليات الصفية الأولية وعلى مفهوم بسيط هو المصفوفة الأولية (elementary matrix) .

تعريف (١٥ ، ١)

نقول إن المصفوفة المربعة E من الدرجة n مصفوفة أولية إذا حصلنا عليها من مصفوفة الوحدة I بإجراء عملية واحدة فقط من العمليات الصفية الأولية.

مثال (١٥ ، ١)

المصفوفة $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ مصفوفة أولية وذلك لأننا نحصل على E من إجراء العملية الصفية $(5R_2)$ على مصفوفة الوحدة I. كذلك فإن المصفوفة $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ هي مصفوفة أولية وذلك لأننا نحصل على F بإجراء العملية الصفية $(5\,R_{31})$ على مصفوفة الوحدة I . □

لنفرض الآن أنه لدينا المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$. بإجراء العملية الصفية $(5R_{13})$ على المصفوفة A نحصل على المصفوفة $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 6 & 4 & 14 & 15 \end{bmatrix}$.

ومن ناحية أخرى إذا كانت E هي المصفوفة الأولية التي نحصل عليها من I_3 بإجراء العملية نفسها فإننا نجد أن

$$. \; EA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 6 & 4 & 14 & 15 \end{bmatrix} = B$$

وبصورة عامة لدينا :

مبرهنة (٧ ، ١)

إذا كانت A مصفوفة من الدرجة $m \times n$ وكانت E هي المصفوفة الأولية التي نحصل عليها من I_m باستخدام أحد العمليات الصفية فإن المصفوفة EA تساوي المصفوفة التي نحصل عليها من A بإجراء العملية الصفية الأولية نفسها.

البرهان

سنبرهن المبرهنة لعملية صفية أولية هي عملية ضرب صف بعدد غير صفري ونترك بقية الحالات تمريناً للقارئ .

لنفرض أن $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$ وأن E هي المصفوفة الأولية التي حصلنا عليها من I_m بضرب الصف R_k بالعدد c .

أي أن
$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & 1 & \dots & & 0 \\ & & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & c & \dots 0 \\ & & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & & 1 \end{bmatrix} .$$

عندئذٍ ، من الواضح أن
$$EA = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ ca_{k1} & ca_{k2} & \dots & ca_{kn} \\ & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$
. كذلك لدينا

$$A \xrightarrow{cR_k} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ ca_{k1} & ca_{k2} & \dots & ca_{kn} \\ & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$
. وبالمثل يمكن برهان الحالتين الباقيتين . ♦

لنفرض الآن أن E هي المصفوفة الأولية التي نحصل عليها من I بإجراء عملية صفية أولية. نستطيع الحصول على I من E وذلك بتطبيق معكوس العملية الصفية على E .

إن أحد الخواص الرئيسية للمصفوفات الأولية هي :

مبرهنة (٨ ، ١)

إذا كانت E مصفوفة أولية فإن لها معكوسًا ، ومعكوسها مصفوفة أولية أيضًا.

البرهان

لاحظ أننا حصلنا على E من I باستخدام عملية صفية أولية. لنفرض أن F هي المصفوفة الأولية التي نحصل عليها من I بإجراء العملية الصفية العكسية.

إذن، $FE = EF = I$. ولذا فإن F مصفوفة أولية. كما أن $F = E^{-1}$. ♦

ملحوظة

لنفرض أن A مصفوفة مربعة وأن $A \sim B$.

إذا كان للمصفوفة A معكوس فإنه من السهل أن نرى أن للمصفوفة B معكوسًا أيضًا.

تزودنا المبرهنة التالية بالشرط اللازم والكافي لكي يكون لمصفوفة مربعة A معكوس.

مبرهنة (٩ ، ١)

إذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n فإن جميع العبارات التالية متكافئة :

(١) يوجد معكوس للمصفوفة A .

(٢) الصيغة الدرجية الصفية المختزلة للمصفوفة A هي I_n .

(٣) يمكن كتابة A كحاصل ضرب عدد منته من المصفوفات الأولية.

