

فضاءات الضرب الداخلي INNER PRODUCT SPACES

(٥ ، ١) تعريف الضرب الداخلي Definition of Inner Product

لعل القارئ على دراية بمفهوم الضرب الاقليدي (أو القياسي) في فضائي المتجهات \mathbb{R}^2 أو \mathbb{R}^3 . في هذا البند نقدم تعميماً لهذا المفهوم وندرس خواصه الأساسية .

تعريف (٥ ، ١)

ليكن V فضاء متجهات حقيقي . نقول إن الدالة $\langle \cdot , \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ دالة ضرب داخلي على V (inner product on V) إذا تحقق كل مما يلي وذلك لكل

$$u, v, w \in V \text{ وكل } \alpha \in \mathbb{R}$$

$$(١) \langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle .$$

$$(٢) \langle u+v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle .$$

$$(٣) \langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle .$$

$$(٤) \langle v, v \rangle \geq 0 .$$

$$(٥) \langle v, v \rangle = 0 \text{ إذا وفقط إذا كان } v = 0 .$$

يسمى فضاء المتجهات الحقيقي V فضاء ضرب داخلي (inner product space) إذا كان معرفاً عليه دالة ضرب داخلي .

مثال (٥ ، ١)

إذا كان $V = \mathbb{R}^n$ وكان $u = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ و $v = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ عنصرين من V فإن القاعدة : $\langle u, v \rangle = u \cdot v = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$

دالة ضرب داخلي (تسمى دالة الضرب الاقليدي) ويسمى V في هذا الحالة فضاء الضرب الاقليدي (Euclidean product space).

الحل

لنفرض أن $u = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $v = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, $w = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ متجهات في \mathbb{R}^n وأن $\alpha \in \mathbb{R}$. عندئذٍ

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n & (1) \\ &= b_1 a_1 + b_2 a_2 + \dots + b_n a_n = \langle v, u \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle u + v, w \rangle &= (a_1 + b_1)c_1 + (a_2 + b_2)c_2 + \dots + (a_n + b_n)c_n & (2) \\ &= (a_1 c_1 + a_2 c_2 + \dots + a_n c_n) + (b_1 c_1 + b_2 c_2 + \dots + b_n c_n) \\ &= \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \alpha u, v \rangle &= (\alpha a_1)b_1 + (\alpha a_2)b_2 + \dots + (\alpha a_n)b_n & (3) \\ &= \alpha (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n) = \alpha \langle u, v \rangle \end{aligned}$$

$$\langle v, v \rangle = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \geq 0 \quad (4)$$

$$\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = 0 \quad (5)$$

$$\Leftrightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0 \Leftrightarrow u = 0$$

وعليه فإن \mathbb{R}^n فضاء ضرب داخلي. \square

ملحوظة

لاحظ أن الضرب الاقليدي المعروف في المثال (١ ، ٥) يمكن كتابته بدلالة المصفوفات كما يلي $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u} \mathbf{v}^T = \mathbf{v} \mathbf{u}^T$.

مثال (٢ ، ٥)

إذا كان $\mathbf{u} = (a_1, a_2)$, $\mathbf{v} = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ وكان $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 7a_1b_1 + 5a_2b_2$ فإن \mathbb{R}^2 فضاء ضرب داخلي .

الحل

لنفرض أن $\mathbf{u} = (a_1, a_2)$, $\mathbf{v} = (b_1, b_2)$, $\mathbf{w} = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ وأن $\alpha \in \mathbb{R}$.
عندئذ

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 7a_1b_1 + 5a_2b_2 = 7b_1a_1 + 5b_2a_2 = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle &= 7(a_1 + b_1)c_1 + 5(a_2 + b_2)c_2 & (2) \\ &= (7a_1c_1 + 5a_2c_2) + (7b_1c_1 + 5b_2c_2) = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \alpha \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle &= 7(\alpha a_1)b_1 + 5(\alpha a_2)b_2 & (3) \\ &= \alpha(7a_1b_1 + 5a_2b_2) = \alpha \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \end{aligned}$$

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 7a_1^2 + 5a_2^2 \geq 0 \quad (4)$$

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0 \Leftrightarrow 7a_1^2 + 5a_2^2 = 0 \Leftrightarrow a_1 = a_2 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (5)$$

وبالتالي فإن \mathbb{R}^2 فضاء ضرب داخلي . \square

ملحوظة

من الممكن تعميم المثال (٢ ، ٥) إلى \mathbb{R}^n كالتالي : لنفرض أن $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ أعداد حقيقية موجبة ولنفرض أن :

$$\mathbf{u} = (a_1, a_2, \dots, a_n), \mathbf{v} = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n \text{ . عندئذٍ فإن :}$$

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \alpha_1 a_1 b_1 + \alpha_2 a_2 b_2 + \dots + \alpha_n a_n b_n$$

تعرف دالة ضرب داخلي على \mathbb{R}^n (تحقق من ذلك) . يسمى هذا الضرب الداخلي

بالضرب الداخلي الاقليدي الموزون (weighted Euclidean inner product) وتسمى $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ أوزان الضرب الداخلي . لاحظ أيضاً أن الضرب الاقليدي

ما هو إلا حالة خاصة من الضرب الداخلي الموزون وذلك بوضع :

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 1$$

مثال (٣ ، ٥)

إذا كان $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2, q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 \in P_2$ حيث

$$\langle p(x), q(x) \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 \text{ فإن } P_2 \text{ فضاء ضرب داخلي .}$$

الحل

نفرض أن $\alpha \in \mathbb{R}$ وأن :

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2, q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2, r(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 \in P_2$$

$$\langle p, q \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 = b_0a_0 + b_1a_1 + b_2a_2 = \langle q, p \rangle \quad (١)$$

$$\langle p+q, r \rangle = (a_0 + b_0)c_0 + (a_1 + b_1)c_1 + (a_2 + b_2)c_2 \quad (٢)$$

$$= (a_0c_0 + a_1c_1 + a_2c_2) + (b_0c_0 + b_1c_1 + b_2c_2) = \langle p, r \rangle + \langle q, r \rangle$$

$$\langle \alpha p, q \rangle = (\alpha a_0)b_0 + (\alpha a_1)b_1 + (\alpha a_2)b_2 \quad (٣)$$

فضاءات الضرب الداخلي

$$= \alpha (a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2) = \alpha \langle p, q \rangle$$

$$\cdot \langle p, p \rangle = 0 \Leftrightarrow a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 \geq 0 \quad (٤)$$

$$\langle p, p \rangle = 0 \Leftrightarrow a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 = 0 \Leftrightarrow a_0 = a_1 = a_2 = 0 \Leftrightarrow p = 0 \quad (٥)$$

وعليه فإن P_2 فضاء ضرب داخلي . \square

مثال (٤ ، ٥)

ليكن $f, g \in C[a, b]$ حيث $C[a, b]$ هي فضاء المتجهات المكون من الدوال المتصلة على الفترة المغلقة $[a, b]$. عندئذ فإن القاعدة :

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$
 تعرف فضاء ضرب داخلي على $C[a, b]$.

الحل

نفرض أن $f, g, h \in C[a, b]$ وأن $\alpha \in \mathbf{R}$. عندئذ :

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b g(x)f(x)dx = \langle g, f \rangle \quad (١)$$

$$\langle f+g, h \rangle = \int_a^b [f(x)+g(x)]h(x)dx \quad (٢)$$

$$= \int_a^b f(x)h(x)dx + \int_a^b g(x)h(x)dx = \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle$$

$$\langle \alpha f, g \rangle = \int_a^b (\alpha f(x))g(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)g(x)dx = \alpha \langle f, g \rangle \quad (٣)$$

(٤) بما أن f متصلة على $[a, b]$ فإن $[f(x)]^2 \geq 0$ لكل $x \in [a, b]$. ولذا فإن $\langle f, f \rangle \geq 0$.

$$\langle f, f \rangle = 0 \Leftrightarrow \int_a^b (f(x))^2 dx = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \quad (٥)$$

وبالتالي فإن $C[a, b]$ فضاء ضرب داخلي . \square

مثال (٥، ٥)

إذا كانت $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix} \in M_{22}$ وكان

$\langle A, B \rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4$ فإن M_{22} فضاء ضرب داخلي .

الحل

نفرض أن $A, B, C \in M_{22}$ وأن $\alpha \in \mathbb{R}$. عندئذ :

$$\langle A, B \rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4 \quad (١)$$

$$= b_1a_1 + b_2a_2 + b_3a_3 + b_4a_4 = \langle B, A \rangle$$

$$\begin{aligned} \langle A+B, C \rangle &= (a_1 + b_1)c_1 + (a_2 + b_2)c_2 + (a_3 + b_3)c_3 + (a_4 + b_4)c_4 \quad (٢) \\ &= (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 + a_4c_4) + (b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 + b_4c_4) \\ &= \langle A, C \rangle + \langle B, C \rangle \end{aligned}$$

$$\langle \alpha A, B \rangle = (\alpha a_1)b_1 + (\alpha a_2)b_2 + (\alpha a_3)b_3 + (\alpha a_4)b_4 \quad (٣)$$

$$= \alpha (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4) = \alpha \langle A, B \rangle$$

$$\langle A, A \rangle = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 \geq 0 \quad (٤)$$

$$\langle A, A \rangle = 0 \Leftrightarrow a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = 0 \quad (٥)$$

$$\Leftrightarrow a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0 \Leftrightarrow A = 0$$

إذن M_{22} فضاء ضرب داخلي . \square

سنهني هذا البند بتقديم الخصائص الأساسية لدالة الضرب الداخلي .

