الفصل السابع

القيم والمتجهات المميزة والإستقطار
EIGENVALUES , EIGENVECTORS AND DIAGONALIZATION

(٧ ، ١) القيم والمتجهات المميزة
Eigenvalues And Eigenvectors

إن الكثير من تطبيقات الجبر الخطي يتطلب إيجاد مصفوفة غير صفرية X بحيث يكون $AX = \lambda X$ حيث A مصفوفة مربعة و $\lambda \in \mathbb{R}$. تعرف هذه المسألة بمسألة القيم المميزة وتعتبر ثاني أهم المسائل في الجبر الخطي (المسألة الأكثر أهمية هي حلول أنظمة المعادلات الخطية) . وهناك حافز هام آخر يدفعنا لدراسة هذه المسألة ألا وهو استقطار مصفوفة مربعة A ونعني بذلك إيجاد مصفوفة لها معكوس P بحيث تكون $P^{-1}AP$ مصفوفة قطرية .

تعريف (٧ ، ١)

لتكن A مصفوفة مربعة من الدرجة n . نقول إن العدد الحقيقي λ قيمة مميزة (eigenvalue) للمصفوفة A إذا وجد متجه غير صفري X بحيث يكون $AX = \lambda X$. وفي هذه الحالة يطلق على المتجه X المتجه المميز (eigenvector) للمصفوفة A المقابل للقيمة المميزة λ .

ملحوظات

(١) إن للمتجهات والقيم المميزة للمصفوفة A تفسيراً هندسياً بسيطاً ذلك لأنه لو كان X متجهاً مميزاً للمصفوفة A يقابل القيمة المميزة λ ، أي أن $AX = \lambda X$ فإن ضرب المتجه X من اليسار بالمصفوفة A يمدد المتجه إذا كانت $\lambda > 1$ ويقلصه إذا

كانت $1 > \lambda > 0$ ، كما أنه يحافظ على اتجاهه إذا كانت $\lambda > 0$ أو يغير اتجاهه إذا كانت $\lambda < 0$.

(٢) إذا كان $X = 0$ فإن المعادلة $AX = \lambda X$ متحققة لكل $\lambda \in \mathbb{R}$ وبالتالي فإن هذه الحالة لا تمثل لنا أي أهمية .

(٣) إذا كان X متجهاً مميزاً للمصفوفة A يقابل القيمة المميزة λ وكان $0 \neq c \in \mathbb{R}$ فإنه بوضع $Y = cX$ نجد أن :

$$AY = A(cX) = c(AX) = c(\lambda X) = \lambda(cX) = \lambda Y .$$

ولذا فإن $Y = cX$ متجه مميز للمصفوفة A يقابل القيمة المميزة λ . ومن ثم فإننا نخلص إلى أن ضرب المتجه المميز بأي عدد حقيقي غير صفري ينتج عنه متجه مميز يقابل نفس القيمة المميزة λ .

بعد أن عرفنا القيم والمتجهات المميزة للمصفوفة A ننتقل الآن إلى كيفية حسابها . لاحظ أولاً أن المعادلة $AX = \lambda X$ تكافئ المعادلة $\lambda IX = AX$ وهذه بدورها تكافئ المعادلة $(\lambda I - A)X = 0$ حيث I هي المصفوفة المحايدة . والمعادلة الأخيرة تلقي بعض الضوء على مسألة إيجاد القيم والمتجهات المميزة حيث أنها تبين لنا أن المتجهات المميزة هي مجموعة الحل لنظام المعادلات الخطية المتجانسة $(\lambda I - A)X = 0$. فإذا علمنا القيم المميزة فإننا نقوم بحل النظام لإيجاد المتجهات المميزة ، وإذا علمنا المتجهات المميزة فإننا نستطيع إيجاد القيم المميزة بمقارنة عناصر X مع عناصر AX . أما إذا لم نعلم أي من القيم المميزة أو المتجهات المميزة (وهذا هو الوضع في معظم الأحيان) فإننا نعلم أن للنظام $(\lambda I - A)X = 0$ حل غير تافه إذا وفقط إذا كانت المصفوفة $\lambda I - A$ ليس لها معكوس ، أي إذا وفقط إذا كان $\det(\lambda I - A) = 0$. إذا اعتبرنا أن λ مجهول فإن $\det(\lambda I - A)$ عبارة عن كثيرة حدود في المجهول λ ، تسمى كثيرة الحدود هذه كثيرة الحدود المميزة (characteristic polynomial) للمصفوفة A .

مما سبق نجد أنه لحساب القيم والمتجهات المميزة لمصفوفة مربعة A يجب علينا اتباع الخطوات التالية :

(١) نحسب كثيرة الحدود المميزة $h(\lambda)=\det(\lambda I-A)$.

(٢) نحسب القيم المميزة للمصفوفة A وهي عبارة عن حلول المعادلة المميزة $h(\lambda)=0$.

(٣) لكل قيمة مميزة λ_i نحسب المتجه المميز المقابل لها وذلك بحل نظام المعادلات المتجانس $(\lambda_i I-A)X=0$.

سنوضح ذلك ببعض الأمثلة .

مثال (١ ، ٧)

عين القيم والمتجهات المميزة للمصفوفة $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 4\end{bmatrix}$.

الحل

المعادلة المميزة هي $0=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 1\\ -2 & \lambda-4\end{vmatrix}=h(\lambda)=\det(\lambda I-A)$.

ولذا فإن $0=6+\lambda 5-\lambda^2=2+(\lambda-4)(\lambda-1)$ ولهذه المعادلة جذران هما $\lambda_1=2$ و $\lambda_2=3$ ، وهاتان هما القيمتان المميزتان للمصفوفة A . لتعيين المتجهين المميزين لهذه المصفوفة نحل النظام المتجانس $(\lambda I-A)X=0$ والذي يمكن كتابته على الصورة : $\begin{bmatrix}\lambda-1 & 1\\ -2 & \lambda-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$.

الآن عندما $\lambda=2$ نحصل على النظام $\begin{bmatrix}1 & 1\\ -2 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$.

وهذا بدوره يكافيء النظام $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. ولذا فإن $x_1 + x_2 = 0$ ومنه فإن $x_1 = -x_2$. إذن للنظام عدد لا نهائي من الحلول ، ولذا فإنه يوجد عدد لانهائي من المتجهات المميزة المقابلة للقيمة المميزة $\lambda = 2$. إذا وضعنا على سبيل المثال $x_2 = 1$ فإن $x_1 = -1$ ومنه فإن $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ متجه مميز مقابل للقيمة المميزة $\lambda = 2$.

وبطريقة مماثلة نجد أن $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ متجه مميز مقابل للقيمة المميزة $\lambda = 3$. □

مثال (٢ ، ٧)

عين القيم والمتجهات المميزة للمصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

الحل

كثيرة الحدود المميزة للمصفوفة A هي :

$$h(\lambda)=\det(\lambda I - A)=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda-2 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 3\lambda$$

$$=\lambda(\lambda^2 - 4\lambda + 3) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 3)$$

ولذا فإن $\lambda = 0$ ، $\lambda = 1$ و $\lambda = 3$ هي القيم المميزة للمصفوفة A . ولإيجاد المتجهات المميزة للمصفوفة A نحل النظام $(\lambda I - A)X = 0$ لقيم λ المختلفة .

عندما $\lambda = 0$ نجد أن النظام يأخذ الصيغة :

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

وباستخدام طريقة جاوس لحل أنظمة المعادلات نجد أن النظام أعلاه يكافئ النظام :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ومنه نجد أن :

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 \quad &= 0 \\ x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

ولذا فإن $x_1 = x_2 = x_3$. وبوضع $x_3 = 1$ نجد أن $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ متجه مميز يقابل القيمة المميزة $\lambda = 0$. وبأسلوب مماثل نجد أن $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ متجهان مميزان يقابلان القيمتان المميزتان $\lambda = 1$ و $\lambda = 3$ على التوالي . □

مثال (٣ ، ٧)

عين القيم والمتجهات المميزة للمصفوفة $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

الحل

كثيرة الحدود المميزة هي :

$$h(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 5 & -4 & -2 \\ -4 & \lambda - 5 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda - 2 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^3 - 12\lambda^2 + 21\lambda - 10 = (\lambda - 1)^2 (\lambda - 10)$$

ولـذا فـإن المعادلـة المميـزة هـي $(\lambda - 10) (\lambda - 1)^2 = 0$. ومـنه فـإن $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ و $\lambda_3 = 10$ هـي القيـم المميزة للمصفوفة A (لاحظ هنا أن القيمة المميزة $\lambda = 1$ مكررة مرتين) . لحساب المتجهات المميزة نحل النظام $(\lambda I - A) X = 0$. فعندما تكون $\lambda = 1$ نجد أن هذا النظام يأخذ الصيغة :

$$\begin{bmatrix} -4 & -4 & -2 \\ -11 & -4 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

وباستخدام طريقة جاوس نجد أن هذا النظام يكافئ :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ومنه فإن $x_1 + x_2 + \frac{1}{2} x_3 = 0$. وبوضع $x_2 = t$ و $x_3 = s$ نجد أن $x_1 = -t - s$ ، ولذا فـإن المـتجهات المميـزة المقـابل لـلقيمة $\lambda = 1$ هـي $\begin{bmatrix} -t-s \\ t \\ 2s \end{bmatrix}$ حيـث $t , s \in \mathbb{R}$.

وعندما تكون $\lambda = 10$ نجد أن النظام يأخذ الصيغة :

$$\begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

وباستخدام طريقة جاوس لحل هذا النظام نجد أنه يكافئ :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ولذا فإننا نحصل على نظام المعادلات :

$$x_1 + x_2 - 4x_3 = 0$$
$$x_2 - 2x_3 = 0$$

وبحل هذا النظام نجد أن المتجهات المميزة المقابلة للقيمة المميزة $\lambda = 10$ هي

$$\begin{bmatrix} 2t \\ 2t \\ t \end{bmatrix}$$ حيث $t \in \mathbb{R}$. □

لا بد من التوقف قليلاً هنا لتقديم بعض الملحوظات الهامة للإجابة على بعض التساؤلات التي لا بد وأن تكون قد خطرت في ذهن القارئ أثناء القيام بحل المثاليين (٢، ٧) و (٣ ، ٧) .