البرهان

(١) $\Leftarrow$(٢) : لنفرض أن للمصفوفة A معكوسًا وأن B هي الصيغة الدرجية الصفية المختزلة للمصفوفة A. عندئذٍ ، يوجد معكوس للمصفوفة B حسب الملحوظة أعلاه . ولذا فإنها لا تحتوي على أي صف صفري (لماذا ؟) إذن ، لابد وأن تكون $B = I_n$.

(٢) $\Leftarrow$(٣) : لنفرض أن الصيغة الدرجية الصفية المختزلة للمصفوفة A هي I_n. ولذا فإن $A \sim I_n$ باستخدام عدد منته من العمليات الصفية الأولية. ولكن باستخدام المبرهنة (١،٧) نعلم أننا نستطيع الحصول على كل من هذه العمليات بضرب المصفوفة A من اليسار بمصفوفة أولية. ولذا نستطيع إيجاد مصفوفات أولية $E_1 , E_2 , \dots , E_k$ حيث $E_k \dots E_2 E_1 A = I_n$. وبالتالي فإن :

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \dots E_k^{-1} I_n = E_1^{-1} E_2^{-1} \dots E_k^{-1} .$$

(٣) $\Leftarrow$(١) : لنفرض أن $A = E_1 \; E_2 \; \dots \; E_k$ حيث E_i مصفوفة أولية. بما أن للمصفوفة E_i معكوس لكل i فإننا نجد أن للمصفوفة A معكوس أيضًا. ♦

نستطيع الآن استخدام المبرهنة (١،٩) لتقديم خوارزمية لإيجاد معكوس مصفوفة.

لاحظ أولاً أنه إذا كان لمصفوفة A معكوس فإنه يوجد مصفوفات أولية $E_1 , E_2 , \dots , E_k$ حيث $A = E_1^{-1} E_2^{-1} \dots E_k^{-1} I_n$ ولذا فإن :

$$A^{-1} = E_k \dots E_2 E_1 I_n .$$

أي أننا نستطيع الحصول على A^{-1} بضرب I_n من اليسار بالمصفوفات الأولية $E_1 , E_2 , \dots , E_k$ على التوالي. وبما أن ذلك يكافئ إجراء عمليات صفية فإننا نجد أن العمليات الصفية الأولية التي نجريها على A للحصول على I_n تختزل لنا المصفوفة I_n إلى A^{-1} .

ولذا فإننا نحصل على الخوارزمية التالية :

خوارزمية (٢ ، ١)

لتكن A مصفوفة مربعة.

(١) استخدم العمليات الصفية الأولية لتحويل $[A \mid I]$ إلى صيغة درجية صفية مختزلة وليكن $[B \mid C]$.

(٢) إذا كانت $B = I$ فإن $C = A^{-1}$.

(٣) إذا كانت $B \neq I$ فإنه لا يوجد معكوس للمصفوفة A .

مثال (١٦ ، ١)

جد معكوس المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

الحل

نريد أن نختزل A إلى I باستخدام عمليات صفية أولية وبالوقت نفسه نستخدم العمليات الصفية نفسها لإختزال I إلى A^{-1}. ولهذا الغرض نقرن المصفوفة المحايدة مع المصفوفة A لنحصل على مصفوفة من الصيغة $[A|I]$ ونجري عليها العمليات الصفية لنحصل على $[I|A^{-1}]$ وإليك خطوات الحل :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{1R_{12},\,-2R_{13}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_{23}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{-1R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-1R_{21},\,-4R_{23}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -7 & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{-1R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -1 & -4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-R_{32}}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-1&0&1\\0&1&0&-5&1&3\\0&0&1&7&-1&-4\end{array}\right]$$

ولذا فإن : $A^{-1}=\begin{bmatrix}-1&0&1\\-5&1&3\\7&-1&-4\end{bmatrix}$. □

مثال (١٧ ، ١)

جد معكوس المصفوفة (إن وجد) $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}$.