مبرهنة (٥، ١)

إذا كان V فضاء ضرب داخلي وكان $u, v, w \in V$ و $\alpha \in \mathbb{R}$ فإن :

$$\langle 0, v \rangle = \langle v, 0 \rangle = 0 \quad (١)$$

$$\langle u, v+w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle \quad (٢)$$

فضاءات الضرب الداخلي

$$\cdot \langle \mathbf{u}, \alpha \mathbf{v} \rangle = \alpha \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \quad (٣)$$

$$\cdot \langle \mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle - \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \quad (٤)$$

$$\cdot \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle \quad (٥)$$

البرهان

$$\cdot \langle \mathbf{0}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{0} + \mathbf{0}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{0}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{0}, \mathbf{v} \rangle \quad (١)$$

$$\cdot \langle \mathbf{0}, \mathbf{v} \rangle = 0 \text{ ومن ثم فإن } \langle \mathbf{0}, \mathbf{v} \rangle + (-\langle \mathbf{0}, \mathbf{v} \rangle) = \langle \mathbf{0}, \mathbf{v} \rangle$$

$$\cdot \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle \quad (٢)$$

$$\cdot \langle \mathbf{u}, \alpha \mathbf{v} \rangle = \langle \alpha \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = \alpha \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle \quad (٣)$$

$$\langle \mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u} + (-\mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle -\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \quad (٤)$$

$$= \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle - \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$$

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v} - \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle - \langle \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle \quad (٥)$$

وبهذا يتم البرهان . ♦

(تمارين ١ ، ٥)

في التمارين من (١) إلى (٨) بين ما إذا كانت الدالة المبينة هي دالة ضرب

داخلي على \mathbb{R}^3 أم لا حيث $\mathbf{u} = (a_1, a_2, a_3)$ و $\mathbf{v} = (b_1, b_2, b_3)$.

$$\cdot \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = a_1 b_2 + a_2 b_1 \quad (١)$$

$$\cdot \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_1 a_2 b_3 \quad (٢)$$

$$\cdot \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 2a_1 b_1 + 5a_2 b_2 + a_3 b_3 - a_2 b_3 - a_3 b_2 \quad (٣)$$

$$\cdot \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 \quad (٤)$$

$$\cdot \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = a_1 + b_1 \quad (٥)$$

$$\cdot \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = a_1^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 + a_3^2 b_3^2 \quad (٦)$$

$$\cdot \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = a_1^2 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \quad (\vee)$$

$$\cdot \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = a_1 b_1 - a_2 b_2 + a_3 b_3 \quad (\wedge)$$

(٩) إذا كانت $p, q \in P_2$ فأثبت أن :

$$\langle p(x), q(x) \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$$

دالة ضرب داخلي على P_2 .

(١٠) إذا كانت $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2, q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 \in P_2$ فهل

$$\langle p(x), q(x) \rangle = a_0 b_0 - a_1 b_1 + a_2 b_2$$
 دالة ضرب داخلي على P_2 ؟

(١١) بسط كلا مما يلي في فضاء الضرب الداخلي V .

$$\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle \quad (\text{أ}) \quad \langle 2\mathbf{v} - \mathbf{w}, 3\mathbf{u} + 2\mathbf{w} \rangle \quad (\text{ب})$$

$$\langle \mathbf{u} - \mathbf{v} + 4\mathbf{w}, 3\mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle \quad (\text{ج})$$

(١٢) إذا كانت $f, g \in D[a, b]$ فهل $\langle f(x), g(x) \rangle = f'(x) + g'(x)$ دالة ضرب

داخلي على $D[a, b]$ ؟

(١٣) إذا كانت $f, g \in C[0, 1]$ فهل $\langle f(x), g(x) \rangle = f(1)g(0) + f(0)g(1)$ دالة

ضرب داخلي على $C[0, 1]$ ؟

(١٤) إذا كانت $p, q \in P_3$ فهل $\langle p, q \rangle = p(1)q(1)$ دالة ضرب داخلي على P_3 ؟

(١٥) إذا كانت $A, B \in M_{nn}$ فهل $\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB)$ دالة ضرب داخلي على

M_{nn} ؟

(١٦) لتكن A مصفوفة من الدرجة n ولها معكوس وليكن $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. أثبت أن

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = (\mathbf{A}\mathbf{u})^T (\mathbf{A}\mathbf{v})$$
 دالة ضرب داخلي على \mathbb{R}^n .

(١٧) إذا كان V فضاء ضرب داخلي وكان $\mathbf{v}_0 \in V, \mathbf{v}_0 \neq \mathbf{0}$ فأثبت أن :

$$W = \{ \mathbf{u} \in V : \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_0 \rangle = 0 \}$$
 تشكل فضاءً جزئياً من V .

(١٨) إذا كان $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ مرتبطين خطياً في فضاء الضرب الداخلي V فاحسب قيمة

$$\cdot \begin{vmatrix} \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle & \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \\ \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle & \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \end{vmatrix} \quad \text{المحدد}$$

(١٩) إذا كانت $A, B \in M_{nn}$ فأثبت أن $\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^T A)$ ضرب داخلي على M_{nn} .

(٢٠) إذا كان V فضاء ضرب داخلي فأثبت أن :

$$\langle \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n, w \rangle = \alpha_1 \langle v_1, w \rangle + \alpha_2 \langle v_2, w \rangle + \dots + \alpha_n \langle v_n, w \rangle$$

وذلك لكل $v_i, w \in V$ وكل $\alpha_i \in \mathbb{R}$.

(٢١) لنفرض أن x_0, x_1, \dots, x_n أعداد حقيقية مختلفة وليكن $p, q \in P_n$ ولنعرّف

$$\langle p, q \rangle = p(x_0)q(x_0) + p(x_1)q(x_1) + \dots + p(x_n)q(x_n)$$

فضاء ضرب داخلي.

(٢ ، ٥) التعامد

Orthogonality

لاشك أن القارئ على علم في المفاهيم الهندسية للفضاء الإقليدي \mathbb{R}^2 والتي عادة ما تدرس في مقرر الهندسة التحليلية مثل طول المتجه ، قياس الزاوية بين متجهين ، التعامد وغيرها من المفاهيم الهندسية الأخرى . في هذا البند نستعين بالضرب الداخلي على فضاء متجهات V ليساعدنا على تعميم المفاهيم الهندسية في \mathbb{R}^2 إلى مفاهيم مرادفة في V .

تعريف (٢ ، ٥)

ليكن V فضاء ضرب داخلي وليكن $u \in V$. نعرف طول أو معيار u (length or norm) والذي نرمز له بالرمز $\|u\|$ كالتالي :

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$$

وإذا كان $w \in V$ متجهاً آخر فإننا نعرف المسافة بين u و w

(distance between u and w) والتي نرمز لها بالرمز $d(u, w)$ كالتالي :

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{w}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u} - \mathbf{w}, \mathbf{u} - \mathbf{w} \rangle}$$

مثال (٥، ٦)

إذا كان $\mathbf{u} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\mathbf{w} = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ وكان الضرب الداخلي المعرف على \mathbb{R}^n هو الضرب الأفليدي فإن $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$ كما أن :

$$\begin{aligned} d(\mathbf{u}, \mathbf{w}) &= \sqrt{\langle \mathbf{u} - \mathbf{w}, \mathbf{u} - \mathbf{w} \rangle} \\ &= \sqrt{(\mathbf{u} - \mathbf{w}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{w})} \\ &= \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \dots + (a_n - b_n)^2} \end{aligned}$$

وعلى وجه الخصوص إذا كان $n=3$ وكان $\mathbf{u} = (1, 2, 3)$ و $\mathbf{w} = (-1, -2, 4)$

فإن $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{(1)^2 + (2)^2 + (3)^2} = \sqrt{14}$ كما أن

$$\square . d(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = \sqrt{(1+1)^2 + (2+2)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{21}$$

مثال (٥، ٧)

إذا كان $\mathbf{u} = (a_1, a_2)$, $\mathbf{v} = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ والضرب الداخلي على \mathbb{R}^2 هو كما في

المثال (٥، ٢) فإن $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{7a_1 b_1 + 5a_2 b_2}$. وكذلك لدينا :

$$\square . d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle} = \sqrt{7(a_1 - b_1)^2 + 5(a_2 - b_2)^2}$$

مثال (٥، ٨)

إذا كانت $p(x) = 2 - x + x^2$, $q(x) = 1 + 2x - x^2 \in P_2$ والضرب الداخلي كما في

المثال (٥، ٣) فإن $\|p(x)\| = \sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{6}$ كما أن

$$\square . d(p(x), q(x)) = \sqrt{(1)^2 + (-3)^2 + (2)^2} = \sqrt{14}$$

مثال (٥، ٩)

إذا كانت $f(x) = \cos x$, $g(x) = \sin x \in C[0, \pi]$ والضرب الداخلي على $C[0, \pi]$

هو كما في المثال (٥ ، ٤) فإن $\| \cos x \| = \left(\int_0^\pi \cos^2 x \, dx \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. كما أن

$$\square. d(\cos x, \sin x) = \left(\int_0^\pi (\cos x - \sin x)^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} = 0$$

المبرهنة التالية تعرف بمتباينة كوشي - شوارتز (Cauchy - Schwartz inequality).

مبرهنة (٥ ، ٢)

ليكن V فضاء ضرب داخلي وليكن $u, v \in V$. عندئذ $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$.

البرهان

إذا كان $u = 0$ فإن النتيجة محققة. لذا نفرض أن $u \neq 0$ وأن $w = v - \frac{\langle v, u \rangle}{\|u\|^2} u$.