ملحوظات

(١) عندما تكون درجة المصفوفة صغيرة نوعاً ما فإن الطريقة الأمثل لإيجاد كثيرة الحدود المميزة $h(\lambda)$ هي استخدام التعريف لإيجاد قيمة المحدد مع مراعاة استعمال الصف أو العمود الذي يحتوي على أكبر عدد من الأصفار . أما إذا كانت درجة المصفوفة كبيرة فإنه عادة ما يفضل استخدام خواص المحددات لتحويل المصفوفة إلى مصفوفة مثلثية (علوية أو سفلية) ومن ثم فإنه يسهل إيجاد قيمة محددها .

(٢) إذا كانت A مصفوفة من الدرجة n فإن كثيرة الحدود المميزة لها هي كثيرة حدود واحدية من الدرجة n تأخذ الصورة :

$h(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0$ وأنه ليس بالأمر العسير التحقق من أن $c_{n-1} = -tr(A)$ وأن $c_0 = (-1)^n \det(A)$.

(٣) إن مسألة حل المعادلة المميزة $h(\lambda)=0$ لإيجاد القيم المميزة لمصفوفة A يكون في غالب الأحيان أمراً شاقاً وذلك لأنه من المعلوم عدم وجود صيغة عامة لإيجاد جذور كثيرة حدود عندما يكون $n>4$. كذلك على الرغم من وجود مثل هذه الصيغة في الحالات $n=2,3,4$ فإن هذه الصيغة للحالتين $n=3,4$ معقدة جداً ناهيك عن صعوبة تذكرها . ولذا فإننا عادة ما نستعين بالحقيقة التي لا بد وأن القارئ على دراية بها وهي أنه لو كان لدينا كثيرة حدود واحدية معاملاتها أعداد صحيحة وكان لها جذراً كسرياً فلا بد وأن يكون هذا الجذر عدداً صحيحاً يقسم الحد الثابت ، وفي أغلب الأحيان يكون عدد هذه القواسم صغيراً مما يسهل التحقق من كونها جذوراً أم لا. فعلى سبيل المثال لإيجاد جذور معادلة كثيرة الحدود المميزة $\lambda^3-12\lambda^2+21\lambda-10=0$ في المثال (٣ ، ٧) نجد أن قواسم العدد 10 هي $\pm1\,,\ \pm2\,,\ \pm5\,,\ \pm10$ ولذا من السهل أن نرى أن كل من 1 و 10 يحقق المعادلة ومن ثم باستخدام القسمة المطولة نجد أن $(\lambda-10)(\lambda-1)^2=0$ وبالتالي نحصل على الجذور المطلوبة . ولابد وأن ننوه هنا أنه في حالة فشل هذه الطريقة فإننا نلجأ إلى إحدى الطرق التقريبية لتحديد الجذور كطريقة التنصيف أو طريقة نيوتن .

(٤) من المحتمل أن يكون لكثيرة حدود معاملاتها أعداد حقيقية جذوراً مركبة ، ولذا فإنه من المتوقع أن يكون لمصفوفة A قيماً مميزة مركبة ، فعلى سبيل المثال إذا كانت $A=\begin{bmatrix}-2 & -1\\ 5 & 2\end{bmatrix}$ فإن $h(\lambda)=\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix}\lambda+2 & 1\\ -5 & \lambda-2\end{vmatrix}=\lambda^2+1$. ولذا فإن $\lambda=\pm i$ هما القيمتان المميزتان للمصفوفة A كما أن كلاً منهما عدد مركب . سيكون تركيزنا في هذا الكتاب على القيم المميزة الحقيقية ولكننا نلفت نظر القارئ إلى أن الكثير من التطبيقات الهامة على القيم المميزة تتضمن قيماً مميزة مركبة .

(٥) لقد لاحظنا أنه لإيجاد المتجهات المميزة المقابلة للقيمة المميزة λ نقوم بحل نظام المعادلات المتجانس $(\lambda I-A)X=0$ ، ولهذا النظام عدد غير منته من

الحلول ومجموعة الحل هي فضاء الحل للنظام وهذا بدوره فضاء جزئي من فضاء المتجهات $\mathbf{R}^n$ ونطلق عليه الفضاء المميز (eigenspace) المقابل للقيمة المميزة λ ونرمز له بالرمز E_λ . أي أن $E_\lambda = \{ X \in \mathbf{R}^n : AX = \lambda X \}$. ففي المثال (٢، ٧) لدينا ثلاث قيم مميزة مختلفة هي $0,1,3$ ولذا فإنه يكون لدينا ثلاث فضاءات مميزة هي

$$E_0 = \{ (t , t , t) : t \in \mathbf{R} \}$$
$$E_1 = \{ (-t , 0 , t) : t \in \mathbf{R} \}$$
$$E_3 = \{ (t , -2t , t) : t \in \mathbf{R} \}$$

لاحظ أيضاً أن $\dim E_0 = \dim E_1 = \dim E_3 = 1$. وأما في المثال (٣ ، ٧) فإننا وجدنا ثلاث قيم مميزة غير مختلفة حيث إن احداها مكرر مرتين وهي $1,1,10$. ولذا فإننا نحصل على فضائين مميزين هما :

$$E_1 = \{ (-t - s , t , 2s) : s , t \in \mathbf{R} \}$$
$$E_{10} = \{ (2t , 2t , t) : t \in \mathbf{R} \}$$

لاحظ أن $\dim E_1 = 2$ وأن $\dim E_{10} = 1$.

(٦) لاحظنا أنه لدينا في المثال (٢ ، ٧) ثلاث قيم مميزة مختلفة وأن بعد كل من الفضاءات الثلاث المميزة المقابلة هو 1 . وفي المثال (٣ ، ٧) لدينا قيمة مميزة بسيطة هي $\lambda = 10$ ويقابلها فضاء مميز بعده 1 ، وقيمة مميزة مكررة مرتين هي $\lambda = 1$ يقابلها فضاء مميز بعده 2 . إن هذه الظاهرة ليست دائما صحيحة حيث أنه من الممكن على سبيل المثال أن نجد قيمة مميزة مكررة مرتين ولكن بعد الفضاء المميز المقابل لها هو 1 وهذا ما يوضحه المثال التالي .

مثال (٤ ، ٧)

عين القيم والفضاءات المميزة للمصفوفة $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

الحل

المعادلة المميزة هي $h(\lambda)=\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 \\ 0 & \lambda-2 \end{vmatrix}=(\lambda-2)^2=0$.

إذن $\lambda_1=\lambda_2=2$ هي القيمة المميزة (مكررة مرتين) للمصفوفة A . الآن النظام $(2I-A)X=0$ يأخذ الصيغة : $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. ومنه نحصل على أن $-x_2=0$. ولذا فإن $E_2=\{(t,0):t\in\mathbb{R}\}$ وبالتالي فإن $\dim E_2=1$. □

المبرهنة التالية تزودنا بعلاقة هامة بين المتجهات المميزة المقابلة للقيم المميزة المختلفة والاستقلال الخطي .

مبرهنة (١ ، ٧)

إذا كانت A مصفوفة من الدرجة n وكانت $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ هي قيم A المميزة المختلفة وكانت $X_1, X_2, \ldots, X_k$ هي المتجهات المميزة المقابلة للقيم المميزة المختلفة $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ فإن $\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ مستقلة خطياً .

البرهان

نستخدم الاستقراء الرياضي على k . إذا كان $k=1$ فإنه من الواضح أن $\{X_1\}$ مستقلة خطياً وذلك لأن $X_1\neq \mathbf{0}$. نفرض الآن أن $\{X_1, X_2, \ldots, X_{k-1}\}$ مستقلة خطياً ونبرهن أن $\{X_1, X_2, \ldots, X_{k-1}, X_k\}$ مستقلة خطياً . لنفرض إذن $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}, \alpha_k\in\mathbb{R}$ حيث

$$\alpha_1X_1+\alpha_2X_2+\cdots+\alpha_{k-1}X_{k-1}+\alpha_kX_k=\mathbf{0} \qquad (١)$$

بالضرب من اليسار بالمصفوفة A واستخدام العلاقة $AX_i=\lambda_i X_i$ نجد أن :

$$(٢) \qquad \alpha_1 \lambda_1 X_1 + \alpha_2 \lambda_2 X_2 + \cdots + \alpha_{k-1} \lambda_{k-1} X_{k-1} + \alpha_k \lambda_k X_k = \mathbf{0}$$

بضرب المعادلة (١) بالعدد λ_k وطرح المعادلة (٢) من الناتج نحصل على :

$$\alpha_1 (\lambda_k - \lambda_1) X_1 + \alpha_2 (\lambda_k - \lambda_1) X_2 + \cdots + \alpha_{k-1} (\lambda_k - \lambda_{k-1}) X_{k-1} = \mathbf{0}.$$

وبما أن $\{X_1, X_2, \ldots, X_{k-1}\}$ مستقلة خطياً فإننا نجد أن $\alpha_i (\lambda_k - \lambda_i) = 0$ لكل $1 \le i \le k-1$. وبما أن القيم المميزة مختلفة فإن $\lambda_k - \lambda_i \ne 0$ لكل $1 \le i \le k-1$ ، ولذا فإن $\alpha_i = 0$ لكل $1 \le i \le k-1$. إذن $\alpha_k X_k = \mathbf{0}$. ولكن $X_k \ne \mathbf{0}$ ولذا فإن $\alpha_k = 0$ وبالتالي فإن $\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ مستقلة خطياً وبهذا ينتهي البرهان . ♦

تحذير

إن عكس المبرهنة (٧ ، ١) ليس بالضرورة صحيح وذلك لأنه من الممكن أن نحصل على قيم مميزة غير مختلفة ولكن المتجهات المميزة المقابلة لها مستقلة خطياً. فعلى سبيل المثال وجدنا في المثال (٧ ، ٣) إن $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ قيمة مميزة مكررة مرتين وأن الفضاء المميز المقابل لها مولد بالمتجهين المميزين $(-1, 1, 0)$ و $(-1, 0, 2)$ وهما مستقلان خطياً .

النتيجة الهامة التالية التي نحصل عليها مباشرة من المبرهنة (٧ ، ١) لها أهمية خاصة .

نتيجة (٧ ، ٢)

لتكن A مصفوفة من الدرجة n . إذا كانت جميع القيم المميزة للمصفوفة n مختلفة فإنه يوجد أساس للفضاء $\mathbb{R}^n$ عناصره متجهات مميزة . ♦

مثال (٥ ، ٧)

لقد وجدنا في المثال (١ ، ٧) أن القيمتين المميزتين للمصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

هما $\lambda_1 = 2$ و $\lambda_2 = 3$ وأن $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ متجهان مميزان مقابلان للقيمتين

$\lambda_1 = 2$ و $\lambda_2 = 3$ على التوالي . ولذا فإن $\{(-1,1),(1,-2)\}$ أساس للفضاء

$\mathbb{R}^2$. □

من المهم أن نلاحظ أنه من الممكن لمصفوفة A من الدرجة n أن يكون لها n من المتجهات المميزة المستقلة دون أن تكون قيمتها المميزة مختلفة والمثال التالي يوضح ذلك .