الحل

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\4&5&6&0&1&0\\7&8&9&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{-4R_{12},\,-7R_{13}}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&-3&-6&-4&1&0\\0&-6&-12&-7&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{-1}{3}R_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&1&2&\frac{4}{3}&\frac{-1}{3}&0\\0&-6&-12&-7&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-2R_{21},\,6R_{23}}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&\frac{-5}{3}&\frac{2}{3}&0\\0&1&2&\frac{4}{3}&\frac{-1}{3}&0\\0&0&0&1&-2&1\end{array}\right]$$

بما أن عناصر الصف الأخير للمصفوفة اليسرى جميعها أصفار فإنه لا يوجد معكوس للمصفوفة A. □

تمارين (١٠٣)

(١) إذا كانت $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ وكان $ad-bc\neq 0$ فأثبت أن للمصفوفة A معكوساً وأن $A^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

(٢) استخدم التمرين (١) لإيجاد معكوس كل من المصفوفات التالية (إن وجد).

(أ) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

(ج) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

(٣) أحسب معكوس كل من المصفوفات التالية (إن وجد).

(أ) $\begin{bmatrix} 1 & 7 & 12 \\ 5 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 7 & 1 \end{bmatrix}$

(ج) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

(ل) $\begin{bmatrix} -1 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ (هـ) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 7 & 6 \\ 0 & -1 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$

(و) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (ي) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

(٤) أكتب كلاً من المصفوفات التالية كحاصل ضرب مصفوفات أولية (إن أمكن ذلك).

(أ) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ (ج) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \\ -2 & 2 & 15 \end{bmatrix}$.

(٥) إذا كانت E مصفوفة أولية فأثبت أن E^T مصفوفة أولية أيضًا.

(٦) إذا كان لكل من A و B معكوس فهل من الضروري أن يكون للمصفوفة $A + B$ معكوس ؟

(٧) إذا كان للمصفوفة A معكوس وكان $AB = AC$ فأثبت أن $B = C$.

(٨) إذا كان للمصفوفة A معكوس وكان $A^2 - 3A + I = 0$ فأثبت أن $A^{-1} = \frac{1}{2}(3I - A)$.

(٩) ليكن للمصفوفة A معكوس .

(أ) إذا كانت $A^2 = 0$ فأثبت أن $(I - A)^{-1} = I + A$.

(ب) إذا كانت $A^3 = 0$ فأثبت أن $(I - A)^{-1} = I + A + A^2$.

(ج) هل تستطيع تعميم الفقرتين (أ) و (ب) ؟

(١٠) إذا كانت كل من A و B مصفوفة من الدرجة n وكانت $AB = BA$ فأثبت أن $(AB)^2 = A^2 B^2$.

(١٠) إذا كانت كل من A و B مصفوفة من الدرجة n وكانت $AB = BA$ فأثبت أن $(AB)^2 = A^2 B^2$.

(١١) إذا كانت كل من A و B مصفوفة من الدرجة n ولكل منهما معكوس وكان $(AB)^2 = A^2 B^2$ فأثبت أن $AB = BA$.

(١٢) لتكن كل من A و B مصفوفة من الدرجة n ولكل منهما معكوس.

(أ) أثبت أن $A^{-1} + B^{-1} = A^{-1} (A + B) B^{-1}$.

(ب) إذا كان للمصفوفة $A + B$ معكوس أيضًا فأثبت أنه يوجد معكوس للمصفوفة $A^{-1} + B^{-1}$ وأن $(A^{-1} + B^{-1})^{-1} = B (A + B)^{-1} A$.

(١٣) لتكن كل من A و B مصفوفة من الدرجة n .

(أ) أثبت أن $A (I + BA) = (I + AB) A$.

(ب) أثبت أن $(I + BA) B = B (I + AB)$.

(ج) إذا كان للمصفوفة $I + AB$ معكوس ، فأثبت أنه يوجد معكوس للمصفوفة $I + BA$ وأن $(I + BA)^{-1} = I - B (I + AB)^{-1} A$.

(١٤) عين ثماني مصفوفات من الدرجة 3 بحيث يكون $A^2 = I$.

(١٥) أكتب كلاً من المصفوفات التالية بأبسط صورة ممكنة :

(أ) $A (B + A^{-1}) (B^{-1} A^{-1})$.   (ب) $(A + B) (A^{-1} - B^{-1})$.