عندئذ ،

$$0 \leq \|w\|^2 = \langle w, w \rangle = \left\langle v - \frac{\langle v, u \rangle}{\|u\|^2} u, v - \frac{\langle v, u \rangle}{\|u\|^2} u \right\rangle$$

$$= \langle v, v \rangle - \left\langle v, \frac{\langle v, u \rangle}{\|u\|^2} u \right\rangle - \left\langle \frac{\langle v, u \rangle}{\|u\|^2} u, v \right\rangle + \frac{\langle v, u \rangle^2}{\|u\|^4} \langle u, u \rangle$$

$$= \|v\|^2 - \frac{\langle v, u \rangle^2}{\|u\|^2} - \frac{\langle v, u \rangle^2}{\|u\|^2} + \frac{\langle v, u \rangle^2}{\|u\|^2}$$

$$= \|v\|^2 - \frac{\langle v, u \rangle^2}{\|u\|^2}$$

ولذا فإن $0 \leq \|v\|^2 - \frac{\langle v, u \rangle^2}{\|u\|^2}$. أي أن $\langle v, u \rangle^2 \leq \|v\|^2 \|u\|^2$. وبالتالي فإن :

$$\diamond. |\langle v, u \rangle| \leq \|v\| \|u\|$$

ملحوظات

(١) إذا كان \mathbb{R}^n هو فضاء الضرب الداخلي الأقليدي فإن متباينة كوشي - شوارتز تأخذ الصيغة :

$$.(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)$$

(٢) إذا كان $C = [a, b]$ هو فضاء الضرب الداخلي المعطى في المثال (٤ ، ٥) فإن متباينة كوشي - شوارتز تأخذ الصيغة :

$$.\left[\int_a^b f(x)g(x)dx \right]^2 \leq \int_a^b [f(x)]^2 dx \int_a^b [g(x)]^2 dx$$

نتيجة (٣ ، ٥)

ليكن V فضاء ضرب داخلي وليكن $u, v \in V$. عندئذٍ $\|u\| \|v\| = |\langle u, v \rangle|$ إذا فقط إذا كان المتجهان u و v مرتبطين خطياً .

البرهان

لنفرض أولاً أن $\|u\| \|v\| = |\langle u, v \rangle|$. عندئذٍ نجد أن $\langle w, w \rangle = 0$ حيث

$$w = v - \frac{\langle v, u \rangle}{\|u\|^2} u$$

ولذا فإن $w = 0$. أي أن

$$v = \frac{\langle v, u \rangle}{\|u\|^2} u$$

وبالتالي فإن u و v مرتبطان خطياً . وليرهان العكس نفرض أن u

و v مرتبطان خطياً . عندئذٍ ، يوجد $\alpha \in \mathbb{R}$ بحيث أن $v = \alpha u$. الآن :

$$\langle u, v \rangle^2 = \langle u, \alpha u \rangle^2 = \alpha^2 \langle u, u \rangle^2 = \alpha^2 \langle u, u \rangle \langle u, u \rangle$$

$$= \langle u, u \rangle \langle \alpha u, \alpha u \rangle = \langle u, u \rangle \langle v, v \rangle = \|u\|^2 \|v\|^2$$

وبالتالي فإن $\|u\| \|v\| = |\langle u, v \rangle|$. ♦

تزدونا المبرهنة التالية بالخصائص الأساسية التي يتمتع بها المعيار في فضاءات الضرب الداخلي .

مبرهنة (٤ ، ٥)

ليكن V فضاء ضرب داخلي وليكن $u, v \in V$ و $\alpha \in \mathbb{R}$. عندئذٍ

$$\|u\| \geq 0 \quad (١)$$

$$\|u\| = 0 \text{ إذا وفقط إذا كان } u = 0 \quad (٢)$$

$$\|\alpha u\| = |\alpha| \|u\| \quad (٣)$$

$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\| \quad (٤) \text{ (متباينة المثلث) .}$$

البرهان

$$(١) \text{ بما أن } \langle u, u \rangle \geq 0 \text{ فإن } \|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle} \geq 0$$

$$(٢) \text{ بما أن } \langle u, u \rangle = 0 \text{ إذا وفقط إذا كان } u = 0 \text{ فإن } \|u\| = 0 \text{ إذا وفقط إذا كان}$$

$$u = 0$$

$$(٣) \|\alpha u\|^2 = \langle \alpha u, \alpha u \rangle = \alpha^2 \langle u, u \rangle = \alpha^2 \|u\|^2 \text{ إذن } \|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|$$

$$\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v \rangle = \langle u, u \rangle + 2\langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle \quad (٤)$$

$$\leq \langle u, u \rangle + 2|\langle u, v \rangle| + \langle v, v \rangle$$

$$\leq \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2$$

$$= (\|u\| + \|v\|)^2$$

$$\diamond \text{ وبالتالي فإن } \|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

نتيجة (٥ ، ٥)

إذا كان V فضاء ضرب داخلي وكان $u, v, w \in V$ و $\alpha \in \mathbb{R}$ فإن

$$d(u, v) \geq 0 \quad (١)$$

$$d(u, v) = 0 \text{ إذا وفقط إذا كان } u = v \quad (٢)$$

$$d(u, v) = d(v, u) \quad (٣)$$

$$d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v) \quad (٤) \text{ (متباينة المثلث) .}$$

البرهان

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \geq 0 \quad (١)$$

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0 \Leftrightarrow \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{v} \quad (٢)$$

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\| = d(\mathbf{v}, \mathbf{u}) \quad (٣)$$

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u} - \mathbf{w} + \mathbf{w} - \mathbf{v}\| \quad (٤)$$

$$\leq \|\mathbf{u} - \mathbf{w}\| + \|\mathbf{w} - \mathbf{v}\| = d(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + d(\mathbf{w}, \mathbf{v})$$

وبالتالي $\diamond . d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \leq d(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + d(\mathbf{w}, \mathbf{v})$

نبين الآن كيفية الإستعانة بمتباينة كوشي - شوارتز لتعريف الزاوية بين متجهين

في فضاء الضرب الداخلي .

ليكن V فضاء ضرب داخلي و $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ من متباينة كوشي - شوارتز لدينا :

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \Leftrightarrow \frac{|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle|}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} \leq 1$$

وبالتالي توجد زاوية وحيدة Θ تحقق : $\cos \Theta = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}$ حيث $0 \leq \Theta \leq \pi$

تعريف (٥ ، ٣)

ليكن V فضاء ضرب داخلي وليكن $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$. عندئذ :

(١) يعرف جيب تمام الزاوية Θ بين المتجهين \mathbf{u} و \mathbf{v} بأنه $\cos \Theta = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}$

(٢) نقول إن \mathbf{u} و \mathbf{v} متعامدان (orthogonal) إذا كان $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$

مثال (٥ ، ١٠)

إذا كان \mathbb{R}^2 هو فضاء الضرب الأقليدي فإن جيب تمام الزاوية بين المتجهين

$\mathbf{u} = (1, 2)$ و $\mathbf{v} = (-1, 3)$ هي :

$$\cos \Theta = \frac{(-1)(1) + (3)(2)}{\sqrt{1+9} \sqrt{1+4}} = \frac{5}{\sqrt{50}}$$

فضاءات الضرب الداخلي

كما أن المتجهين $u = (1, 2)$ و $v = (-2, 1)$ متعامدان وذلك لأن :

$$\diamond . \langle u, v \rangle = (-2)(1) + (1)(2) = 0$$

ملحوظة

لاحظ أن فكرة التعامد مرتبطة ارتباطاً كلياً بالضرب الداخلي المعرف على الفضاء V حيث من الممكن أن يكون متجهان متعامدين في فضاء ضرب داخلي V بينما لا يمكن أن يكونا متعامدين لو أننا غيرنا الضرب الداخلي على الفضاء V وهذا ما يوضحه المثال التالي .

مثال (٥ ، ١١)

إذا كان $u = (1, 2) \in \mathbb{R}^2$ و $v = (-2, 1)$ فإننا قد وجدنا في المثال (٥ ، ١٠) أن u و v متعامدان إذا كان الضرب الداخلي على \mathbb{R}^2 هو الضرب الإقليدي . ولكنهما ليسا متعامدين إذا اعتبرنا الضرب الداخلي على \mathbb{R}^2 المعرف في المثال (٥ ، ٢) وذلك لأن : $\langle u, v \rangle = 7(1)(-2) + 5(2)(1) = -14 + 10 \neq 0$. \square

مثال (٥ ، ١٢)

إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -7 & 0 \end{bmatrix} \in M_{22}$ وكان الضرب الداخلي على M_{22} هو الضرب المعرف في المثال (٥ ، ٥) فإن A و B متعامدان وذلك لأن $\langle A, B \rangle = (2)(0) + (0)(1) + (0)(-7) + (-4)(0) = 0$. \square

مثال (٥ ، ١٣)

المتجهان $\sin x$ و $\cos x$ في الفضاء $C[0, \pi]$ متعامدان حيث الضرب الداخلي هو الضرب المعرف في المثال (٥ ، ٤) وذلك لأن

$$\square . \langle \sin x, \cos x \rangle = \int_0^{\pi} \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2} \sin^2 x \Big|_0^{\pi} = 0$$

مثال (٥ ، ١٤)

إذا كانت $p(x) = 2 - x + 4x^2$, $q(x) = 3 + 5x - x^2 \in P_2$ حيث الضرب الداخلي المعرف في المثال (٥ ، ٣) فإن جيب تمام الزاوية Θ بين $p(x)$ و $q(x)$ هو :

$$\square . \cos \Theta = \frac{6 - 5 - 4}{\sqrt{4 + 1 + 16} \sqrt{9 + 25 + 1}} = \frac{-3}{\sqrt{735}}$$

المبرهنة التالية هي تعميم لمبرهنة فيثاغورس إلى أي فضاء ضرب داخلي .