مثال (٦ ، ٧)

لقد وجدنا في المثال (٣ ، ٧) أن القيم المميزة للمصفوفة من الدرجة 3 المبينة هي

$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ و $\lambda_3 = 10$ وأن $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ متجهات مميزة . لاحظ أن

هذه المتجهات المميزة مستقلة خطياً وذلك لأن محدد المصفوفة :

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

هو 9- ولذا فإن B قابلة للعكس . □

نقدم الآن بعض الخواص الأساسية للقيم المميزة .

مبرهنة (٣ ، ٧)

لتكن A مصفوفة من الدرجة n .

(١) إذا كانت $\lambda_1 , \lambda_2 , \ldots , \lambda_n$ هي القيم المميزة (من الممكن أن تكون ليست جميعها مختلفة) للمصفوفة A فإن $\det A = \lambda_1 \, \lambda_2 \ldots \lambda_n$.

(٢) لا يوجد معكوس للمصفوفة A إذا وفقط إذا كانت احدى قيمها المميزة صفراً .

البرهان

(١) لاحظ أن $\det(\lambda I - A) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n)$ لكل $\lambda \in \mathbf{R}$.

وعلى وجه الخصوص إذا كانت $\lambda = 0$ فإن $\det(-A) = (-\lambda_1)(-\lambda_2)\cdots(-\lambda_n)$.

ولذا فإن $(-1)^n \det A = (-1)^n \lambda_1 \, \lambda_2 \ldots \lambda_n$ وبالتالي فإن $\det A = \lambda_1 \, \lambda_2 \ldots \lambda_n$.

(٢) لاحظ أن A ليس لها معكوس إذا وفقط إذا كان $\det A = 0$. ولكن من (١) نجد أن $\lambda_1 \, \lambda_2 \ldots \lambda_n = 0 \Leftrightarrow \det A = 0$ ومنه نحصل على المطلوب . ♦

مثال (٧ ، ٧)

لقد وجدنا في المثال (٢ ، ٧) أن إحدى القيم المميزة للمصفوفة A المبينة هي $\lambda = 0$ ولذا فإن $\det A = 0$. وفي المثال (٣ ، ٧) وجدنا أن القيم المميزة للمصفوفة المبينة هي $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ و $\lambda_3 = 10$. ولذا فإن $\det A = (10)(1)(1) = 10$. □

مبرهنة (٤ ، ٧)

إذا كانت A مصفوفة من الدرجة n فإن :

(١) القيم المميزة للمصفوفة A هي نفس القيم المميزة للمصفوفة A^T .

(٢) إذا كانت A لها معكوس وكانت λ قيمة مميزة للمصفوفة A فإن λ^{-1} قيمة مميزة للمصفوفة A^{-1} .

البرهان

(١) لاحظ أن

$$\det(\lambda I - A) = \det(\lambda I - A)^T = \det(\lambda I^T - A^T) = \det(\lambda I - A^T).$$

ولذا فإن λ قيمة مميزة للمصفوفة A إذا وفقط إذا كانت λ قيمة مميزة للمصفوفة A^T .

(٢) لنفرض أن A لها معكوس وأن λ قيمة مميزة للمصفوفة A وليكن X المتجه المميز للمصفوفة A المقابل للقيمة المميزة λ . بما أن A لها معكوس فإن $\lambda \neq 0$.

ومنه فإن $AX = \lambda X \Rightarrow X = \lambda^{-1} A X$. ولذا فإن :

$A^{-1} X = A^{-1}(\lambda^{-1} AX) = \lambda^{-1}(A^{-1} A)X = \lambda^{-1} X$. وبالتالي فإن λ^{-1} قيمة مميزة للمصفوفة A^{-1} . ♦

تعريف (٢ ، ٧)

لتكن كل من A و B مصفوفة من الدرجة n . نقول إن B تشابه A (similar) إذا وجدت مصفوفة لها معكوس P بحيث يكون $A = P^{-1}BP$.

مبرهنة (٥ ، ٧)

إذا كانت B تشابه A فإن A و B لهمـــا القيم المميزة نفســها .

البرهان

لتكن P مصفوفة قابلة للعكس حيث $A = P^{-1}BP$. عندئذٍ

$$\begin{aligned}\det(\lambda I - A) &= \det(\lambda I - P^{-1}BP) = \det(\lambda P^{-1}IP - P^{-1}BP) \\ &= \det P^{-1}(\lambda I - B)P = \det P^{-1}\det(\lambda I - B)\det P = \det(\lambda I - B)\end{aligned}$$

إذن ، λ قيمة مميزة للمصفوفة A إذا وفقط إذا كانت λ قيمة مميزة للمصفوفة B .

نقدم الآن القيم والمتجهات المميزة للمؤثر الخطي .

تعريف (٣ ، ٧)

ليكن $\mathbf{V}$ فضاء متجهات بعده يساوي n وليكن $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ مؤثراً خطياً . نقول إن $\lambda \in \mathbb{R}$ قيمة مميزة للمؤثر T إذا وجد متجه $0 \neq v \in \mathbf{V}$ بحيث يكون $T(\mathbf{v}) = \lambda\, \mathbf{v}$. المتجه $\mathbf{v}$ يسمى المتجه المميز للمؤثر الخطي T المقابل للقيمة المميزة λ . كذلك نقول إن الفضاء الجزئي $E_\lambda = \{ \mathbf{v} \in \mathbf{V} : T(\mathbf{v}) = \lambda\, \mathbf{v} \}$ هو الفضاء المميز المقابل للقيمة المميزة λ .

ملحوظات

ليكن $\mathbf{V}$ فضاء متجهات منته البعد وليكن B أساساً للفضاء $\mathbf{V}$. من السهل على القارئ التحقق من صحة العبارتين التاليتين :

(١) القيم المميزة للمؤثر T هي نفس القيم المميزة للمصفوفة $[T]_B$.

(٢) يكون المتجه X متجهاً مميزاً الخطي T يقابل القيمة المميزة λ إذا وفقط إذا كان $[X]_B$ متجهاً مميزاً للمصفوفة $[T]_B$ يقابل القيمة المميزة λ .

بناء على الملاحظتين السابقتين نستنتج أنه لتعيين القيم والمتجهات المميزة لمؤثر خطي T نختار أساساً B للفضاء $\mathbf{V}$ ثم نجد المصفوفة $[T]_B$ ومن ثم نحسب القيم والمتجهات المميزة للمصفوفة $[T]_B$.

مثال (٨ ، ٧)

عين القيم والفضاءات المميزة للمؤثر الخطي $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ المعرف بالقاعدة :

$$T(x, y, z) = (x - y, -x + 2y - z, -y + z).$$

الحل

لنفرض أن $B = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ هو الأساس المعتاد للفضاء $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
T(1,0,0)&=(1,-1,0)=1(1,0,0)+(-1)(0,1,0)+0(0,0,1)\\
T(0,1,0)&=(-1,2,-1)=-1(1,0,0)+2(0,1,0)+(-1)(0,0,1)\\
T(0,0,1)&=(0,-1,1)=0(1,0,0)+(-1)(0,1,0)+1(0,0,1)
\end{aligned}$$

إذن ، $[T]_B=\begin{bmatrix}1&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&1\end{bmatrix}$.

وهذه هي المصفوفة الواردة في المثال (٢ ، ٧) . ولذا فإن :

$\lambda_1=0$ ، $\lambda_2=1$ و $\lambda_3=3$. هي القيم المميزة للمصفوفة $[T]_B$ (ومن ثم القيم المميزة للمؤثر الخطي T) . كذلك $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$ هي أساسات الفضاءات المميزة E_1 , E_2 و E_3 على التوالي للمصفوفة $[T]_B$ (ومن ثم أساسات الفضاءات المميزة للمؤثر الخطي T) . □

مثال (٩ ، ٧)

عين القيم المميزة وأساسات للفضاءات المميزة للمؤثر الخطي $T:\mathbf{P}_2\to\mathbf{P}_2$ المعرف بالقاعدة $T(a+bx+cx^2)=(2a+b+c)+(2a+b-2c)x-(a+2c)x^2$.

الحل

لنفرض أن $B=\{1,x,x^2\}$ هو الأساس المعتاد للفضاء $\mathbf{P}_2$. الآن

$$\begin{aligned}
T(1)&=2+2x-x^2\\
T(x)&=1+x-0x^2\\
T(x^2)&=1-2x-2x^2
\end{aligned}$$

ولذا فإن مصفوفة المؤثر بالنسبة للأساس B هي :

$$A=[T]_B=\begin{bmatrix}2&1&1\\2&1&-2\\-1&0&-2\end{bmatrix}$$

الآن كثيرة الحدود المميزة هي :

$$h(\lambda)=\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&-1\\-2&\lambda-1&2\\1&0&\lambda+2\end{vmatrix}=\lambda^3-\lambda^2-5\lambda-3$$

$$=(\lambda+1)^2(\lambda-3)$$

إذن ، $\lambda_1=\lambda_2=-1$ و $\lambda_3=3$ هي القيم المميزة للمصفوفة A .

عندما $\lambda=-1$ نجد أن النظـــام $(-1-A)X=0$ يأخذ الصيغة :

$$\begin{bmatrix}-3&-1&-1\\-2&-2&2\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

وباستخدام طريقة جاوس لحل النظام نجـــد أن :

$$\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&-2\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

ومنه نجـد أن :

$$x_1+x_3=0$$
$$x_2-2x_3=0$$

بوضع $x_3=1$ نجـــد أن $x_1=-1$ وأن $x_2=2$ إذن ، $u_1=\begin{bmatrix}-1\\2\\1\end{bmatrix}$ أساس للفضاء

المميز E_{-1} الآن إذا كان $p(x)=a+bx+cx^2$ أساساً للفضاء المميز $E_{-1}(T)$ فإن

$\left[p(x)\right]_B = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. ولذا فإن $p(x) = -1 + 2x + x^2$. وبطريقة مماثلة نجد أن

$\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}$ أساس للفضاء المميز E_3 . ولذا فإن $p(x) = 5 + 6x - x^2$ أساس للفضاء

المميز $E_3(T)$. □

ملحوظة

لاحظ أن القيم المميزة للمؤثر الخطي لا تعتمد على اختيار الأساس لفضاء المتجهات وذلك لأنه لو كان $T : V \to V$ مؤثراً خطياً وكانت كل من B_1 و B_2 أساس للفضاء V فإننا بإستخدام المبرهنة (٢٢ ، ٦) نعلم أن $[T]_{B_1}$ و $[T]_{B_2}$ متشابهتان . وبالتالي فإن لهما نفس القيم المميزة حسب المبرهنة (٥ ، ٧) .