(١٦) إذا كانت كل من A و B من الدرجة n وكان لكل من A و B و $A + B$ معكوس ، فهل من الضروري أن يكون $(A + B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$ ؟

(١٧) حل المعادلة المصفوفية التالية لإيجاد X :

$$A (X + B) A^{-1} = C .$$

(١٨) إذا كان للمصفوفة A معكوس ، فأثبت أن لكل من $A A^T$ و $A^T A$ معكوسًا.

(٤ ، ١) مصفوفات خاصة
Special Matrices

لقد تعرفنا في البنود السابقة لهذا الفصل على مصفوفات ذات طبيعة خاصة مثل المصفوفة الصفرية ، المصفوفة المحايدة ، المصفوفة القطرية ، المصفوفة الأولية والصيغة الدرجية الصفية المختزلة لمصفوفة. نقدم في هذا البند مزيدًا من المصفوفات الخاصة (والتي لها أهمية خاصة في الجبر الخطي) وندرس خواصها الأساسية.

تعريف (١٦ ، ١)

لتكن $A = [a_{ij}]$ مصفوفة من الدرجة n . نقول إن A مصفوفة مثلثية علوية (upper triangular) إذا كانت جميع عناصرها التي تقع أسفل القطر الرئيسي أصفارًا. أي أن $a_{ij} = 0$ لكل $i > j$.

ونقول إن A مصفوفة مثلثية سفلية (lower triangular) إذا كانت جميع عناصرها التي تقع أعلى القطر الرئيسي أصفارًا. أي أن $a_{ij} = 0$ لكل $i < j$

ونقول إن A مصفوفة مثلثية إذا كانت A مصفوفة مثلثية علوية أو مثلثية سفلية.

ملحوظة

لاحظ أن المصفوفة القطرية هي مثلثية علوية وسفلية في آن واحد .

تعريف (١٧ ، ١)

لتكن A مصفوفة مربعة.

(١) نقول إن A متماثلة (symmetric) إذا كانت $A^T = A$.

(٢) نقول إن A متماثلة تخالفيًا (skew – symmetric) إذا كانت $A^T = -A$.

ملحوظة

جميع المصفوفات التي مرت معنا كانت عناصرها أعداداً حقيقية ولكننا في كثير من الأحيان نحتاج لدراسة مصفوفات عناصرها أعداد مركبة، نسمي مثل هذه المصفوفات ، المصفوفات المركبة وذلك لتفريقها عن المصفوفات الحقيقية.

مثال (١٨ ، ١)

كل من المصفوفتين $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 7 \\ -1 & 7 & 5 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} i & i & 1+i \\ i & 2i & 2-i \\ 1+i & 2-i & 1 \end{bmatrix}$

متماثلة. أما المصفوفة $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ فإنها ليست متماثلة. □

مثال (١٩ ، ١)

كل من المصفوفتين التاليين متماثلة تخالفيًا :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 7 \\ 1 & -7 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & i & 1+i \\ -i & 0 & 2-i \\ -1-i & -2+i & 0 \end{bmatrix} . \square$$

ملحوظة

لاحظ أنه إذا كانت A متماثلة تخالفيًا فإن $a_{ij} = -a_{ji}$ لكل j , i . وبصورة خاصة $a_{ii} = -a_{ii}$. أي أن $a_{ii} = 0$ لكل i . لذا فإن عناصر القطر الرئيسي جميعها أصفارًا.

المبرهنة التالية تزودنا بطرق للحصول على مصفوفة متماثلة (متماثلة تخالفياً) من مصفوفة مربعة .

مبرهنة (١٠ ، ١)

لتكن A مصفوفة مربعة وليكن $k \in \mathbf{R}$. عندئذٍ :

(١) $A\,A^T$ مصفوفة متماثلة.

(٢) $A + A^T$ مصفوفة متماثلة.

(٣) $A - A^T$ مصفوفة متماثلة تخالفيًا.

(٤) إذا كانت A متماثلة فإن kA متماثلة.

(٥) إذا كانت A متماثلة تخالفيًا فإن kA متماثلة تخالفيًا.

(٦) يوجد مصفوفتان وحيدتان B و C حيث B متماثلة و C متماثلة تخالفيًا بحيث يكون $A = B + C$.

