الباب الثانى

حل المعادلات الخطية

SOLVING LINEAR EQUATIONS

تظهر المعادلات الخطية Linear Equations كمشكلة رياضية فى كثير من التطبيقات الرياضية ، وغالباً ما تنتهى إليها مشاكل معقدة بعد تيسيرها بإستعمال طرق رياضية وخاصةً فى استعمال الطرق العددية لحل المعادلات التفاضلية بطريقة العناصر المحددة Finite Elements أو طريقة الفروق المحددة Finite Differences . كما تظهر فى كثير من العلوم مثل علم الجبر الخطى والمصفوفات بشكل خاص .

(٢-١) تعريف بالمشكلة :

باختصارٍ شديد ، هى مشكلة إيجاد حل لعدة مجاهيل مثل $x_1 , x_2 , x_3 , ... , x_n$ فى فراغ معين وتكون المعادلات المستعملة لإيجاد الحل فى صورة خطية Linear ، أى أن المتغيرات $x_1 , x_2 , x_3 , ... , x_n$ تظهر فى المعادلات دون دخول أى دوال عليها مثل التربيع - الجذر - الجيب - ..... إلخ . والصورة العامة لهذه المعادلات (فى حالة n من المعادلات) هى :

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots\dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots\dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots\dots\dots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}
$$

وفى الصورة المصفوفية :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .. \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ .. \\ b_n \end{bmatrix}$$

وفى الصورة الرمزية :

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

حيث :

$$\underline{x}\,,\,\underline{b} \in \Re^n \text{ or } C^n$$

$$A \quad \in \Re^{nxn} \text{ or } C^{nxn}$$

و $\Re$ هو فضاء الأعداد الحقيقية و C هو فضاء الأعداد المركبة . فتكون المشكلة موصوفة كالآتى :

> معطى $(A \in \Re^{nxn} \text{ or } C^{nxn})$ ومُعطى $\underline{b} \in \Re^n$ أو C^n فأوجد $\underline{x}$ ($\underline{x} \in \Re^n$ أو C^n) التى تحقق :
>
> $$A\underline{x} = \underline{b}$$

وقد أخذ الطالب هذه المشكلة فى صورتها الخاصة وتعرف على حلها آنياً Simultaneously كالآتى :

(٢-١-١) معادلة خطية فى مجهول :

فمثلا :

$$ax = b \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \frac{b}{a}$$

تحت شرط أن $a \neq 0$.

(٢-١-٢) معادلتان خطيتان فى مجهولين :

مثل :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

ولحل هذه المسألة ، نوجد x_1 من المعادلة الأولى :

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2)$$

ثم نعوض بها فى الثانية :

$$\frac{a_{21}}{a_{11}}(b_1 - a_{21}x_2) + a_{22}x_2 = b_2$$

وبذلك تصبح معادلة واحدة فى مجهول واحد x_2 :

$$(a_{11}\, a_{22} - a_{21}\, a_{12})x_2 = a_{11}\, b_2 - a_{21}\, b_1$$

أى أن :

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{21}b_{12}}$$

تحت شرط أن $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$

وفى الصورة المصفوفية :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

تحت شرط أن :

$$a_{11} \neq 0 \quad , \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

يكون :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

أو عامة :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

ربما نميل إلى التعميم مبكرا ونقول :

$$Ax = b \quad \Rightarrow \quad x = A^{-1} b \quad , \quad A^{-1} \exists \text{ or } |A| \neq 0$$

أى أن شرط وجود حل وحيد **Unique Solution** هو أن تكون مصفوفة المعاملات A غير شاذة **Non-singular** وذلك يتأتى عندما لا تتلاشى محددتها (أى $|A| \neq 0$) .

وهناك حالات أخرى جديرة بالدراسة مثل أن يكون عدد المعادلات أقل من عدد المجاهيل أو أن يكون عدد المعادلات أكبر من عدد المجاهيل .. ويلعب ما يُسمى برتبة المصفوفة Rank دوراً كبيرا فى دراسة إمكانية وجود حل من عدمه .. وفى حالة وجود حل، هل هو حل وحيد أم عدد لا نهائى من الحلول . وأُذكر أن الموقف هنا فى علم التحليل العددى لا يحتمل مثل هذه الدراسة ، غير أن أقول أن طرق إيجاد الحلول لمثل هذه المعادلات تنقسم إلى طريقتين : الأولى تسمى بالمباشرة **Direct** ومنها طريقة إيجاد المعكوس A^{-1} (فى حالة مصفوفة مربعة) أو طريقة جاوس Gauss أو طريقة جاوس – جوردان Gauss-Jordan . أما الثانية فتُسمى بغير المباشرة **Indirect** مثل طريقة جاكوبى Jacobi أو طريقة جاوس – سيدل Gauss-Seidel . وهناك بالطبع عدد كبير من الطرق ولكننا سنكتفى بالطرق المذكورة آنفا مبسطين الموضوع ما أمكن .