لقد رأينا في المبرهنة (١ ، ٧) أن المتجهات المميزة المقابلة للقيم المميزة المختلفة لمصفوفة A مستقلة خطياً . والمبرهنة التالية هي الرديف للمؤثرات الخطية وبرهانها مشابه لبرهان المبرهنة (١ ، ٧) ولذا فإننا نترك البرهان كتمرين للقارئ .

مبرهنة (٦ ، ٧)

إذا كان T مؤثراً خطياً على فضاء المتجهات V وكانت $\mathbf{v}_1 , \ldots , \mathbf{v}_k$ هي المتجهات المميزة للمؤثر T المقابلة للقيم المميزة المختلفة $\lambda_1 , \lambda_2 , \ldots , \lambda_k$ فإن $\{ \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 , \ldots , \mathbf{v}_k \}$ مستقلة خطياً . ♦

تمارين (١، ٧)

في التمارين من (١) إلى (١٠) عين القيم المميزة وأساسات الفضاءات المميزة للمصفوفة A .

(١) $A=\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ (٢) $A=\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

(٣) $A=\begin{bmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ (٤) $A=\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$

(٥) $A=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (٦) $A=\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -6 & -2 & 0 \\ 19 & 5 & -4 \end{bmatrix}$

(٧) $A=\begin{bmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 0 & -1 & 8 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ (٨) $A=\begin{bmatrix} 7 & 8 & -4 \\ 4 & -8 & -1 \\ -4 & -1 & -8 \end{bmatrix}$

(٩) $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ (١٠) $A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

في التمارين من (١١) إلى (٢٠) عين القيم المميزة وأساسات الفضاءات للمؤثر الخطي T .

(١١) $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ حيث $T(x,y)=(2x+3y,2x+7y)$.

(١٢) $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ حيث $T(x,y)=(x+y,x+y)$.

(١٣) $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ حيث

$$T(x,y,z)=(-7x-9y+3z,2x+4y-2z,-3y-z) .$$

(١٤) $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ حيث $T(x,y,z)=(-2z,x+2y+z,x+3z)$.

(١٥) $T:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ حيث $T(x,y,z,t)=(2x+3y,x+4y,t,z)$.

(١٦) $T: \mathbf{P}_2 \to \mathbf{P}_2$ حيث $T\left(ax^2+bx+c\right)=cx^2+bx+a$.

(١٧) $T: \mathbf{P}_2 \to \mathbf{P}_2$ حيث

$T\left(ax^2+bx+c\right)=(5c+6b+2a)-(b+8a)x+(c-2a)x^2$.

(١٨) $T: \mathbf{P}_2 \to \mathbf{P}_2$ حيث

$T\left(ax^2+bx+c\right)=(c+4a)-2bx+(3c+2a)x^2$.

(١٩) $T: \mathbf{M}_{22} \to \mathbf{M}_{22}$ حيث $T(A)=A^T$.

(٢٠) $T: \mathbf{M}_{22} \to \mathbf{M}_{22}$ حيث $T\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2c & a+c \\ b-2c & d \end{bmatrix}$.

(٢١) إذا كانت A مصفوفة مثلثية (علوية أو سفلية) من الدرجة n فأثبت أن القيم المميزة للمصفوفة A هي عناصر القطر الرئيسي . ثم استنتج أن للمصفوفة A معكوس إذا وفقط إذا كانت جميع قيمها المميزة غير صفرية .

(٢٢) إذا كانت λ قيمة مميزة للمصفوفة A فأثبت أن λ^k قيمة مميزة للمصفوفة A^k حيث k عدد صحيح موجب .

(٢٣) إذا كانت A مصفوفة من الدرجة 2 فأثبت أن :

$h(\lambda)=\lambda^2-tr(A)\lambda+\det(A)$.

(٢٤) إذا كانت λ قيمة مميزة للمصفوفة A فأثبت أن $\lambda-4$ قيمة مميزة للمصفوفة $A-4I$.

(٢٥) أثبت أن القيم المميزة للمصفوفة A هي نفس القيم المميزة للمصفوفة A^T. هل متجهات A المميزة هي نفس متجهات A^T المميزة ؟

(٢٦) إذا كانت A مصفوفة من الدرجة n حيث n عدداً فردياً فأثبت أن للمصفوفة A قيمة مميزة حقيقية واحدة على الأقل .

(٢٧) إذا كانت A مصفوفة تحقق $A^3=A$ فأثبت أن القيم المميزة للمصفوفة A هي $0, \pm 1$.

(٢٨) إذا كانت A مصفوفة متلاشية القوى (أي أن $A^k = 0$ حيث $k \in \mathbb{Z}^+$) فأثبت أن 0 هي القيمة المميزة الوحيدة للمصفوفة A .

(٢٩) إذا كانت λ^2 قيمة مميزة للمصفوفة A^2 فهل من الضروري أن تكون λ قيمة مميزة للمصفوفة A ؟

(٣٠) إذا كانت كل من λ_1 و λ_2 قيمة مميزة للمصفوفة A فهل من الضروري أن تكون $\lambda_1 + \lambda_2$ قيمة مميزة للمصفوفة A ؟

(٣١) لتكن العلاقة $\sim$ معرفة على $\mathbf{M}_{nn}$ كالتالي : $A \sim B$ إذا كانت A تشابه B .

أثبت أن $\sim$ علاقة تكافؤ .

(٣٢) إذا كانت A و B مصفوفتان متشابهتان فأثبت أن :

(أ) $tr(A) = tr(B)$.　　　　(ب) $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B)$.

(٣٣) إذا كانت A و B مصفوفتان متشابهتان حيث $A = P^{-1} B P$ فأثبت أن $A^n = P^{-1} B^n P$ لكـــل $n \in \mathbb{Z}^+$.

(٣٤) ليكن $F : \mathbf{M}_{nn} \to \mathbf{M}_{nn}$ تطبيقاً يحقق $F(AB) = F(BA)$ لكل $A, B \in \mathbf{M}_{nn}$. إذا كانت A و B متشابهتان فأثبت أن $F(A) = F(B)$.

(٣٥) إذا كان $\det A = \det B$ فهل من الضروري أن تكون المصفوفتان A و B متشابهتين ؟

(٣٦) إذا كانت A و B متشابهتين فأثبت أن A^2 و B^2 متشابهتان .

(٣٧) أثبت أن $\lambda = 0$ قيمة مميزة للمصفوفة A إذا وفقط إذا كانت A ليس لها معكوس .

(٣٨) لتكن A مصفوفة لها معكوس . أثبت أن المتجهات المميزة للمصفوفة A هي نفس المتجهات المميزة للمصفوفة A^{-1} . ما هي العلاقة بين القيم المميزة A والقيم المميزة للمصفوفة A^{-1} .

(٣٩) إذا كان $T:C[0,1]\to C[0,1]$ المؤثر الخطي المعرف بالقاعدة : $T(f)=f'$ فأثبت أن $\lambda=1$ قيمة مميزة مقابلة للمتجه المميز $f(x)=e^{x}$.

(٤٠) إذا كان T هو المؤثر الخطي المقدم في التمرين (٣٩) فعين القيمة المميزة المقابلة للمتجه المميز $f(x)=e^{-2x}$.

(٢ ، ٧) الإستقطار

Diagonalization

لقد رأينا في البند (٤ ، ٦) أن مصفوفة المؤثر الخطي $T:\mathbf{V}\to\mathbf{V}$ تعتمد اعتماداً كلياً على اختيار أساس للفضاء $\mathbf{V}$، ولقد رأينا ايضاً أن كلاً من A و B مصفوفة للمؤثر الخطي T بالنسبة إلى أساسين للفضاء $\mathbf{V}$ (من الممكن أن يكونا مختلفين) إذا وفقط إذا كانت A و B متشابهتين ، أي أنه يوجد مصفوفة لها معكوس P بحيث أن $B=P^{-1}AP$. سنعالج في هذا البند المسألتين المتكافئتين التاليتين :

(١) ليكن $T:\mathbf{V}\to\mathbf{V}$ مؤثراً خطياً . المطلوب هو ايجاد أساس B للفضاء $\mathbf{V}$ بحيث تكون $[T]_B$ مصفوفة قطرية .

(٢) لتكن A مصفوفة مربعة . المطلوب ايجاد مصفوفة قابلة للعكس P بحيث يكون $P^{-1}AP$ مصفوفة قطرية .

وتسمى أي من هاتين المسألتين مسألة الإستقطار للمؤثر الخطي T أو المصفوفة A .

لقد رأينا أن علاقة التشابه على المصفوفات المربعة هي علاقة تكافؤ وعلاوة على ذلك فهي تحافظ على الكثير من الخواص والتي ندونها هنا لسهولة الرجوع إليها عند الحاجة .

(١) $\det(A)=\det(P^{-1}AP)$.

(٢) A لها معكوس إذا وفقط إذا كانت $P^{-1}AP$ كذلك .

(٣) $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}\left(P^{-1}AP\right)$.

(٤) $\operatorname{tr}(A)=\operatorname{tr}\left(P^{-1}AB\right)$.

(٥) للمصفوفتين A و $P^{-1}AP$ نفس القيم المميزة .

(٦) بعدا الفضائين المميزين للمصفوفة A والمصفوفة $P^{-1}AP$ المقابلان للقيمة المميزة λ متساويان .

تعريف (٤ ، ٧)

نقول إن المصفوفة المربعة A قابلة للإستقطار (diagonalizable) إذا كانت A تشابه مصفوفة قطرية . أي إذا وجدت مصفوفة P لها معكوس بحيث يكون $D=P^{-1}AP$ مصفوفة قطرية .

المبرهنة التالية تزودنا بالشرط اللازم والكافي لكي تكون المصفوفة المربعة A قابلة للإستقطار وتقدم لنا طريقة لإيجاد مصفوفة لها معكوس P حيث $P^{-1}AP$ قطرية.

مبرهنة (٧ ، ٧)

لتكن A مصفوفة مربعة من الدرجة n . عندئذ تكون A قابلة للإستقطار إذا وفقط إذا كان لها n من المتجهات المميزة المستقلة خطياً .