مبرهنة (٥ ، ٦)

إذا كان V فضاء ضرب داخلي وكان $u, v \in V$ متعامدين فإن

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

البرهان

$$\|u + v\|^2 = \langle u + v, u + v \rangle = \langle u, v \rangle + 2\langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

وذلك لأن $\langle u, v \rangle = 0$.

تمارين (٥ ، ٢)

في التمارين من (١) إلى (٥) أحسب الزاوية بين المتجهين وبين فيما إذا كانا

متعامدين حيث الضرب الداخلي هو الضرب الاقليدي على \mathbb{R}^3

(١) $u = (-1, 3, 2)$, $v = (4, 2, -1)$.

(٢) $u = (-2, -2, -2)$, $v = (-1, 1, -1)$.

(٣) $u = (-1, 1, 0)$, $v = (4, 0, 9)$.

(٤) $u = (-1, 5, 2)$, $v = (2, 4, -9)$.

فضاءات الضرب الداخلي

$$\cdot \mathbf{u} = (-4, 2, 1), \mathbf{v} = (8, -4, -2) \quad (٥)$$

(٦) أعد التمارين من (١) إلى (٥) إذا كان الضرب الداخلي على \mathbb{R}^3 هو

$$\cdot \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 7a_1b_1 + 3a_2b_2 + 4a_3b_3$$

في التمارين من (٧) إلى (١١) أحسب الزاوية بين المتجهين وبين فيما إذا كانا

متعامدين حيث الضرب الداخلي هو الضرب الاقليدي على \mathbb{R}^4

$$\cdot \mathbf{u} = (-4, 6, -10, 1), \mathbf{v} = (2, 1, -2, 9) \quad (٧)$$

$$\cdot \mathbf{u} = (-1, 1, 0, 2), \mathbf{v} = (1, -1, 3, 0) \quad (٨)$$

$$\cdot \mathbf{u} = (0, -2, 2, 1), \mathbf{v} = (-1, -1, 1, 1) \quad (٩)$$

$$\cdot \mathbf{u} = (1, 2, 0, 1), \mathbf{v} = (-2, 3, 1, 2) \quad (١٠)$$

$$\cdot \mathbf{u} = (-2, 3, 1, 4), \mathbf{v} = (-3, 1, 4, 6) \quad (١١)$$

(١٢) أعد التمارين من (٧) إلى (١١) إذا كان الضرب الداخلي على \mathbb{R}^4 هو

$$\cdot \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + 2a_3b_3 + 3a_4b_4$$

في التمارين من (١٣) إلى (١٧) أحسب الزاوية بين المتجهين وبين فيما إذا كانا

متعامدين حيث الضرب الداخلي على P_2 هو المعرف في المثال (٣، ٥)

$$\cdot p(x) = x^2 + 2x + 3, q(x) = x^2 + 1 \quad (١٣)$$

$$\cdot p(x) = 2x^2 + x - 3, q(x) = 4x^2 - x \quad (١٤)$$

$$\cdot p(x) = 2x^2 + 5x - 1, q(x) = 9x^2 + 2x + 1 \quad (١٥)$$

$$\cdot p(x) = 3x^2 - x + 5, q(x) = x^2 - x \quad (١٦)$$

$$\cdot p(x) = 2x^2 - x + 1, q(x) = x^2 + 2x \quad (١٧)$$

في التمارين من (١٨) إلى (٢٢) احسب الزاوية بين المتجهين ثم بين فيما إذا كانا

متعامدين حيث الضرب الداخلي على M_{22} هو الضرب المعرف في المثال (٥، ٥)

$$\cdot A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad (١٩) \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad (١٨)$$

$$\cdot A = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \quad (٢١) \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (٢٠)$$

$$(22) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

(23) إذا كانت $\sin 3x, \cos 4x \in C[0, \pi]$ حيث الضرب الداخلي هو الضرب

المعرف في المثال (٤ ، ٥) فأثبت أنهما متعامدتان .

(24) ليكن $u, v, w \in V$ حيث V فضاء ضرب داخلي . إذا كان u متعامداً على

كل من u و w فأثبت أن u متعامد على $\alpha v + \beta w$ لكل $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(25) إذا كان $u, v \in V$ حيث V فضاء ضرب داخلي فأثبت أن :

$$\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 = 4\langle u, v \rangle$$

(26) إذا كان $u, v \in V$ حيث V فضاء ضرب داخلي فأثبت أن :

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$$

(27) إذا كان $u, v \in V$ حيث V فضاء ضرب داخلي فأثبت أن :

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\|\|v\|\cos \theta$$

حيث θ هي الزاوية بين u و v .

(28) ليكن \mathbb{R}^2 هو فضاء الضرب الأقليدي . أثبت مستخدماً متباينة كوشي - شوارتز

$$(a \cos \theta + b \sin \theta)^2 \leq a^2 + b^2$$

للكل $a, b, \theta \in \mathbb{R}$ وذلك لكل

(29) لتكن $f(x), g(x) \in C[0, 1]$. أثبت أن :

$$\left[\int_0^1 (f(x) + g(x))^2 dx \right]^{1/2} \leq \left[\int_0^1 (f(x))^2 dx \right]^{1/2} + \left[\int_0^1 (g(x))^2 dx \right]^{1/2}$$

(30) إذا كان $u, v \in V$ حيث V فضاء ضرب داخلي فأثبت أن :

$$\|u\| - \|v\| \leq \|u - v\|$$

(31) إذا كان V فضاء ضرب داخلي وكان $u, v \in V$ حيث $\|u\| = \|v\|$ فأثبت

أن $u+v$ و $u-v$ متعامدان .

(32) إذا كانت $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ متجهات غير صفرية في فضاء الضرب

الداخلي V وكانت متعامدة متنى متنى (أي $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ لكل $i \neq j$)

$$\|v_1 + v_2 + \dots + v_n\|^2 = \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 + \dots + \|v_n\|^2$$

فأثبت أن

(٥ ، ٣) الأساسات العيارية

Orthonormal Basis

إن مسألة اختيار الأساس المناسب لفضاء متجهات تحت الدراسة هي على قدر كبير من الأهمية ، وإن أفضل هذه الاختبارات هو الأساس الذي يسهل الحسابات في فضاء المتجهات. سنبين في هذا البند أنه في حالة فضاءات الضرب الداخلي نستطيع دائماً الحصول على أساس من هذا النوع ، يعرف بالأساس العياري المتعامد. ونقدم خوارزمية لإنشاء هذا الأساس تسمى خوارزمية جرام – شميست (Gram– Schmidt) .

تعريف (٥ ، ٤)

لتكن S مجموعة جزئية من فضاء الضرب الداخلي V نقول إن S مجموعة متعامدة (orthogonal) إذا كان كل متجهين مختلفين من S متعامدين . وعلاوة على ذلك إذا كان معيار كل متجه في S يساوي 1 فإننا نقول إن S مجموعة عيارية متعامدة (orthonormal) .

مثال (٥ ، ١٥)

إذا كانت $v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 0, 1)$, $v_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 0, 1)$, $v_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 0, 2, 1)$

ثلاثة متجهات في فضاء الضرب الإقليدي \mathbb{R}^4 فإنه من السهل أن نرى أن:

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_1, v_3 \rangle = \langle v_2, v_3 \rangle = 0$$

كما أن $\|v_1\| = \|v_2\| = \|v_3\| = 1$ ولذا فإن $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ مجموعة عيارية متعامدة . □

مثال (١٦ ، ٥)

لتكن $S = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}x, \frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{5}}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) \right\} \subseteq C[-1,1]$ ، حيث الضرب الداخلي

على $C[-1,1]$ هو الضرب المعرف في المثال (٤ ، ٥) . سنبرهن الآن على أن S مجموعة عيارية متعامدة وذلك لأن :

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}x \right\rangle = \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{3}}{2} x dx = \left[\frac{\sqrt{3}}{4} x^2 \right]_{-1}^1 = 0$$

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{5}}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) \right\rangle = \int_{-1}^1 \frac{3}{2\sqrt{3}}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) dx = \left[\frac{3}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x\right) \right]_{-1}^1 = 0$$

$$\begin{aligned} \left\langle \sqrt{\frac{3}{2}}x, \frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{5}}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) \right\rangle &= \int_{-1}^1 \frac{3\sqrt{6}}{4\sqrt{5}}\left(x^3 - \frac{1}{3}x\right) dx \\ &= \left[\frac{3\sqrt{6}}{4\sqrt{5}}\left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{6}x^2\right) \right]_{-1}^1 = 0 \end{aligned}$$

وبالمثل نستطيع أن نرى أن

$$\square \quad \left\| \frac{1}{\sqrt{2}} \right\| = \left\| \sqrt{\frac{3}{2}}x \right\| = \left\| \frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{5}}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) \right\| = 1$$

ملحوظة

لتكن $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ مجموعة جزئية متعامدة من فضاء ضرب داخلي V

حيث $v_i \neq 0$ لكل i . عندئذ المجموعة $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ حيث $u_i = \frac{v_i}{\|v_i\|}$ مجموعة

عيارية متعامدة وذلك لأن :

$$\langle u_i, u_j \rangle = \left\langle \frac{v_i}{\|v_i\|}, \frac{v_j}{\|v_j\|} \right\rangle = \frac{1}{\|v_i\| \|v_j\|} \langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

تزدنا المبرهنة التالية بالعلاقة بين المجموعات المستقلة خطياً والمتعامدة .