البرهان

(١) $(A\,A^T)^T = (A^T)^T A^T = A\,A^T$. أي أن $A\,A^T$ متماثلة.

(٢) $(A + A^T)^T = A^T + (A^T)^T = A^T + A = A + A^T$. إذن $A + A^T$ متماثلة.

(٣) $(A - A^T)^T = A^T + (-A^T)^T = A^T - (A^T)^T = A^T - A = -(A - A^T)$.
ولذا فإن $A - A^T$ متماثلة تخالفيًا.

(٤) بما أن A متماثلة فإن $A^T = A$. ومن ثم فإن $(kA)^T = kA^T = kA$.
ولذا فإن kA متماثلة.

(٥) بما أن A متماثلة تخالفيًا فإن $A^T = -A$. ومن ثم فإن :

$(kA)^T = kA^T = k(-A) = -kA$. ولذا فإن kA متماثلة تخالفيًا.

(٦) لاحظ أن $B = \frac{1}{2}(A + A^T)$ متماثلة وأن $C = \frac{1}{2}(A - A^T)$ متماثلة تخالفيًا

وأن $B + C = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A^T + \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}A^T = A$.

ولإثبات الوحدانية نفرض أن D متماثلة وأن E متماثلة تخالفياً حيث

$$A = B + C = D + E \qquad (١)$$

الآن :

$$A^T = (D + E)^T = D^T + E^T = D - E \qquad (٢)$$

ولذا فإننا بجمع (١) و (٢) مرة وطرحهما مرة أخرى نجد ان :

$2D = A + A^T$ و $2E = A - A^T$. ولذا فإن :

$D = \frac{1}{2}(A + A^T) = B$ وإن $E = \frac{1}{2}(A - A^T) = C$.

إذن ، B و C وحيدتان . ♦

مثال (١ ، ٢٠)

إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ فإن المصفوفة المتماثلة B والمصفوفة المتماثلة تخالفياً C حيث $A = B + C$ هما :

$$B = \frac{1}{2}(A + A^T) = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 4 \end{bmatrix}$$

$$\square \quad . \ C = \frac{1}{2}(A - A^T) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \frac{-3}{2} \\ -1 & \frac{3}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

تعريف (١٨ ، ١)

إذا كانت $A = [a_{ij}]$ مصفوفة مركبة فإن المصفوفة $\overline{A} = [\overline{a}_{ij}]$ تسمى المصفوفة المرافقة (conjugate) للمصفوفة A حيث $\overline{a}_{ij}$ هو مرافق العدد المركب a_{ij}.

الخواص الأساسية للمصفوفة المرافقة تقدمها لنا المبرهنة التالية :

مبرهنة (١١ ، ١)

(١) $\overline{\overline{A}} = A$.

(٢) $(\overline{kA}) = \overline{k}\,\overline{A}$ حيث $k \in \mathbf{C}$

(٣) $(\overline{A+B}) = \overline{A} + \overline{B}$ حيث A و B من الدرجة نفسها .

(٤) $(\overline{AB}) = \overline{A}\,\overline{B}$ حيث A من الدرجة $m \times n$ و B من الدرجة $n \times p$.

جميع فقرات المبرهنة تنتج من خواص مرافق العدد المركب ولذا نتركها كتمرين للقارئ . ♦

تعريف (١٩ ، ١)

لتكن A مصفوفة مركبة . تسمى المصفوفة $(\overline{A})^T$ مصفوفة المنقول المرافقة (coniugate transpose) ويرمز لها بالرمز A^* .

ملحوظة

لاحظ أن $A^* = (\overline{A})^T = (\overline{A^T})$.

مثال (٢١ ، ١)

إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 0 & 1+i & i \\ 2 & 3-2i & -i \end{bmatrix}$ فإن $\overline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1-i & -i \\ 2 & 3+2i & i \end{bmatrix}$.

ولذا فإن $A^* = (\overline{A})^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1-i & 3+2i \\ -i & i \end{bmatrix}$. □

مبرهنة (١٢ ، ١)

العملية * تحقق الخواص التالية :

(١) $(A^*)^* = A$. (٢) $(A+B)^* = A^* + B^*$.