البرهان

لنفرض أولاً أن A قابلة للاستقطار . إذن توجد مصفوفة لها معكوس P حيث $D=P^{-1}AP$ مصفوفة قطرية . لنفرض أن :

$$P=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12}\cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22}\cdots & p_{2n} \\ & \vdots & \\ p_{n1} & p_{n2} & p_{nn}\end{bmatrix}$$ وأن $$D=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0\cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2\cdots & 0 \\ & \vdots & \\ 0 & 0\cdots & \lambda_n\end{bmatrix}.$$

بما أن المصفوفتين A وD متشابهتان فإن لهما نفس القيم المميزة ، وبما أن القيم المميزة للمصفوفة القطرية هي عناصر القطر فإننا نستنتج أن $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ هي القيم المميزة للمصفوفة A. وإذا فرضنا أن $X_1, X_2, \ldots, X_n$ هي أعمدةP فإن

$$PD=\left[\lambda_1 X_1 \mid \lambda_2 X_2 \mid \ldots \mid \lambda_n X_n\right]$$

$$AP=\left[A X_1 \mid A X_2 \mid \cdots \mid A X_n\right]$$

وبما أن $AP = PD$ فإن $AX_1=\lambda_1 X_1, \ldots, AX_n=\lambda_n X_n$. بما أنP لها معكوس فإن جميع أعمدتها غير صفرية ومستقلة خطياً . ولذا فإن $X_1, X_2, \ldots, X_n$ متجهات مميزة مستقلة خطياً للمصفوفة A .

ولبرهان العكس ، نفرض أن $X_1, X_2, \ldots, X_n$ متجهات مميزة للمصفوفة A مستقلة خطياً . ولنفرض أن $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ هي القيم المميزة المقابلة . عندئذ ، $AX_1=\lambda_1 X_1, \ldots, A X_n=\lambda_n X_n$. لنفرض أن $P=\left[X_1 \mid X_2 \mid \ldots \mid AX_n\right]$. عندئذٍ

$$AP=\left[AX_1 \mid AX_2 \mid \ldots \mid AX_n\right] =\left[\lambda_1 X_1 \mid \lambda_2 X_2 \mid \ldots \mid \lambda_n X_n\right]=PD$$

حيث $$D=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{bmatrix}.$$

بما أن $X_1, X_2, \ldots, X_n$ مستقلة خطياً فإنه يوجد معكوس للمصفوفة P . إذن $D=P^{-1}AP$. وبالتالي فإن A قابلة للإستقطار . ♦

مثال (١٠ ، ٧)

أثبت أن المصفوفة $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ قابلة للإستقطار ثم جد مصفوفة P بحيث تكون $P^{-1}AP$ قطرية .

الحل

لقد وجدنا في المثال (٢ ، ٧) أن القيم المميزة للمصفوفة A هي $\lambda_1=0$ ، $\lambda_2=1$ و $\lambda_3=3$ وأن $X_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ، $X_2=\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ و $X_3=\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ هي أساسات الفضاءات المميزة E_0 ، E_1 و E_3 على التوالي . إذن ، $P=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

وبالتالي $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = D=P^{-1}AP$. □

مثال (١١ ، ٧)

أثبت أن المصفوفة $A=\begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ قابلة للاستقطار وجد المصفوفة P بحيث تكون $D=P^{-1}AP$ مصفوفة قطرية .

الحل

لقد وجدنا في المثال (٣ ، ٧) أن القيم المميزة للمصفوفة A هي $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ و $\lambda_3 = 10$. كما أن $\left\{ X_1 = [-1 , 1 , 0]^T , X_2 = [-1, 0, 2]^T \right\}$ أساس للفضاء المميز E_1 وأن $X_3 = [2 , 2 , 1]^T$ أساس للفضاء المميز E_{10} .

لذا فإن ، $P = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. وبالتالي فإن $D = P^{-1} A P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$. □

مثال (١٢ ، ٧)

بين أن المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ غيرقابلة للإستقطار .

الحل

لاحظ أن المصفوفة A مثلثية ولذا فإن عناصر القطر $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ و $\lambda_3 = -1$ هي القيم المميزة وبحساب اساسات للفضاءات المميزة نجد أن $X_1 = [1 , 0 , 0]^T$ أساس للفضاء E_1 وأن $X_1 = [-1 , 1 , 0]^T$ أساس للفضاء E_{-1} . ولذا فإنه لا يمكن ايجاد ثلاثة متجهات مميزة مستقلة خطياً وبالتالي فإن A غير قابلة للاستقطار . □

المبرهنة التالية تزودنا بشرط كاف لتكون المصفوفة A قابلة للاستقطار .

مبرهنة (٨ ، ٧)

إذا كانت A مصفوفة من الدرجة n عدد قيمها المميزة المختلفة هو n فإن A قابلة للاستقطار.

البرهان

لنفرض أن $X_1, X_2, \ldots, X_n$ هي المتجهات المميزة المقابلة للقيم المميزة المختلفة $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n$. باستخدام المبرهنة (٧ ، ١) نجد أن $X_1, X_2, \ldots, X_n$ مستقلة خطياً . ولذا باستخدام المبرهنة (٧ ، ٧) نجد أن A قابلة للاستقطار . ♦

مثال (٧ ، ١٣)

أثبت أن المصفوفة $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ قابلة للاستقطار ثم جد P حيث $D = P^{-1} A P$ مصفوفة قطرية واستخدمها لحساب A^4 .

الحل

كثيرة الحدود المميزة هي :

$$h(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -4 & 2 \\ 3 & \lambda-4 & 0 \\ 3 & -1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-3)(\lambda-2)(\lambda-1)$$

ولذا فإن $\lambda_1 = 1$ ، $\lambda_2 = 2$ و $\lambda_3 = 3$ هي القيم المميزة. وبما أنها مختلفة فإن A قابل للاستقطار وبطريقة مشابهة للأمثلة السابقة نجد أن :

$X_1 = [1,1,1]^T$ ، $X_2 = [2,3,3]^T$ و $X_3 [1,3,4]^T$ هي اساسات E_1, E_2 و E_3

على التوالي . إذن ، $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$. ولذا فإن $D = P^{-1} A P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

الآن $A = P D P^{-1}$. ولذا فإن $A^4 = P D^4 P^{-1}$. وبحساب P^{-1} نجد أن

$$P^{-1}=\begin{bmatrix}3 & -5 & 3\\ -1 & 3 & -2\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$$ ومن ثم فإن :

$$A^4=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 3\\ 1 & 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 16 & 0\\ 0 & 0 & 81\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -5 & 3\\ -1 & 3 & -2\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-29 & 10 & 20\\ -45 & -104 & 150\\ -45 & -185 & 231\end{bmatrix}$$

من المهم جداً أن نلاحظ أن عكس المبرهنة (٨ ، ٧) ليس بالضرورة صحيح ، فعلى سبيل المثال القيم المميزة للمصفوفة المقدمة في المثال (١١ ، ٧) غير مختلفة ولكن المصفوفة قابلة للاستقطار . ولذا فإن المبرهنة (٨ ، ٧) لا تقدم لنا حلاً تاماً لمسألة الإستقطار . ولكي نقدم حلا لمسألة الاستقطار يلزمنا التعريف التالي :

تعريف (٥ ، ٧)

(١) نقول إن القيمة المميزة λ_i للمصفوفة A لها تعدد m (multiplicity) إذا تكررت m من المرات كجذر لكثيرة الحدود المميزة . أي إذا كان $h(\lambda)=(\lambda-\lambda_i)^m f(\lambda)$ حيث $f(\lambda)\neq 0$. ويسمى العدد m التعدد الجبري (algebraic multiplicity) للقيمة المميزة λ_i .

(٢) يسمى بعد الفضاء المميز E_{λ_i} المقابل للقيمة المميزة λ_i التعدد الهندسي (geometric multiplicity) للقيمة المميزة λ_i .

هناك علاقة وثيقة جداً بين قابلية الاستقطار والتعددين الجبري والهندسي للقيم المميزة للمصفوفة . وقبل أن نبرهن هذه العلاقة نوضحها بالأمثلة التي قدمناها في هذا البند نستعرضها في الجدول التالي لسهولة الرجوع إليها .

المصفوفة	كثيرة الحدود المميزة	القيم المميزة	التعدد الجبري	التعدد الهندسي	قابلية الإستقطار
$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$	$\lambda(\lambda-1)(\lambda-3)$	0 1 3	1 1 1	1 1 1	قابلة للإستقطار
$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$	$(\lambda-1)^2(\lambda-10)$	1 10	2 1	2 1	قابلة للإستقطار
$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$(\lambda-1)^2(\lambda+1)$	1 -1	2 1	1 1	غير قابلة للإستقطار

بالرجوع للجدول أعلاه نلاحظ مايلي :

(١) التعدد الهندسي أقل من أو يساوي التعدد الجبري لكل من القيم المميزة للمصفوفات الثلاث .

(٢) في حالة المصفوفات القابلة للاستقطار نجد أن التعدد الجبري = التعدد الهندسي وأن مجموع هذه التعددات (الهندسية أو الجبرية) يساوي درجة المصفوفة .

(٣) في حالة المصفوفات غير قابلة للاستقطار نجد أن مجموع التعددات الهندسية أقل من درجة المصفوفة .

إن جميع الملاحظات السابقة صحيحة بصورة عامة وسنبرهن الملاحظة الثانية والتي تعتمد على المبرهنة التالية التي نقدمها دون برهان .

مبرهنة (٩ ، ٧)

التعدد الهندسي لأي قيمة مميزة لمصفوفة A أقل من أو يساوي تعددها الجبري . ♦

مبرهنة (١٠ ، ٧)

لتكن A مصفوفة من الدرجة n ولتكن

$h(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\ldots(\lambda-\lambda_k)^{m_k}$ كثيرة الحدود المميزة حيث

$\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k$ هي القيم المميزة المختلفة للمصفوفة A . وليكن $d_i=\dim\left(E_{\lambda_i}\right)$

هو التعدد الهندسي للقيمة المميزة λ_i . عندئذ العبارات التالية جمعيها متكافئة :

(١) A قابلة للاستقطار .

(٢) $d_1+d_2+\ldots+d_k=n$.

(٣) $d_i=m_i$ لكل $i=1,2,\ldots,k$.