مبرهنة (٥ ، ٧)

إذا كانت $S = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ مجموعة متعامدة عناصرها غير صفرية في فضاء ضرب داخلي V فإن S مستقلة خطياً .

البرهان

لنفرض أن $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ حيث $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n = 0$ عندئذٍ لكل $i = 1, \dots, n$ لدينا :

$$\begin{aligned} 0 &= \langle 0, u_i \rangle = \langle \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n, u_i \rangle \\ &= \alpha_1 \langle u_1, u_i \rangle + \alpha_2 \langle u_2, u_i \rangle + \dots + \alpha_i \langle u_i, u_i \rangle + \dots + \alpha_n \langle u_n, u_i \rangle \end{aligned}$$

وبما أن $\langle u_i, u_j \rangle = 0$ لكل $i \neq j$ فإننا نجد أن $\alpha_i \|u_i\|^2 = 0$ وهذا يقتضي أن $\alpha_i = 0$. وبالتالي فإن S مستقلة خطياً . ♦

تكمُن أهمية إيجاد أساس عياري متعامد لفضاء ضرب داخلي في سهولة التعبير عن عناصر الفضاء كتراكيب خطية لعناصر الأساس العياري المتعامد وهذا ما تزودنا به المبرهنة التالية .

مبرهنة (٥ ، ٨)

إذا كان $S = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ أساساً عيارياً متعامداً لفضاء الضرب الداخلي V وكان $u \in V$ فإن $u = \langle u, u_1 \rangle u_1 + \langle u, u_2 \rangle u_2 + \dots + \langle u, u_n \rangle u_n$.

البرهان

بما أن S أساس لفضاء الضرب الداخلي V وبما أن $u \in V$ فإننا نستطيع إيجاد $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ حيث $u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n$. وعندئذٍ لكل $i = 1, 2, \dots, n$ يكون لدينا :

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}_i \rangle &= \langle \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \cdots + \alpha_i \mathbf{u}_i + \cdots + \alpha_n \mathbf{u}_n, \mathbf{u}_i \rangle \\ &= \alpha_1 \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_i \rangle + \cdots + \alpha_i \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i \rangle + \cdots + \alpha_n \langle \mathbf{u}_n, \mathbf{u}_i \rangle \\ &= \alpha_i \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i \rangle = \alpha_i\end{aligned}$$

♦ . $\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i \rangle = 1$ وأن $i \neq j$ لكل $\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle = 0$ وذلك لأن

مثال (١٧ ، ٥)

ليكن $S = \left\{ \mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1), \mathbf{u}_2 = (1, 0, 0), \mathbf{u}_3 = \frac{1}{2\sqrt{2}}(0, -2, 2) \right\}$ أساساً

عيارياً متعامداً للفضاء الإقليدي \mathbb{R}^3 وليكن $\mathbf{u} = (3, 4, -1) \in \mathbb{R}^3$ عندئذٍ :

$$\mathbf{u} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}_1 \rangle \mathbf{u}_1 + \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}_2 \rangle \mathbf{u}_2 + \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}_3 \rangle \mathbf{u}_3$$

$$\square . \quad (3, 4, -1) = \frac{3}{\sqrt{2}} \mathbf{u}_1 + 3 \mathbf{u}_2 - \frac{5}{\sqrt{2}} \mathbf{u}_3$$

من الواضح الآن استناداً إلى المبرهنة (٨ ، ٥) أنه من المفضل أن يكون لدينا أساس عياري متعامد وذلك لسهولة التعبير عن متجهات الفضاء كتركيب خطي لعناصر الأساس العياري المتعامد . ولكن هل مثل هذا الأساس موجود دائماً ؟ سنبرهن الآن على وجود مثل هذا الأساس لأي فضاء ضرب داخلي منتهي البعد . من الملحوظة التي سبقت المبرهنة (٧ ، ٥) نخلص إلى أنه يكفي أن نجد أساساً متعامداً وذلك لأننا نستطيع بعد ذلك وبسهولة أن نعاير هذا الأساس بضرب كل من عناصره \mathbf{u} بالعدد $\frac{1}{\|\mathbf{u}\|}$. ولكن يلزمنا قبل الشروع بإنشاء أساس متعامد برهان الحقيقة التالية .

مبرهنة (٩ ، ٥)

لتكن $S = \{ \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m \}$ مجموعة متعامدة في فضاء ضرب داخلي V ولتكن

$v \in V$ حيث $v \notin \langle S \rangle$ ولنعرف \mathbf{u}_{m+1} كما يلي :

$$\mathbf{u}_{m+1} = v - \frac{\langle v, \mathbf{u}_1 \rangle}{\|\mathbf{u}_1\|^2} \mathbf{u}_1 - \frac{\langle v, \mathbf{u}_2 \rangle}{\|\mathbf{u}_2\|^2} \mathbf{u}_2 - \cdots - \frac{\langle v, \mathbf{u}_m \rangle}{\|\mathbf{u}_m\|^2} \mathbf{u}_m$$

عندئذ فإن $\{u_1, u_2, \dots, u_m, u_{m+1}\}$ مجموعة متعامدة أيضاً .

البرهان

سنبرهن أن $\langle u_i, u_{m+1} \rangle = 0$ لكل $1 \leq i \leq m$. الآن :

$$\begin{aligned} \langle u_i, u_{m+1} \rangle &= \left\langle u_i, v - \frac{\langle v, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\langle v, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2 - \dots - \frac{\langle v, u_m \rangle}{\|u_m\|^2} u_m \right\rangle \\ &= \langle u_i, v \rangle - \frac{\langle v, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} \langle u_i, u_1 \rangle - \frac{\langle v, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} \langle u_i, u_2 \rangle \\ &\quad - \dots - \frac{\langle v, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} \langle u_i, u_i \rangle - \dots - \frac{\langle v, u_m \rangle}{\|u_m\|^2} \langle u_i, u_m \rangle \\ &= \langle u_i, v \rangle - 0 - 0 - \dots - \langle v, u_i \rangle - \dots - 0 \\ &= \langle u_i, v \rangle - \langle u_i, v \rangle = 0 \end{aligned}$$

وعليه فإن $\langle u_i, u_{m+1} \rangle = 0$ لكل $1 \leq i \leq m$. وبالتالي فإن $\{u_1, u_2, \dots, u_m, u_{m+1}\}$

مجموعة متعامدة . ♦

مبرهنة (١٠ ، ٥)

إذا كان V فضاء ضرب داخلي منتهي البعد فإن V يحتوي على أساس متعامد .

البرهان

لنفرض أن $\dim V = n$. سنبرهن العبارة باستخدام الاستقراء الرياضي على n . إذا كان $n=1$ فإنه من الواضح أن أي أساس $\{v\}$ للفضاء V يجب أن يكون متعامداً .

لنفرض أن العبارة صحيحة عندما $n=k$. وأن $\dim V = k+1$. لنفرض كذلك أن $U = \langle \{v_1, v_2, \dots, v_k\} \rangle$ أساس للفضاء V وأن $\dim U = k$. ولذا باستخدام فرضية الاستقراء يوجد أساس متعامد

للفضاء U . ليكن $v \notin U$ ولنضع :

$$\cdot \mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{v} - \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_1 \rangle}{\|\mathbf{u}_1\|^2} \mathbf{u}_1 - \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_2 \rangle}{\|\mathbf{u}_2\|^2} \mathbf{u}_2 - \dots - \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_m \rangle}{\|\mathbf{u}_m\|^2} \mathbf{u}_m$$

عندئذ باستخدام المبرهنة (٥ ، ٩) نجد أن $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{k+1}\}$ مجموعة متعامدة.

وباستخدام المبرهنة (٥ ، ٧) نجد أنها أساساً للفضاء \mathbf{V} حيث $\dim \mathbf{V} = k + 1$.

ملحوظة

تضمن لنا المبرهنة (٥ ، ١٠) وجود أساس متعامد لأي فضاء ضرب داخلي منتهي

البعد . وعلاوة على ذلك فإن برهانها الذي يعتمد على المبرهنة (٥ ، ٩) يزودنا

بخوارزمية لإنشاء أساس متعامد من أي أساس معطى ، تعرف هذه الخوارزمية

بخوارزمية جرام - شميت (Gram - Schmidt) والتي نقدم وصفها الآن .

خوارزمية جرام - شميت

ليكن \mathbf{V} فضاء ضرب داخلي منتهي البعد ، وليكن $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ أساساً لهذا

الفضاء . تزودنا الخطوات التالية بأساس متعامد $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ للفضاء \mathbf{V}

$$\cdot \mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 \quad (١)$$

$$\cdot \mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1 \rangle}{\|\mathbf{u}_1\|^2} \mathbf{u}_1 \quad (٢)$$

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_1 \rangle}{\|\mathbf{u}_1\|^2} \mathbf{u}_1 - \frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_2 \rangle}{\|\mathbf{u}_2\|^2} \mathbf{u}_2 \quad (٣)$$

⋮

$$\cdot \mathbf{u}_n = \mathbf{v}_n - \frac{\langle \mathbf{v}_n, \mathbf{u}_1 \rangle}{\|\mathbf{u}_1\|^2} \mathbf{u}_1 - \frac{\langle \mathbf{v}_n, \mathbf{u}_2 \rangle}{\|\mathbf{u}_2\|^2} \mathbf{u}_2 - \dots - \frac{\langle \mathbf{v}_n, \mathbf{u}_{n-1} \rangle}{\|\mathbf{u}_{n-1}\|^2} \mathbf{u}_{n-1} \quad (٥)$$

ملحوظة

إن جميع خطوات الخوارزمية مبررة بالاستعانة بالمبرهنة (٩ ، ٥) . فمثلاً لتبرير الخطوة (٢) نلاحظ أن $v_2 \notin \langle u_1 \rangle$ وذلك لأن $\{v_1, v_2\}$ مجموعة مستقلة خطياً ولذا فإن المبرهنة (٩ ، ٥) تضمن أن $\{u_1, u_2\}$ مجموعة متعامدة . كذلك من السهل التحقق من أن $\langle \{v_1, v_2\} \rangle = \langle \{u_1, u_2\} \rangle$. وبالمثل من الممكن تبرير باقي الخطوات .