(٣) $(kA)^* = \overline{k}A^*$ حيث $k \in C$. (٤) $(AB)^* = B^* A^*$.

البرهان

(١) $(A^*)^* = [(\overline{A})^T]^* = \left(\overline{(\overline{A})^T}\right)^T = [(\overline{\overline{A}})^T]^T = A$.

(٢) $(A+B)^* = (\overline{A+B})^T = (\overline{A}+\overline{B})^T = (\overline{A})^T + (\overline{B})^T = A^* + B^*$.

(٣) $. (kA)^* = (\overline{kA})^T = (\bar{k}\,\overline{A})^T = \bar{k}(\overline{A})^T = \bar{k}A^*$

(٤) $\blacklozenge\ . (AB)^* = (\overline{AB})^T = (\overline{A}\,\overline{B})^T = (\overline{B})^T(\overline{A})^T = B^*A^*$

تعريف (٢٠ ، ١)

لتكن A مصفوفة مركبة لها معكوس. نقول إن A مصفوفة واحدية (unitary) إذا كانت $A^{-1} = A^*$.

مثال (٢٢ ، ١)

المصفوفة $A = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5}i \\ \frac{-4}{5} & \frac{3}{5}i \end{bmatrix}$ واحدية. وذلك لأن $A^* = (\overline{A^T}) = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{-4}{5} \\ \frac{-4}{5}i & \frac{-3}{5}i \end{bmatrix}$

كما أن $AA^* = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5}i \\ \frac{-4}{5}i & \frac{3}{5}i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{-4}{5} \\ \frac{-4}{5}i & \frac{-3}{5}i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

ولذا فإن $A^{-1} = A^*$. □

ملحوظة

إذا كانت A مصفوفة حقيقية فإن $\overline{A} = A$ ؛ ولذا فإن $A^* = A^T$. وبالتالي فإن A واحدية إذا وفقط إذا كانت $A^{-1} = A^T$. في كثير من الأحيان يطلق على المصفوفة الواحدية الحقيقية بالمصفوفة المتعامدة (orthogonal) .

مثال (٢٣ ، ١)

المصفوفة $A = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{2}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{-6}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{6}{7} & \frac{-3}{7} \end{bmatrix}$ متعامدة لأن من السهل التحقق من أن $A^TA = I$

أي أن $A^{-1} = A^{T}$. □

تعريف (١ ، ٢١)

لتكن A مصفوفة مركبة مربعة. نقول إن A مصفوفة هيرميتية (Hermitian) إذا كانت $A^{*} = A$. ونقول إنها هيرميتية تخالفياً إذا كانت $A^{*} = -A$.

مثال (١ ، ٢٤)

المصفوفة $A = \begin{bmatrix} -2 & 1-i & -1+i \\ 1+i & 0 & 3 \\ -1-i & 3 & 5 \end{bmatrix}$ هيرميتية.

أما المصفوفة $B = \begin{bmatrix} i & 2 & 1+2i \\ -2 & 5i & -2+i \\ -1+2i & 2+i & 0 \end{bmatrix}$ فهي هيرميتية تخالفياً . □

تمارين (١ ، ٤)

(١) لتكن كل من A و B مصفوفة متماثلة من الدرجة n . أثبت أن :

(أ) $AB + BA$ متماثلة. (ب) $AB - BA$ متماثلة تخالفيًا.

(ج) AB متماثلة إذا وفقط إذا كانت $AB = BA$.

(٢) لتكن كل من A و B مصفوفة متماثلة تخالفيًا من الدرجة n . أثبت أن AB متماثلة تخالفيًا إذا وفقط إذا كانت $AB = -BA$.

(٣) إذا كانت A مصفوفة متماثلة فأثبت أن $2A^2 - 3A + I$ مصفوفة متماثلة.

(٤) نقول إن المصفوفة A متساوية القوى إذا كانت $A^2 = A$. إذا كانت $A^TA = A$ فأثبت أن A متماثلة ومتساوية القوى .