البرهان

(١) ⇐ (٢) : بما أن A قابلة للاستقطار فإنه باستخدام المبرهنة (٧ ، ٧) يوجد n من المتجهات المميزة المستقلة خطياً للمصفوفةA كل منها يقابل قيمة مميزة واحدة λ_i . لنفرض أن عدد المتجهات المميزة التي تنتمي إلى E_{λ_i} هو t_i . عندئذٍ $t_i\le\dim\left(E_{\lambda_i}\right)=d_i$ لكل $i=1,\ldots,k$. ولذا فإن :

$n=t_1+t_2+\ldots+t_k\le d_1+d_2+\ldots+d_k$. ولكن باستخدام المبرهنة (١ ، ٧) نجد أن مجموعة جميع المتجهات المميزة للقيم المميزة المختلفة $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k$ مستقلة خطياً . إذن ، $d_1+d_2+\ldots+d_k\le n$. وبالتالي فإن $d_1+d_2+\ldots+d_k=n$.

(٢) ⇐ (٣) : باستخدام المبرهنة (٩ ، ٧) نجد $d_i\le m_i$ لكل $i=1,2,\ldots,k$ وباستخدام (٢) نجد أن :

$$n=d_1+\ldots+d_k\le m_1+m_2+\ldots+m_k=\deg\left(h(\lambda)\right)=n .$$

ومنه فإن $d_1+d_2+\ldots+d_k=m_1+m_2+\ldots+m_k$. وبما أن $d_i\le m_i$ فإننا نجد أن $d_i=m_i$ لكل $i=1,2,\ldots,k$.

(٣) $\Leftarrow$ (١) : لـنفرض أن B_i أسـاس للفضـاء المميـز E_{λ_i} لكـل $i = 1, \dots, k$. لنفرض أن B هي مجموعة المتجهات التي ينتمي كل من عناصرها إلى واحدة من المجموعات B_i على الأقل . عندئذٍ B مستقلة خطياً وتحتوي على $d_1 + d_2 + \cdots + d_k$ من المتجهات . وبما أن $d_i = m_i$ فإن $d_1 + d_2 + \ldots + d_k = m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n$. ولذا فإن A قابلة للاستقطار . ♦

ملحوظة

لمعرفة ما إذا كانت المصفوفة A قابلة للإستقطار أم لا يكفي من أن نتحقق من $d_i = m_i$ لكل i وذلك باستخدام المبرهنة (١٠ ، ٧) ولكن من ناحية أخرى نعلم أن بعد الفضاء المميز E_i هو d_i والذي بدوره يساوي بعد فضاء الحل للنظام $(\lambda_i I - A)X = 0$. ولما كان بعد فضاء الحل للنظام $(\lambda_i I - A)X = 0$ يساوي $n - \text{rank}(\lambda_i I - A)$ فإننا نخلص إلى أنه لمعرفة قابلية الإستقطار للمصفوفة A يكفي التحقق من أن $m_i = n - \text{rank}(\lambda_i I - A)$ لكل i . وعليه فإن الخوارزمية التالية تفيد في بيان ما إذا كانت المصفوفة A قابلة للإستقطار أم لا :

(١) عين القيم المميزة للمصفوفة A .

(٢) إذا كانت $m_i \neq n - \text{rank}(\lambda_i I - A)$ فإن المصفوفة غير قابلة للإستقطار وهنا نتوقف .

(٣) إذا كانت $m_i = n - \text{rank}(\lambda_i I - A)$ لكل i فإن المصفوفة قابلة للإستقطار .

(٤) عين أساسات الفضاءات المميزة $B = \{ X_1, X_2, \dots, X_n \}$.

(٥) ضع $P = [X_1 | X_2 | \dots | X_n]$ وعندئذٍ فإن $P^{-1}AP$ هي المصفوفة القطرية المطلوبة .

لاحظ أنه للتحقق من قابلية A للإستقطار من عدمها يكفي التحقق من العلاقة في الخطوة (٢) للقيم المميزة التي تكرارها أكبر من 1 .

مثال (١٤ ، ٧)

ابحث قابلية استقطار المصفوفة A وإذا كانت قابلة للاستقطار فعين المصفوفة P التي

تجعل $P^{-1}AP$ قطرية حيث $A=\begin{bmatrix} 5 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

الحل

بما أن المصفوفة A مثلثية فإن القيم المميزة هي عناصر القطـــر الرئيســي وهي

$\lambda_1=5$, $\lambda_2=3$, $\lambda_3=\lambda_4=2$. الآن : بما أن

$$\begin{aligned} n-\operatorname{rank}(5I-A) &= 4-3=1=m_1 \\ n-\operatorname{rank}(3I-A) &= 4-3=1=m_2 \\ n-\operatorname{rank}(2I-A) &= 4-2=2=m_3 \end{aligned}$$

حيث m_i هو تكرار λ_i فإن A قابلة للإستقطار . ولإيجاد أساس للفضاء المميز E_5

نجد حل النظام $(5I-A)X=0$. وهذا النظام يأخذ الصيغة :

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & -9 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

وباستخدام طريقة جاوس نجد أن هذا النظام يكافيء :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ومنه نجد أن $x_2=x_3=x_4=0$ ، وبوضع $x_1=1$ نجد أن $[1,0,0,0]^T$ أساس للفضاء E_5 . وبالمثل نجد أن $[3,2,0,0]^T$ أساس للفضاء E_3 . وأن

$\{[-1,-1,1,0]^T,[-1,2,0,1]^T\}$ أساس للفضاء E_2 . ولذا فإن A قابلة

للاستقطار وأن $P=\begin{bmatrix}1&3&-1&-1\\0&2&-1&2\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$. □

مثال (١٥ ، ٧)

ابحث قابلية المصفوفة A للإستقطار حيث $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$.

الحل

القيم المميزة للمصفوفة هي $\lambda_1=1$ (مكرر مرتين) و $\lambda_2=0$. الآن عندما $\lambda=1$ فإن

$I-A=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ وبالتالي فإن $n-\text{rank}(I-A)=3-2=1\neq 2$ وعليه فإن A

غير قابلة للإستقطار . □

تمارين (٢ ، ٧)

في التمارين من (١) إلى(٣) استخدم العلاقة $A=PDP^{-1}$ لحساب قوى A المعطاة

(١) $P=\begin{bmatrix}5&7\\2&3\end{bmatrix}$ ، $D=\begin{bmatrix}2&0\\0&1\end{bmatrix}$ ، احسب A^4 .

(٢) $P=\begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، $D=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، احسب A^{13} .

(٣) $P=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، $D=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ ، احسب A^4 .

في التمارين من (٤) إلى (١٩) بين فيما إذا كانت المصفوفة A قابلة للاستقطار وفي حالة كونها كذلك عين مصفوفة P بحيث تكون $P^{-1}AP$ قطرية .

(٤) $A=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ (٥) $A=\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

(٦) $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ (٧) $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$.

(٨) $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (٩) $A=\begin{bmatrix} 2 & -6 & -6 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & -6 & -7 \end{bmatrix}$.

(١٠) $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ (١١) $A=\begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

(١٢) $A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$. (١٣) $A=\begin{bmatrix} 7 & 4 & 16 \\ 2 & 5 & 8 \\ -2 & -2 & -5 \end{bmatrix}$.

(١٤) $A=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ (١٥) $A=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

(١٦) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ (١٧) $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

(١٨) $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ (١٩) $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$.

(٢٠) إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 6 & 6 & 5 \\ -6 & -6 & -5 \end{bmatrix}$ فأثبت أن A قابلة للاستقطار ثم عين P بحيث

تكون $P^{-1} P A$ قطرية ، كذلك عين مصفوفة B بحيث يكون $B^2 = A$.

(٢١) إذا كانت A لها معكوس قابلة للاستقطار فاثبت A^{-1} أن قابلة للاستقطار .

(٢٢) إذا كانت A قابلة للاستقطار فأثبت أن A^T قابلة للاستقطار.

(٢٣) إذا كانت A قابلة للاستقطار فأثبت أن A^k كذلك لكل عدد صحيح موجب k .

(٢٤) إذا كانت كل من A و B مصفوفة من الدرجة حيث B لها معكوس و $A B$ قابلة للاستقطار فأثبت أن $B A$ قابلة للاستقطار .

(٢٥) أثبت أن المصفوفة $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ قابلة للإستقطار إذا كان $(a-d)^2 > -4bc$

وغير قابلة للإستقطار إذا كان $(a-d)^2 < -4bc$.

(٢٦) إذا كانت A مصفوفة قابلة للإستقطار ولها القيم المميزة $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$

فأثبت أن $\det A = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$.

(٢٧) إذا كانت A مصفوفة غير صفرية متلاشية القوى فأثبت أن A غير قابلة للاستقطار.

(٣ ، ٧) استقطار المصفوفات المتماثلة
Diagonalization of Symmetric Matrices

لقد تناولنا في البند السابق استقطار المصفوفات المربعة بصفة عامة . في هذا البند نركز اهتمامنا على نوع خاص من المصفوفات المربعة هي المصفوفات المتماثلة وذلك نظراً لسهولة معالجتها أولاً ثم وجود تطبيقات عديدة لها . تمتع المصفوفات المتماثلة بخاصية هامة جداً وهي أن جميع قيمها المميزة حقيقية كذلك تنفرد المصفوفات المتماثلة بخاصية أخرى جميلة وهي مبرهنة المحاور الرئيسة والتي تثبت لنا أن جميع المصفوفات المتماثلة قابلة للاستقطار حيث المصفوفة القابلة للعكس P التي تجعل $P^{-1}AP$ مصفوفة قطرية لها صفة خاصة . لقد قدمنا في البند (٤ ، ١) تعريف المصفوفة المتماثلة ودرسنا خواصها الأساسية ونذكر القارىء بأن المصفوفة المربعة A تكون متماثلة إذا كانت $A^T = A$.

مبرهنة (١١ ، ٧)

لتكن A مصفوفة مربعة من الدرجة n . وليكن $\mathbb{R}^n$ فضاء الضرب الاقليدي . عندئذ $\langle A\mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{v}, A^T\mathbf{u} \rangle$ لكل $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. وعلى وجه الخصوص إذا كانت A مصفوفة متماثلة فإن $\langle A\mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{v}, A\mathbf{u} \rangle$.

البرهان

لاحظ أولاً أن $\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = \mathbf{u}^T\mathbf{v} = \mathbf{v}^T\mathbf{u}$. ولذا فإن :

$$\langle A\mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = (A\mathbf{v})^T\mathbf{u} = \mathbf{v}^T A^T\mathbf{u} = \mathbf{v}^T(A^T\mathbf{u}) = \langle \mathbf{v}, A^T\mathbf{u} \rangle \ . \ \blacklozenge$$

تساعدنا المبرهنة (١١، ٧) على إثبات الخاصية الهامة التالية للمصفوفات المتماثلة.