مثال (١٨ ، ٥)

استخدام خوارزمية جرام - شميت لتحويل الأساس :
 $v_1 = (1, 0, 1), v_2 = (2, 1, 0), v_3 = (1, 1, 1)$ لفضاء الضرب الإقليدي R^3 إلى أساس عياري متعامد .

الحل

$$u_1 = v_1 = (1, 0, 1) \quad (١)$$

$$u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 = (2, 1, 0) - \frac{2}{2} (1, 0, 1) = (1, 1, -1) \quad (٢)$$

$$u_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\langle v_3, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2 \quad (٣)$$

$$= (1, 1, 1) - \frac{2}{2} (1, 0, 1) - \frac{1}{3} (1, 1, -1) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right)$$

وبالتالي فإن $\{u_1, u_2, u_3\}$ أساس متعامد . للحصول على أساس عياري متعامد

نقسم كل متجه من متجهات الأساس المتعامد على طوله لنجد أن :

$$\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right), \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right) \right\}$$

أساس عياري متعامد . □

مثال (١٩ ، ٥)

ليكن W فضاءاً جزئياً من \mathbb{R}^5 مولداً بالمجموعة $\{v_1, v_2, v_3\}$ حيث
 $v_3 = (1, -1, 0, 1, 0)$ و $v_2 = (0, -1, 0, 0, 1)$ ، $v_1 = (-1, -1, 0, 1, 0)$
 عین . أساساً عیارياً متعامداً للفضاء W حيث الضرب الداخلي هو الضرب الإقليدي .

الحل

$$u_1 = v_1 = (-1, -1, 1, 0, 0) \quad (١)$$

$$u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 \quad (٢)$$

$$= (0, -1, 0, 0, 1) - \frac{1}{3}(-1, -1, 1, 0, 0) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0, 1\right)$$

$$u_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\langle v_3, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2 \quad (٣)$$

$$= (1, -1, 0, 1, 0) - 0 - \frac{3}{5} \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0, 1\right) = \left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}, \frac{1}{5}, 1, -\frac{3}{5}\right)$$

وبالتالي فإن $\{u_1, u_2, u_3\}$ أساس متعامد . ولذا فإن الأساس العياري المتعامد هو

$$\left\{ \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0, 0\right), \left(\frac{1}{\sqrt{15}}, \frac{-2}{\sqrt{15}}, -\frac{1}{\sqrt{15}}, 0, \frac{\sqrt{15}}{5}\right), \left(\frac{2}{\sqrt{15}}, -\frac{\sqrt{15}}{10}, \frac{\sqrt{15}}{30}, \frac{\sqrt{15}}{6}, -\frac{\sqrt{15}}{10}\right) \right\}$$

مثال (٢٠ ، ٥)

ليكن W الفضاء الجزئي من $C[0, 1]$ المولد بالمجموعة
 $\{p_1(x)=1, p_2(x)=2x-1, p_3(x)=12x^2\}$
 حيث الضرب الداخلي هو الضرب

المعرف في المثال (٤ ، ٥) . عین أساساً متعامداً للفضاء W .

الحل

$$q_1 = p_1 = 1 \quad (١)$$

فضاءات الضرب الداخلي

$$q_2 = p_2 - \frac{\langle p_2, q_1 \rangle}{\|q_1\|^2} q_1 = p_2 - 0q_1 = p_2 = 2x - 1 \quad (٢)$$

$$q_3 = p_3 - \frac{\langle p_3, q_1 \rangle}{\|q_1\|^2} q_1 - \frac{\langle p_3, q_2 \rangle}{\|q_2\|^2} q_2 \quad (٣)$$

$$= 12x^2 - \frac{4}{1}(1) - 6(2x-1) = 12x^2 - 4 - 12x + 6 = 12x^2 - 12x + 2$$

وعليه فإن $\{q_1, q_2, q_3\}$ أساس متعامد للفضاء W . □

مثال (٢١، ٥)

ليكن $p, q \in P_4$ والضرب الداخلي المعرف على P_4 هو كما يلي :

$$\langle p, q \rangle = p(-2)q(-2) + p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2)$$

وليكن W الفضاء الجزئي من P_4 المولد بالمجموعة :

$$\{p_1(x) = 1, p_2(x) = x, p_3(x) = x^2\}$$

الحل

$$q_1 = p_1 = 1 \quad (١)$$

$$\begin{aligned} \langle p_2, q_1 \rangle &= p_2(-2)q_1(-2) + p_2(-1)q_1(-1) + p_2(0)q_1(0) \\ &\quad + p_2(1)q_1(1) + p_2(2)q_1(2) \\ &= (-2)(1) + (-1)(1) + (0)(1) + (1)(1) + (2)(1) = 0 \end{aligned} \quad (٢)$$

$$q_2 = p_2 - \frac{\langle p_2, q_1 \rangle}{\|q_1\|^2} q_1 = x - 0 = x, \text{ إذن}$$

$$q_3 = p_3 - \frac{\langle p_3, q_1 \rangle}{\|q_1\|^2} q_1 - \frac{\langle p_3, q_2 \rangle}{\|q_2\|^2} q_2 \quad (٣)$$

$$\langle p_3, q_1 \rangle = (-2)^2(1) + (-1)^2(1) + (0)^2(1) + (1)^2(1) + (2)^2(1) = 10 \text{ ولكن}$$

$$\|q_1\|^2 = \langle q_1, q_2 \rangle = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5$$

. $\langle p_3, q_2 \rangle = (-2)^2 (-2) + (-1)^2 (-1) + (0)^2 (0) + (1)^2 (1) + (2)^2 (2) = 0$
 وعندئذٍ، $q_3 = x^2 - \frac{10}{5}(1) - 0 = x^2 - 2$. ولذا فإن $\{1, x, x^2 - 2\}$ أساس متعامد

للفضاء W . □

مثال (٢٢ ، ٥)

لتكن A هي المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. عين أساساً عيارياً متعامداً للفضاء

العمودي للمصفوفة A .

الحل

الفضاء العمودي للمصفوفة A هو الفضاء الجزئي من \mathbb{R}^4 المولد بالمتجهات $\{v_1 = (1, 1, 1, 1), v_2 = (1, 0, 0, 0), v_3 = (1, 1, 0, 1)\}$. وباعتبار الضرب

الداخلي على \mathbb{R}^4 هو الضرب الإقليدي نجد أن :

$$u_1 = v_1 = (1, 1, 1, 1) \quad (١)$$

$$u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 = (1, 0, 0, 0) - \frac{1}{4}(1, 1, 1, 1) \quad (٢)$$

$$= \frac{1}{4}(3, -1, -1, -1)$$

$$u_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\langle v_3, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2 \quad (٣)$$

$$= (1, 1, 0, 1) - \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1) - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}(3, -1, -1, -1) = -\frac{1}{3}(0, -2, 1, 1)$$

ولذا فإن $\{u_1, u_2, u_3\}$ أساس متعامد للفضاء العمودي. وبالتالي فإن الأساس

العيارى هو :

$$\square . \left\{ \frac{1}{2}(1,1,1,1), \frac{1}{\sqrt{12}}(3,-1,-1,-1), \frac{1}{\sqrt{6}}(0,-2,1,1) \right\}$$

تمارين (٣ ، ٥)

(١) ليكن \mathbb{R}^2 هو فضاء الضرب الإقليدي . استخدم خوارزمية جرام - شميت

لتحويل الأساس $\{v_1, v_2\}$ إلى أساس عياري متعامد.

(أ) $\{v_1 = (1, -3), v_2 = (2, 2)\}$.

(ب) $\{v_1 = (1, 0), v_2 = (3, -5)\}$.

(٢) أعد التمرين (١) إذا كان الضرب الداخلي على \mathbb{R}^2 هو

. $\langle u, v \rangle = 2a_1 b_1 + 3a_2 b_2$

(٣) ليكن \mathbb{R}^3 هو فضاء الضرب الإقليدي . استخدم خوارزمية جرام - شميت

لتحويل الأساس $\{v_1, v_2, v_3\}$ إلى أساس عياري متعامد .

(أ) $\{v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (-1, 1, 0), v_3 = (1, 2, 1)\}$.

(ب) $\{v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (3, 7, -2), v_3 = (0, 4, 1)\}$.

(ج) $\{v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (1, 1, 0), v_3 = (1, 0, 0)\}$.