(٥) لتكن كلٍ من A و B مصفوفة من الدرجة n . أثبت أن :

(أ) $A^TB + B^TA$ متماثلة. (ب) $A^TB - B^TA$ متماثلة تخالفيًا.

(٦) بين أيا من المصفوفات التالية واحدية وعين معكوس الواحدية منها .

(أ) $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} e^{i\theta} & e^{-i\theta} \\ ie^{i\theta} & -ie^{-i\theta} \end{bmatrix}$ (ب) $\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 4i \\ -4 & 3i \end{bmatrix}$

(ج) $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{-1+i}{\sqrt{2}} & \frac{1+i}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ (د) $\frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \sqrt{3}+i & 1-i\sqrt{3} \\ 1+i\sqrt{3} & i-\sqrt{3} \end{bmatrix}$

(ل) $\begin{bmatrix} \frac{1+i}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{i}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{i}{\sqrt{3}} \\ \frac{3+i}{2\sqrt{15}} & \frac{4+3i}{2\sqrt{15}} & \frac{5i}{2\sqrt{15}} \end{bmatrix}$.

(٧) إذا كانت A مصفوفة واحدية فأثبت أن A^* واحدية.

(٨) نقول إن المصفوفة المربعة المركبة A ناظمية (normal) إذا كانت $AA^* = A^*A$.

(أ) أثبت أن المصفوفة $\begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & -3 \end{bmatrix}$ ناظمية.

(ب) إذا كانت A هيرميتية فأثبت أن A ناظمية. هل العكس صحيح ؟

(ج) إذا كانت A واحدية فأثبت أن A ناظمية. هل العكس صحيح ؟

(٩) عين كلاً من a، b و c بحيث تكون المصفوفة A هيرميتية.

$$A=\begin{bmatrix}-1 & a & -i\\ 3-5i & 0 & c\\ b & 2+4i & 2\end{bmatrix}$$

(١٠) إذا كـان للمصـفوفة A معكـوس فأثـبت أن للمصـفوفة A^* معكـوس كذلـك وأن $(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*$.

(١١) إذا كانت كلٍ من A و B متعامدة فأثبت أن AB متعامدة أيضًا.

(١٢) إذا كـانت A مصـفوفة مـربعة فأثـبت أن $A+A^*$ هيرميتية وأن $A-A^*$ هيرميتية تخالفيًا.

(١٣) إذا كانت A هيرميتية (أو هيرميتية تخالفيًا) فأثبت أن kA هيرميتية (أو هيرميتية تخالفيًا) حيث $k\in C$.

(١٤) إذا كـانت Aمصـفوفة مـربعة فأثـبت أنـه يوجـد مصـفوفتان وحيدتـان C,B حيث $A = B + C$ وحيث B هيرميتية و C هيرميتية تخالفياً.

(١٥) أي من المصفوفات التالية هيرميتية وأي منها هيرميتية تخالفياً.

(أ) $\begin{bmatrix}0 & i\\ i & 2\end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix}0 & 3+2i\\ -3+2i & 0\end{bmatrix}$

(ج) $\begin{bmatrix}i & i\\ -i & i\end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix}1 & 1+i\\ 1-i & -3\end{bmatrix}$

(ل) $\begin{bmatrix}-2 & 1-i & -1+i\\ 1+i & 0 & 3\\ -1-i & 3 & 5\end{bmatrix}$ (ع) $\begin{bmatrix}1 & -3i & 7\\ 3i & 0 & -3+2i\\ 7 & -3-5i & 5\end{bmatrix}$.

(١٦) نقـول إن المصـــفوفة المــربعة A متســاوية القــوى (idempotent) إذا كـــانت $A^2 = A$.

(أ) أثبت أن المصفوفة $\begin{bmatrix}-1 & 3 & 5\\ 1 & -3 & -5\\ -1 & 3 & 5\end{bmatrix}$ متساوية القوى.

(ب) إذا كانت A متساوية القوى ولها معكوس فأثبت أن $A = I$.

(ج) أثبت أن A متساوية القوى إذا وفقط إذا كان للمصفوفة $I-2A$ معكوس وأن $(I-2A)^{-1} = I-2A$.