مبرهنة (١٢ ، ٧)

إذا كـان $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ متجهين مميزين للمصفوفة المتماثلة A يقابلان القيمتين المميزتين المختلفتين λ و μ على التوالي فإن $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ متعامدان في فضاء الضرب الإقليدي R^n .

البرهان

بما أن $A\mathbf{u} = \lambda\,\mathbf{u}$ وأن $A\mathbf{u} = \mu\,\mathbf{v}$ فإن :

$\lambda\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \langle \lambda\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \langle A\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{u}, A\mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{u}, \mu\mathbf{v}\rangle = \mu\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$. ولذا فإن $(\lambda - \mu)\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = 0$. وبما أن $\lambda \neq \mu$ فإن $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = 0$. وبالتالي فإن $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ متعامدان . ♦

مبرهنة (١٣ ، ٧)

إذا كانت A مصفوفة متماثلة من الدرجة n فإن جميع قيمها المميزة حقيقية .

البرهان

لنفرض أن λ قيمة مميزة للمصفوفة A تقابل المتجه المميز X . عندئذٍ ، $AX = \lambda X$ بأخذ المرافق ثم المنقول للطرفين نحصل على $(\overline{X})^T(\overline{A})^T = \overline{\lambda}(\overline{X})^T$. ولذا فإن $(\overline{X})^T A = \overline{\lambda}(\overline{X})^T$. ومنه فإن $(\overline{X})^T AX = \overline{\lambda}(\overline{X})^T X$. ولكن $AX = \lambda X$. ولذا فإن

$$\lambda(\overline{X})^T X = \overline{\lambda}(\overline{X})^T X . \qquad (١)$$

الآن ، إذا كان $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ فإن

$$(\overline{X})^T X = \overline{x}_1 x_1 + \overline{x}_2 x_2 + \cdots + \overline{x}_n x_n = |x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2 \neq 0 .$$

وبالتالي فإننا نحصل من (١) على $\lambda = \overline{\lambda}$. وعليه فإن λ عدد حقيقي . ♦

لقد عرفنا في البند (٤ ، ١) المصفوفة الحقيقية المتعامدة بأنها المصفوفة التي لها معكوس A و تحقق $A^{-1} = A^T$.

تعريف (٦ ، ٧)

نقول إن المصفوفة المربعة A قابلة للاستقطار عمودياً (orthogonally diagonalizable) إذا وجدت مصفوفة متعامدة P بحيث تكون $P^{-1}AP = P^{T}AP$ مصفوفة قطرية .

قبل أن نقدم الشروط اللازمة والكافية التي تجعل مصفوفة A قابلة للاستقطار عمودياً نحتاج الى المبرهنة التالية :

مبرهنة (١٤ ، ٧)

لتكن A مصفوفة مربعة من الدرجة n . عندئذ A مصفوفة متعامدة إذا وفقط إذا كانت صفوف A مجموعة متعامدة عيارية في فضاء الضرب الإقليدي $\mathbb{R}^n$.

البرهان

لنفرض أن $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ هي صفوف المصفوفة A . لاحظ أن :

$$A A^{T} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle & \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle \cdots \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_n \rangle \\ \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 \rangle & \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 \rangle \ldots \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_n \rangle \\ & \vdots \\ \langle \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_1 \rangle & \langle \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_2 \rangle \ldots \langle \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_n \rangle \end{bmatrix}$$

ولذا فإن A متعامدة إذا وفقط إذا كان $AA^{T} = I$. أي أن A متعامدة إذا وفقط إذا كان $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle = 1$ لكل $i = 1, \ldots, n$ و $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = 0$ لكل $i \neq j$. وبالتالي فإن A متعامدة إذا وفقط إذا كانت $\{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \}$ مجموعة متعامدة عيارية . ♦

ملحوظة

لاحظ أن A مصفوفة متعامدة إذا وفقط إذا كانت A^{T} مصفوفة متعامدة أيضاً . وبما أن صفوف A^{T} هي أعمدة A فإننا نحصل على النتيجة التالية مباشرة من المبرهنة (١٤ ، ٧) .

نتيجة (١٥ ، ٧)

تكون المصفوفة المربعة من الدرجة n متعامدة إذا وفقط إذا كانت أعمدة A مجموعة متعامدة عيارية في فضاء الضرب الإقليدي $\mathbb{R}^n$. ♦

المبرهنة التالية تضمن لنا تساوي التعدد الجبري والتعدد الهندسي للمصفوفة المتماثلة والتي نقدمها دون برهان .

مبرهنة (١٦ ، ٧)

إذا كانت A مصفوفة متماثلة فإن التعدد الجبري لأي قيمة مميزة يساوي التعدد الهندسي لها . ♦

مبرهنة (١٧ ، ٧) [مبرهنة المحاور الرئيسة principal axes theorem]

لتكن A مصفوفة مربعة من الدرجة n . عندئذ العبارات التالية جميعها متكافئة :

(١) A قابلة للاستقطار عمودياً .

(٢) يوجد للمصفوفة A متجهات مميزة متعامدة عيارياً عددها n في فضاء الضرب الأقليدي $\mathbb{R}^n$.

(٣) A مصفوفة متماثلة .

البرهان

(١) ⇐ (٢) : لنفرض أن A قابلة للاستقطار عمودياً . عندئذٍ توجد مصفوفة متعامدة P بحيث تكون $P^{-1}AP$ مصفوفة قطرية . باستخدام المبرهنة (٧ ، ٧) نجد أن أعمدة P هي متجهات مميزة للمصفوفة A . وبما أن P متعامدة فإننا نجد

باستخدام النتيجة (١٥ ، ٧) أن هذه الأعمدة مجموعة متعامدة عيارية في فضاء الضرب الأقليدي $\mathbb{R}^n$.

(٢) ⇐ (٣) : لنفرض أن $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ هي المتجهات المميزة للمصفوفة A والمتعامدة عيارياً في الفضاء الأقليدي $\mathbb{R}^n$. باستخدام المبرهنة (٧ ، ٧) نجد أن المصفوفة $P = [\mathbf{v}_1 \mid \mathbf{v}_2 \mid \dots \mid \mathbf{v}_n]$ تستقطر A . وبما أن هذه المتجهات متعامدة نجد أن P مصفوفة متعامدة ولذا فإن P تستقطر عمودياً A ومنه فإن $D = P^{-1}AP$ مصفوفة قطرية . ولذا فإن $A = PAP^{-1} = PDP^{T}$. ومن ثم فإن :

$A^T = \left(PDP^T\right)^T = PD^T P^T = PDP^T = A$ وبالتالي فإن A مصفوفة متماثلة .

(٣) ⇐ (١) : لنفرض أن A مصفوفة متماثلة من الدرجة n ولنفرض أن $h(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \dots (\lambda - \lambda_k)^{m_k}$ هي كثيرة الحدود المميزة للمصفوفة A . باستخدام المبرهنة (١٦ ، ٧) نجد أن $\dim E_{\lambda_i} = m_i$ لكل $i = 1, \cdots, k$. الآن لكل i عين أساساً للفضاء المميز E_{λ_i} ، ثم استخدم طريقة جرام - شميت لإيجاد أساس متعامد عياري B_i للفضاء E_{λ_i} . ضع $B = \bigcup_{i=1}^{k} B_i$. إذن ، B أساس للفضاء $\mathbb{R}^n$. وباستخدام المبرهنة (١٢ ، ٧) نجد أن B أساس متعامد . الآن لتكن P هي المصفوفة التي أعمدتها عناصر الأساس B . إذن ، P مصفوفة متعامدة تستقطر A عمودياً . أي أن $P^{-1}AP = P^TAP$ مصفوفة قطرية . ♦

ملحوظة

تقدم لنا المبرهنة (١٧ ، ٧) خوارزمية لإستقطار المصفوفة المتماثلة A نلخصها بالخطوات التالية :

(١) عين القيم المميزة للمصفوفة A ولتكن $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$.

(٢) عين أساساً للفضاء المميز E_{λ_i} لكل i .

(٣) استخدم طريقة جرام ـ شميت لإيجاد أساس متعامد عياري للفضاء المميز E_{λ_i} لكل i .

(٤) عين المصفوفة P التي أعمدتها الأساسات التي وجدت في الخطوة رقم (٣) .

مثال (١٦ ، ٧)

عين مصفوفة عمودية P التي تجعل $P^T AP$ مصفوفة قطرية حيث $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}$.

الحل

كثيرة الحدود المميزة للمصفوفة A هي :

$h(\lambda) = \lambda^3 - 13\lambda^2 + 36\lambda = \lambda(\lambda - 4)(\lambda - 9)$. وعلية فإن القيم المميزة للمصفوفة A هي $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 9$. وبحل الأنظمة المتجانسة $(\lambda I - A)X = 0$ للقيم المميزة المختلفة نجد أن $X_1 = [4, -1, -1]^T$ أساس للفضاء المميز E_0 ، $X_2 = [0, 1, -1]^T$ أساس للفضاء المميز E_4 و $X_3 = [1, 2, 2]^T$ أساس للفضاء المميز E_9 . ولذا فإن $Y_1 = \dfrac{X_1}{\| X_1 \|} = \dfrac{1}{3\sqrt{2}}[4, -1, -1]^T$

$Y_2 = \dfrac{X_2}{\| X_2 \|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}[0, 1, -1]^T$ و $Y_3 = \dfrac{X_3}{\| X_3 \|} = \dfrac{1}{3}[1, 2, 2]^T$.

اساسات متعامدة عيارية للفضاءات E_0 ، E_4 و E_9 على التوالي . إذن ،

$$P=\begin{bmatrix} \frac{4}{3\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ \frac{-1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

مصفوفة عمودية بحيث أن $P^{-1}AP=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$. □

مثال (١٧ ، ٧)

عين مصفوفة عمودية P التي تجعل $P^{T}AP$ مصفوفة قطرية حيث

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} .$$

الحل

كثيرة الحدود المميزة للمصفوفة A هي :

$h(\lambda)=\lambda^3-3\lambda^2+4=(\lambda+1)(\lambda-2)^2$. ولذا فإن $\lambda_1=-1$ و $\lambda_2=\lambda_3=2$ هي القيم المميزة للمصفوفة A . وبحل الأنظمة $(\lambda I-A)X=0$ للقيم الميزة نجد أن

$X_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ اساس للفضاء E_{-1} وأن $\left\{ X_2=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} , X_3=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ أساس للفضاء

E_2 . وباستخدام طريقة جرام ـ شميت نجد أن $Y_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ أساس متعامد عياري

للفضاء E_{-1} . وأن $\left\{Y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix},\ Y_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}\right\}$

أساس متعامد عياري E_2 . إذن $P = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$

مصفوفة متعامدة بحيث أن $P^T A P = \begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$. □

تمارين (٣ ، ٧)

في التمارين من (١) إلى (٧) عين مصفوفة متعامدة P التي تجعل $P^T AP$ مصفوفة قطرية .