(٢-٢) الطرق المباشرة DIRECT METHODS :

وهى طرق تحليلية أكثر منها عددية ويمكن حساب القيم الحقيقية للمجاهيل بدقة عالية فى الحالات البسيطة ($n \le 3$) ولكننا لا نضمن الدقة بعد ذلك إذا ما تعددت المجاهيل وبالتالى زادت عمليات الضرب والقسمة والجمع والطرح وازدادت أخطاء التدوير والتقريب والاقتطاع .. ويجب أن نحسب هذه الأخطاء وتأثيرها على دقة الحل Solution Accuracy.

(٢-٢-١) طريقة جاوس Gauss Method :

فى هذه الطريقة يتم استعمال حذف الصفوف أو عمليات الصفوف البسيطة Elementary Row Operations لجعل المصفوفة A مكافئة Equivalent لأحد صور المصفوفة المثلثية Triangular Matrix . أى استخدام عمليات الصف البسيط للوصول إلى :

(i) مصفوفة مثلثية عليا Upper Triangular Matrix

$$A \sim \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3(n-1)} & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{(n-1(n-1))} & a_{(n-1)n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$a_{ij} = 0 \ \forall i > j$$

(ii) مصفوفة مثلثية سفلى Lower Triangular Matrix

$$A \sim \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & a_{(n-1)3} & \dots & a_{(n-1)(n-1)} & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{n\,(n-1)} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$a_{ij} = 0 \ \forall i < j$$

وعمليات الصف البسيطة لا تؤثر فى رتبة المصفوفة ولكنها تنتج مصفوفة مكافئة (أى لها نفس الرتبة) ولكنها أسهل فى الصورة (من وجهة نظر المعادلات) .

مثال توضيحى بسيط :

خذ مثلا نظم المعادلات الخطية الآتى :

$$x_1 - x_2 = 2$$

$$2x_1 - 3x_2 = 10$$

فإنه من الممكن عمل الآتى :

(i) ضرب المعادلة الأولى فى (2-) :

$$-2x_1 + 2x_2 = -4$$

$$2x_1 - 3x_2 = 10$$

(ii) وبجمع المعادلتين الناتجتين :

$$-x_2 = 6 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -6$$

وتكون المعادلتان الناتجتان هما :

$$-2x_1 + 2x_2 = -4$$
$$- x_2 = 6$$

أى أن :

$$\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ 10\end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix}-2 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4\\ 6\end{bmatrix}$$

لاحظ أننا وصلنا إلى المصفوفة المثلثية العليا التى يمكن استخدامها الآن فى الحل بأسلوب يسمى الحل بالرجوع Backward كالآتى :

- باستعمال المعادلة الأخيرة نجد أن $x_2 = -6$
- ثم بالتعويض فىا المعادلة التى قبلها (الأولى هنا) نجد أن :

$$-2x_1 - 12 = -4 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -4$$

وبالتالى يكون عمود الحل هو :

$$\underline{x} = \begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4\\ -6\end{bmatrix}$$

ملاحظات هامة :

(i) عملية ضرب الصف ثم جمعه أو طرحه من آخر تُسمى عمليات صف بسيطة ويجب أن تؤدى بخوارزمى Algorithm معين للوصول إلى المصفوفة المكافئة المطلوبة مع عدم نسيان طرفى المعادلة فى حالة الضرب أو القسمة على عددٍ ما .