(٤) أعد التمرين (٣) إذا كان الضرب الداخلي على \mathbb{R}^3 هو

. $\langle u, v \rangle = a_1 b_1 + 2a_2 b_2 + 3a_3 b_3$

(٥) ليكن \mathbb{R}^4 هو فضاء الضرب الإقليدي . استخدم خوارزمية جرام - شميت

لتحويل الأساس :

$$\{v_1 = (0, 2, 1, 0), v_2 = (1, -1, 0, 0), v_3 = (1, 2, 0, -1), v_4 = (1, 0, 0, 1)\}$$

إلى أساس عياري متعامد .

(٦) أعد التمرين (٥) إذا كان الضرب الداخلي على \mathbb{R}^4 هو :

. $\langle u, v \rangle = a_1 b_1 + 2a_2 b_2 + 3a_3 b_3 + 4a_4 b_4$

(٧) ليكن \mathbb{R}^3 هو فضاء الضرب الإقليدي . استخدم خوارزمية جرام – شमित لإيجاد أساس عياري متعامد للفضاء الجزئي W من \mathbb{R}^3 المولد بالمجموعتين الآتيتين

$$(أ) \{ v_1 = (1, -1, 0), v_2 = (-1, 0, 1) \} .$$

$$(ب) \{ v_1 = (0, 1, 2), v_2 = (-1, 0, 1), v_3 = (-1, 1, 3) \} .$$

(٨) أعد التمرين (٧) إذا كان الضرب الداخلي على \mathbb{R}^3 هو الضرب المعروف في التمرين (٤) .

(٩) ليكن \mathbb{R}^4 هو فضاء الضرب الإقليدي . استخدم خوارزمية جرام – شमित

لإيجاد أساس متعامد للفضاء الجزئي W من \mathbb{R}^4 المولد بالمجموعتين الآتيتين

$$(أ) \{ v_1 = (1, -1, 0, 1), v_2 = (1, 1, 0, 0), v_3 = (1, 1, 0, 1) \} .$$

$$(ب) \{ v_1 = (1, 1, -1, -1), v_2 = (3, 2, 0, 1), v_3 = (1, 0, 1, 0) \} .$$

(١٠) أعد التمرين (٩) إذا كان الضرب الداخلي على \mathbb{R}^4 هو الضرب المعروف في التمرين (٦) .

(١١) استخدم خوارزمية جرام – شमित لتحويل الأساس $\{1, x, x^2\}$ للفضاء P_2

إلى أساس متعامد حيث الضرب الداخلي هو :

$$(أ) \langle p, q \rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2) .$$

$$(ب) \langle p, q \rangle = \int_0^2 p(x)q(x) dx .$$

(١٢) استخدم خوارزمية جرام – شमित لإيجاد أساس عياري متعامد للفضاء

الجزئي من $C[0, \pi]$ المولد بالمجموعة $\{ v_1 = \sin x, v_2 = \cos x \}$ حيث الضرب

$$\text{الداخلي هو } \langle f, g \rangle = \int_0^\pi f(x)g(x) dx .$$

(١٣) استخدم خوارزمية جرام – شमित لإيجاد أساس عياري متعامد للفضاء

الجزئي من $C[0, 1]$ المولد بالمجموعة $\{ v_1 = 1, v_2 = e^x \}$ حيث الضرب الداخلي

$$\text{هو } \langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x) dx .$$

فضاءات الضرب الداخلي

(١٤) استخدم خوارزمية جرام - شमित لإيجاد أساس متعامد للفضاء الجزئي من $C[-1, 1]$ المولد بالمجموعة $\{v_1 = 1, v_2 = x, v_3 = x^2\}$ حيث الضرب الداخلي

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx \text{ هو}$$

(١٥) استخدم خوارزمية جرام - شमित لتحويل الأساس $\{v_1 = 1, v_2 = x, v_3 = x^2, v_4 = x^3, v_5 = x^4\}$ للفضاء P_4 إلى أساس متعامد

حيث الضرب الداخلي هو :

$$\langle p, q \rangle = p(-2)q(-2) + p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2)$$

(١٦) استخدم خوارزمية جرام - شमित لإيجاد أساس متعامد للفضاء الجزئي من $C[0, 2\pi]$ المولد بالمجموعة $\{1, \cos x, \cos^2 x, \cos^3 x\}$ حيث الضرب

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx \text{ هو الداخلي}$$

(١٧) استخدم خوارزمية جرام - شमित لإيجاد أساس عياري متعامد للفضاء العمودي للمصفوفة A علماً بأن الضرب الداخلي هو الضرب الأقليدي .

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ (ب)} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ (أ)}$$

(١٨) أعد التمرين (١٧) لإيجاد أساس عياري متعامد للفضاء الصفي للمصفوفة A

(١٩) استخدم خوارزمية جرام - شमित لإيجاد أساس عياري متعامد لفضاء الحل

للمصفوفة A علماً بأن الضرب الداخلي هو الضرب الأقليدي .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \end{bmatrix} \text{ (ب)} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \text{ (أ)}$$

(٢٠) لتكن $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ مجموعة عيارية متعامدة في فضاء الضرب

$$\text{الداخلي } V. \text{ أثبت أن } \sum_{k=1}^n |\langle v, v_k \rangle|^2 \leq \|v\|^2 \text{ لكل } v \in V$$

(٢١) لتكن $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ مجموعة عيارية متعامدة في فضاء الضرب الداخلي V وليكن $W = \langle S \rangle$. أثبت أن العبارات التالية متكافئة:

$$(أ) \quad v \in W$$

$$(ب) \quad \sum_{k=1}^n |\langle v, v_k \rangle|^2 = \|v\|^2$$

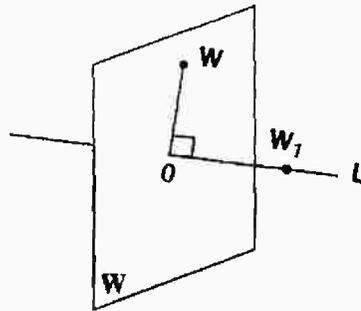
$$(ج) \quad v = \sum_{k=1}^n \langle v, v_k \rangle v_k$$

$$(د) \quad \langle v, u \rangle = \sum_{k=1}^n \langle v, v_k \rangle \langle v_k, u \rangle \quad \text{لكل } u \in V$$

(٥، ٤) المتمم العمودي والإسقاط العمودي

Orthogonal Complement and Orthogonal Projection

ليكن W هو المستوى المار بنقطة الأصل في الفضاء الإقليدي \mathbb{R}^3 . وليكن L المستقيم المار بنقطة الأصل وعمودي على المستوى W . إذا كان $w_1 \in L$ و $w_1 \neq 0$ فمن المعلوم أن المتجه الذي بدايته 0 ونهايته w_1 عمودياً على القطعة المستقيمة $0w$. أي أن $\langle w_1, w \rangle = 0$ (أنظر الشكل (٥، ١)).



شكل (٥، ١)

ولذا فإن كل متجه واقع على L يكون عمودياً على كل متجه $w \in W$. أي أن L

يتكون من جميع المتجهات العمودية على كل متجه $w \in W$ ، وأن W يتكون من جميع المتجهات العمودية على كل $w_1 \in L$ ، نقول في هذه الحالة أن المستوى والمستقيم متممان عموديان لبعضهما. نعم الآن هذا المفهوم لأي ضرب داخلي.

تعريف (٥ ، ٥)

ليكن W فضاءاً جزئياً من فضاء الضرب الداخلي V . وليكن $v \in V$. نقول إن v عمودي على W إذا كان $\langle v, w \rangle = 0$ لكل $w \in W$. وتسمى المجموعة $W^\perp = \{v \in V : \langle v, u \rangle = 0 \quad \forall u \in W\}$ المتمم العمودي للفضاء W (orthogonal complement of W).

المبرهنة التالية تبين لنا أنه لإيجاد W^\perp يكفي أن نعين جميع المتجهات العمودية على مولدات W .

مبرهنة (٥ ، ١١)

ليكن $W = \langle \{w_1, \dots, w_m\} \rangle$ فضاءً جزئياً من فضاء الضرب الداخلي V . إذا كان $v \in V$ حيث $\langle v, w_i \rangle = 0$ لكل $1 \leq i \leq m$ فإن $\langle v, w \rangle = 0$ لكل $w \in W$.

البرهان

لنفرض أن $w \in W$. عندئذ يوجد $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ حيث $w = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \dots + \alpha_m w_m$. ولذا فإن :

$$\begin{aligned} \langle v, w \rangle &= \langle v, \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \dots + \alpha_m w_m \rangle \\ &= \langle v, \alpha_1 w_1 \rangle + \langle v, \alpha_2 w_2 \rangle + \dots + \langle v, \alpha_m w_m \rangle \\ &= \alpha_1 \langle v, w_1 \rangle + \alpha_2 \langle v, w_2 \rangle + \dots + \alpha_m \langle v, w_m \rangle = 0 \end{aligned}$$

لأن $\langle v, w_j \rangle = 0$ لكل $1 \leq j \leq m$.

مبرهنة (٥ ، ١٢)

إذا كان W فضاءً جزئياً من فضاء الضرب الداخلي V . فإن W^\perp فضاء جزئي من V .

البرهان

بما أن $\langle 0, w \rangle = 0$ لكل $w \in W$ فإن $0 \in W^\perp$. لنفرض الآن أن $u, v \in W^\perp$ وأن $\alpha \in \mathbb{R}$. عندئذٍ لكل $w \in W$ يكون $\langle u, w \rangle = \langle v, w \rangle = 0$. ولذا فإن :

$$\langle u+v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle = 0 + 0 = 0$$

$$\langle \alpha u, w \rangle = \alpha \langle u, w \rangle = \alpha \cdot 0 = 0$$

ومنه فإن $u+v \in W^\perp$ وأن $\alpha u \in W^\perp$. وبالتالي فإن W^\perp فضاء جزئي من V . ♦

يبين لنا المثال التالي كيفية إيجاد الفضاء الجزئي W^\perp بالاستعانة بالمبرهنة

(٥ ، ١١) .