(١) $A = \begin{bmatrix}3 & 1\\1 & 3\end{bmatrix}$　　(٢) $A = \begin{bmatrix}6 & -2\\-2 & 3\end{bmatrix}$

(٣) $A = \begin{bmatrix}7 & -2 & -1\\-2 & 10 & 2\\-1 & 2 & 7\end{bmatrix}$　　(٤) $A = \begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 1 & 2\\-1 & 2 & 5\end{bmatrix}$

(٥) $A=\begin{bmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ (٦) $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(٧) $A=\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

(٨) إذا كانت كل من A و B مصفوفة متماثلة فأثبت أن $A+B$ مصفوفة متماثلة .

(٩) إذا كانت A مصفوفة متماثلة فأثبت أن A^T مصفوفة متماثلة .

(١٠) إذا كانت A مصفوفة متماثلة فأثبت أن $A^T A$ مصفوفة متماثلة .

(١١) إذا كانت A مصفوفة متماثلة ولها معكوس فأثبت أن A^{-1} مصفوفة متماثلة .

(١٢) إذا كانت A مصفوفة متعامدة فأثبت أن $\det(A)=\pm 1$.

(١٣) إذا كانت n مصفوفة مربعة وكانت $A^2=I$ فأثبت أن A مصفوفة متماثلة إذا وفقط إذا كانت A مصفوفة متعامدة .

(١٤) إذا كانت A و B متشابهتين عمودياً فأثبت أن A^2 و B^2 متشابهتان عمودياً.

(١٥) إذا كانت A مصفوفة من الدرجة n فأثبت أن $A^T AX=0$ إذا وفقط إذا كان $AX=0$.

(١٦) إذا كانت P مصفوفة متعامدة من الدرجة n فأثبت أن $\| PX \| = \| X \|$ لكل $X \in \mathbf{R}^n$.

(٤ ، ٧) استقطار المؤثرات الخطية

Diagonalization of Linear Operators

بعد أن تناولنا مسألة استقطار المصفوفات المربعة ننتقل إلى مسألة استقطار المؤثرات الخطية .

تعريف (٧ ، ٧)

ليكن $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ مؤثراً خطياً وليكن B أساساً للفضاء $\mathbf{V}$. نقول أن T قابل للإستقطار إذا كانت المصفوفة $[\,T\,]_B$ قطرية .

المبرهنة التالية تبين لنا متى يكون المؤثر الخطي قابلاً للإستقطار .

مبرهنة (١٨ ، ٧)

ليكن $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ مؤثر خطي . عندئذٍ يكون T قابلاً للإستقطار إذا وفقط إذا وجد أساس B للفضاء $\mathbf{V}$ يتكون من المتجهات المميزة للمؤثر T . وعلاوة على ذلك فإن عناصر المصفوفة القطرية $[\,T\,]_B$ هي القيم المميزة للمؤثر T .

البرهان

لنفرض أولاً أن T قابل للإستقطار وأن $B = \{\, \mathbf{v}_1 , \dots , \mathbf{v}_n \,\}$ أساس للفضاء $\mathbf{V}$. إذن

$$[\,T\,]_B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

. ومنه فإن العمود j من المصفوفة $[\,T\,]_B$ ما هو إلا $[\,T(\,\mathbf{v}_j\,)]_B$ ولذا فإن $T(\mathbf{v}_j) = \lambda_j \, \mathbf{v}_j$. ومن ثم فإن $\mathbf{v}_j$ متجه مميز للمؤثر الخطي T وأن λ_j القيمة المميزة المقابلة للمتجه المميز $\mathbf{v}_j$ وذلك لكل j . ومن ناحية أخرى ، لنفرض أن $B = \{\, \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 , \dots , \mathbf{v}_n \,\}$ أساس للفضاء $\mathbf{V}$ بحيث إن $T(\mathbf{v}_j) = \lambda_j \, \mathbf{v}_j$.

إذن $[T(\mathbf{v}_i)]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \lambda_i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ وبالتالي فإن $[T]_B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$.

أي أن T قابل للإستقطار . ♦

مثال (١٨ ، ٧)

بين فيما إذا كان المؤثر الخطي $T:\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ المعرف بالقاعدة $T(x,y,z)=(3x-2z,y,x)$ قابلاً للإستقطار .

الحل

لنفرض أنB هو الأساس المعتاد للفضاء $\mathbf{R}^3$ ،عندئذٍ، $A=[T]_B=\begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

كثيرة الحدود المميزة للمصفوفة A هي $h(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$. ولذا فإن $\lambda_1=\lambda_2=1$ و $\lambda_3=2$ هي القيم المميزة . وبحل الأنظمة المتجانسة $(\lambda I-A)X=0$ لقيم λ المختلفة نجد أن $\{X_1=[1,0,1]^T, X_2=[0,1,0]^T\}$ أساس للفضاء المميز E_1 وأن $X_3=[2,0,1]^T$ أساس للفضاء المميز E_2 . إذن $\dim E_1+\dim E_2=3$. ولذا فإن A قابلة للاستقطار ومن ثم فإن T قابل للاستقطار وأن $P=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ هي المصفوفة التي تحقق $P^{-1}AP=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. □

مثال (١٩ ، ٧)

ابحث قابلية المؤثر الخطي $T:\mathbf{P}_2 \to \mathbf{P}_2$ للاستقطار حيث T معرف بالقاعدة :

. $T\left(a+bx+cx^{2}\right)=\left(3c-4a\right)+2bx+\left(2a+b+c\right)x^{2}$

الحل

لنفرض أن $B=\left\{1,x,x^{2}\right\}$ أساس $\mathbf{P}_2$ المعتاد .

عندئذٍ، $A=\left[T\right]_B=\begin{bmatrix}-4&0&3\\0&2&0\\2&1&1\end{bmatrix}$. كثيرة الحدود للمصفوفة A هي

$h\left(\lambda\right)=\left(\lambda-2\right)^{2}\left(\lambda+5\right)=0$. ولذا فإن $\lambda_1=\lambda_2=2$ و $\lambda_3=-5$ هي قيم A المميزة . الآن ، $\operatorname{rank}\left(2I-A\right)=2$. ومنه فإن :

$n-\operatorname{rank}\left(2I-A\right)=3-2=1\neq 2$. وبالتالي فإن A غير قابلة للإستقطار ومن ثم فإن T غير قابل للإستقطار . □

تمارين (٤ ، ٧)

في التمارين من (١) إلى (٥) عين القيم المميزة للمؤثر T ثم عين أساساً C بحيث أن $[T]_C$ مصفوفة قطرية ثم أحسب $[T]_C$.

(١) $T:\mathbb{R}^{2}\to\mathbb{R}^{2}$ المعرف بالقاعدة : $T\left(x,y\right)=\left(3x+4y,4x-3y\right)$.

(٢) $T:\mathbf{R}^{2}\to\mathbf{R}^{2}$ المعرف بالقاعدة : $T\left(x,y\right)=\left(5x-3y,x+y\right)$.

(٣) $T:\mathbf{R}^{3}\to\mathbf{R}^{3}$ المعرف بالقاعدة :

$T\left(x,y,z\right)=\left(-x+4y-2z,-3x+4y,-3x+y+3z\right)$.

(٤) $T:\mathbb{R}^{3}\to\mathbb{R}^{3}$ المعرف بالقاعدة :

$T\left(x,y,z\right)=\left(-7x-9y+3z,2x+4y-2z,-3x-3y-z\right)$.

(٥) $T:\mathbb{R}^{3}\to\mathbf{R}^{3}$ المعرف بالقاعدة :

$T\left(x,y,z\right)=\left(-2z,x+2y+z,x+3y\right)$.

(٦) ليكن $T:\mathbf{R}^{2}\to\mathbf{R}^{2}$ المؤثر المعرف بالقاعدة $T\left(x,y\right)=\left(x+2y,2x+y\right)$.

عين أساساً C بحيث تكون $[T]_C$ مصفوفة قطرية ثم استخدم $[T]_C$ لحساب $T^5(2,-1)$.

(٧) بين ما إذا كان كل مؤثر خطي $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ قابلاً للإستقطار أم لا وإذا كان قابلاً للإستقطار فعين الأساس C بحيث تكون $[T]_C$ قطرية .

(أ) $T(x,y,z)=(x-2y+2z,2x-y+2z,2x-2y+3z)$.

(ب) $T(x,y,z)=(-x+2y+2z,-2x+y+2z,-2x+2y+3z)$.

(جـ) $T(x,y,z)=(x+2y+2z,2x+y+2z,2x+2y+3z)$.

(٨) إذا كان $T:\mathbf{P}_2 \to \mathbf{P}_2$ المؤثر الخطي المعرف بالقاعدة :

$T(a+bx+cx^2)=(5a+6b-2c)-(b+8c)x+(a-2c)x^2$. فعين القيم المميزة وأساسات للفضاءات المميزة . هل T قابل للاستقطار ؟

(٩) أعد التمرين (٨) للمؤثر الخطي $T:\mathbf{M}_{22} \to \mathbf{M}_{22}$ المعرف بالقاعدة :

$$T\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2c & a+c \\ b-2c & d \end{bmatrix}.$$

(١٠) أعد التمرين (٨) للمؤثر الخطي $T:\mathbf{M}_{22} \to \mathbf{M}_{22}$ المعرف بالقاعدة :

$T(A)=A^T$.

(١١) أثبت أن كلاً من المؤثرين الخطيين التاليين غير قابل للاستقطار :

(أ) $T:\mathbf{M}_{22} \to \mathbf{M}_{22}$ المعرف بالقاعدة $T\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a+3b & 2a+2b+d \\ 4c & c-d \end{bmatrix}$.

(ب) $T:\mathbf{P}_2 \to \mathbf{P}_2$ المعرف بالقاعدة :

$T(a+bx+cx^2)=(3c-4a)+2bx+(2a+b+c)x^2$.