مثال (٥ ، ٢٣)

ليكن W الفضاء الجزئي من فضاء الضرب الإقليدي \mathbb{R}^4 المولد بالمجموعة $\{w_1 = (1, -1, 0, 1), w_2 = (2, 0, 1, -1)\}$. عين W^\perp .

الحل

إستناداً إلى المبرهنة (٥ ، ١١) نجد أنه إذا كان $w = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in W^\perp$

فإن $\langle w, w_1 \rangle = \langle w, w_2 \rangle = 0$. ولذا فإن :

$$x_1 - x_2 + x_4 = 0$$

$$2x_1 + x_3 - x_4 = 0$$

وبحل هذا النظام نجد أن :

$$W^\perp = \{s(1, 1, -2, 0) + t(0, 1, 1, 1) : s, t \in \mathbb{R}\} = \langle \{(1, -1, 2, 0), (0, 1, 1, 1)\} \rangle$$

المبرهنة التالية تبين لنا العلاقة بين الفضاء الصفي ، الفضاء العمودي والفضاء الصفري لمصفوفة A وبين الفضاءات المتممة لها .

مبرهنة (١٣ ، ٥)

إذا كانت A مصفوفة من الدرجة $m \times n$ فإن :

$$(\text{row } A)^\perp = N(A) \quad (١) \quad (\text{col } A)^\perp = N(A^T) \quad (٢)$$

حيث الضرب الداخلي هو الضرب الإقليدي .

البرهان

(١) لنفرض أن $X \in N(A)$. عندئذ $AX = 0$. ولذا فإن X عمودي على جميع

صفوف A . وبما أن $\text{row } A$ مولدا بصفوف A فإن X عمودي على $\text{row } A$. وبالتالي

فإن $N(A) \subseteq (\text{row } A)^\perp$. ومن ناحية أخرى ، إذا كان $X \in (\text{row } A)^\perp$ فإن X

عمودي على جميع صفوف A . ومن ثم فإن $AX = 0$. أي أن $X \in N(A)$. وعليه

فإن $N(A) \subseteq (\text{row } A)^\perp$. وبالتالي فإن $N(A) = (\text{row } A)^\perp$.

(٢) بما أن $\text{col } A = \text{row } A^T$ فإننا نجد باستخدام (١) أن :

$$\diamond . (\text{col } A)^\perp = (\text{row } A^T)^\perp = N(A^T)$$

ليكن W فضاء جزئياً من فضاء الضرب الداخلي V ولتكن $\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$

أساساً متعامداً للفضاء W . وليكن $v \in V$. بما أن المتجهات w_1, w_2, \dots, w_m تولد

W فإن المتجه :

$$(١) \quad v_1 = \frac{\langle v, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 + \frac{\langle v, w_2 \rangle}{\|w_2\|^2} w_2 + \dots + \frac{\langle v, w_m \rangle}{\|w_m\|^2} w_m \in W$$

وبما أن المتجه $v_2 = v - v_1$ عمودي على كل من w_1, w_2, \dots, w_m فإننا نجد باستخدام

المبرهنة (٩ ، ٥) أن $v_2 \in W^\perp$. وبالتالي يكون $v = v_1 + v_2$ حيث $v_1 \in W$ و

$v_2 \in W^\perp$. إضافة إلى ذلك فإن هذا التمثيل وحيد ، وذلك إذا كان $v = w_1 + w_2$ حيث

$v_1 \in W$ و $v_2 \in W^\perp$ تمثيلاً آخر فإن $w_1 - v_1 = v_2 - w_2 \in W \cap W^\perp$. ولذا فإن $w_1 - v_1 = 0$. أي أن $w_1 = v_1$. ومنه فإن $w_2 = v_2$. ونكون قد أثبتنا صحة المبرهنة التالية والتي تسمى مبرهنة التفريق العمودي (orthogonal decomposition theorem).

مبرهنة (٥ ، ١٤)

♦ إذا كان W فضاءً جزئياً من فضاء الضرب الداخلي V فإن $V = W \oplus W^\perp$.

ملحوظات

(١) يسمى المتجه v_1 الموصوف في (١) الإسقاط العمودي للمتجه v على W (orthogonal projection of v on W) ويرمز له بالرمز $\text{proj}_W(v)$. كما يسمى المتجه v_2 المركبة العمودية للمتجه v على W (orthogonal component of v on W) ويرمز له بالرمز $\text{proj}_{W^\perp}(v)$.

(٢) إذا كان V فضاء ضرب داخلي على أي حقل F (ليس بالضرورة \mathbb{R}) وكان W فضاءً جزئياً من V فإنه من الممكن إثبات أن $V = W + W^\perp$ وأن $\dim V = \dim W + \dim W^\perp$ ولكن ليس بالضرورة أن يكون $V = W \oplus W^\perp$. والمثال التالي يوضح ذلك.

مثال (٥ ، ٢٤)

ليكن $W = \{(0,0,0), (1,0,1)\}$ فضاءً جزئياً من فضاء الضرب الإقليدي Z_2^3 . عندئذٍ من السهل أن ترى أن $W^\perp = \{(0,0,0), (0,1,0), (1,0,1), (1,1,1)\}$. وأن $\dim W = 1$ و $\dim W^\perp = 2$. ولذا فإن $3 = \dim Z_2^3 = \dim W + \dim W^\perp$. ولكن $W \cap W^\perp = \{(1,0,1)\} \neq \{0\}$. وبالتالي فإن $Z_2^3 \neq W \oplus W^\perp$. □

مثال (٥ ، ٢٥)

ليكن W الفضاء الجزئي من فضاء الضرب الإقليدي \mathbb{R}^4 المولد بالمتجهات

$$v_1 = (1, 1, 1, 1), v_2 = (1, 0, 0, 0), v_3 = (1, 1, 0, 1)$$

وليكن $v = (3, -1, 0, 2) \in \mathbb{R}^4$. أكتب v كمجموع متجهين إحداهما ينتمي إلى W والآخر

إلى W^\perp .

الحل

باستخدام خوارزمية جرام - شميت نستطيع تحويل $\{v_1, v_2, v_3\}$ إلى أساس متعامد

$$\left\{ u_1 = (1, 1, 1, 1), u_2 = \frac{1}{4}(3, -1, -1, -1), u_3 = \frac{1}{3}(0, 2, -1, -1) \right\}$$

للفضاء الجزئي W أنظر مثال (٥ ، ٢٢) . الآن :

$$\begin{aligned} w_1 = \text{proj}_W(v) &= \frac{\langle v, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 + \frac{\langle v, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2 + \frac{\langle v, u_3 \rangle}{\|u_3\|^2} u_3 \\ &= 2(1, 1, 1, 1) + \frac{4}{3} \left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4} \right) - 2 \left(0, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3} \right) \\ &= \left(3, 3, \frac{7}{3}, \frac{7}{3} \right) \end{aligned}$$

ولذا فإن $v = w_1 + (v - w_1)$.

$$\square \cdot (3, -1, 0, 2) = \left(3, 3, \frac{7}{3}, \frac{7}{3} \right) + \left(0, -4, -\frac{7}{3}, -\frac{1}{3} \right)$$

تمارين (٥ ، ٤)

في التمارين من (١) إلى (٥) أكتب المتجه v كمجموع متجهين أحدهما في

الفضاء W والآخر في الفضاء W^\perp حيث V هو فضاء الضرب الإقليدي \mathbb{R}^n المبين .

$$(١) \cdot v = (1, 2, 3) \text{ و } W = \langle \{(2, 5, -1), (-2, 1, 1)\} \rangle$$

الجبر الخطي وتطبيقاته

(٢) $\mathbf{v} = (1, 3, 5)$ و $\mathbf{W} = \langle \{(1, 3, -2), (5, 1, 4)\} \rangle$

(٣) $\mathbf{W} = \langle \{(1, 1, 0, 1), (-1, 3, 2, -1), (-1, 0, 1, 1)\} \rangle$ و

$\mathbf{v} = (4, 3, 3, -1)$

(٤) $\mathbf{v} = (1, 0, 1, 1)$ و $\mathbf{W} = \langle \{(0, 0, -1, 1), (0, 1, 1, 1)\} \rangle$

(٥) $\mathbf{v} = (1, 1, 1, 1)$ و $\mathbf{W} = \langle \{(-1, 2, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\} \rangle$

(٦) ليكن \mathbf{W} هو الفضاء الجزئي من \mathbf{P}_2 المولد بالمجموعة $\{1, 2x - 1\}$. أكتب \mathbf{v}

كمجموع متجهين أحدهما في الفضاء \mathbf{W} والأخر في الفضاء \mathbf{W}^\perp حيث فضاء

الضرب الداخلي هو $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)$ ، $\mathbf{v} = x^2 + 1$

(٧) إذا كان \mathbf{W} فضاءً جزئياً من فضاء الضرب الداخلي \mathbf{V} وكان $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ و

$\alpha \in \mathbf{R}$ فاثبت أن :

(أ) $\text{proj}_{\mathbf{W}}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \text{proj}_{\mathbf{W}}(\mathbf{u}) + \text{proj}_{\mathbf{W}}(\mathbf{v})$

(ب) $\text{proj}_{\mathbf{W}}(\alpha \mathbf{u}) = \alpha \text{proj}_{\mathbf{W}}(\mathbf{u})$