(ii) يمكن الوصول إلى مصفوفة مثلثية سفلى مكافئة وذلك بضرب طرفى المعادلة $2x_1 - 3x_2 = 10$ فى $\left(-\frac{1}{3}\right)$ لتكون :

$$-\frac{2}{3}x_1 + x_2 = -\frac{10}{3}$$

ثم جمعها على المعادلة الأولى لتصبح $\frac{1}{3}x_1 = -\frac{4}{3}$. أى أن النظم المكافئ يصبح كالآتى :

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} \\ -\frac{10}{3} \end{bmatrix}$$

ثم نستعمل طريقة الحل بالتقدم Forward كالآتى :

- باستعمال المعادلة الأولى فى هذا النظم الأخير نجد أن

$$\frac{1}{3}x_1 = -\frac{4}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = -4$$

- ثم بالتعويض فى المعادلة التى تليها (الثانية هنا) نجد أن :

$$\left(-\frac{2}{3}\right)(-4) + x_2 = -\frac{10}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = -6$$

(iii) تتعقد الأمور بعض الشئ عند $n = 3$ أو $n = 4$ ولكن يمكن إجراء الحسابات يدوياً على أحسن الأمور . أما أكثر من ذلك فيجب استعمال حاسب آلى Computer ذو سرعة عالية وذاكرة جيدة مستعينين ببرمجة خوارزمى الطريقة Algorithm بأحد لغات البرمجة مثل باسيك BASIC أو فورتران FORTRAN أو باسكال PASCAL وغيرها .

(iv) لا يمكن الاعتماد على جمع وطرح المعادلات فى الحالات المعقدة . وبالتالى يتم إعداد جدول Table تكتب فيه المعاملات وثوابت أخرى ثم ننتقل من صفحة إلى صفحة فى الجدول حتى نصل إلى المعادلات المكافئة التى تُحل بالرجوع أو بالتقدم كما سنتبع فى الأمثلة التالية .

مثال (٢-١) : حل المعادلات : $x + 2y + 3z = 2$, $y + 5z = 3$, $x + 3z = 6$ بأسلوب الرجوع مستخدماً جاوس .

الحل :

يتم إعداد جدول يختصر التعامل بالمعادلات وذلك بتحويل علامة " = " إلى خط رأسي يفصل بيت جهتين : يمنى ويسرى .. توضع معاملات المتغيرات فى الجهة اليسرى وتوضع الثوابت (الطرف الأيمن للمعادلات) فى الجهة اليمنى من الجدول ، ثم نستعمل عمود يُسمى عمود الاختبار Test Column ويُستعان به فى الكشف على دقة العمليات وصحتها أثناء إجراء عمليات الصف البسيط .

	x	y	z		عمود الإختبار ↓	
صف ارتكاز وعنصر إرتكاز ←	1	2	3	2	4	ص ١
	0	1	5	3	3	
	1	0	3	6	-2	
	1	2	3	2	4	ص ٢
ينزل صف الارتكاز كما هو ←	0	1	5	3	3	
	0	-2	0	4	-6	
	1	2	3	2	4	ص ٣
صف ارتكاز ←	0	1	5	3	3	
الصف الثالث + (2) × الصف الثانى	0	0	10	10	0	

ملاحظات :

(i) تُحسب عناصر عمود الاختبار عن طريق جمع العناصر فى الطرف الأيسر من الصف وجعلها مساوية للجمع فى الجهة اليمنى ويتم هذا الحساب فى الصفحة الأولى (صـ١) من الجدول ، ثم تُعتبر كأحد عناصر الصف المنتمية إليه وتُعامل معاملته فى عمليات الضرب والطرح والجمع والقسمة والإنتقال من صفحة إلى صفحة فى الجدول .

(ii) يجب وضع الصورة المكافئة النهائية المطلوب الوصول إليها . فإذا كان الحل بالرجوع ، تُعتبر الصورة النهائية هى المصفوفة المثلثية العليا $\begin{bmatrix} .. & .. \\ 0 & .. \end{bmatrix}$ وفى حالة الحل بالتقدم تُعتبر الصورة النهائية هى المصفوفة المثلثية السفلى $\begin{bmatrix} .. & 0 \\ .. & .. \end{bmatrix}$ وهذا يؤثر جدا فى اختيار صف الارتكاز Pivot Row . ففى الحالة الأولى نختار الصف الأول ، وفى الحالة الثانية نختار الصف الأخير .

(iii) صف الارتكاز هو الصف الذى نرتكز عليه لجعل جميع العناصر التى أسفل عنصر الارتكاز (الموضوع تحته خطين " = ") أو أعلى ، أصفارا ، على حسب الطريقة .

(iv) كل صفحة فى الجدول هى صورة مكافئة للمعادلات المعطاة وأكثر سهولة من الأصل ومن سابقتها .

(v) الصورة الأخيرة للمعادلات هى الصورة المطلوبة التى هى فى الجهة اليسرى مصفوفة مثلثية عليا أو سفلى حسب الطريقة . ومن الصورة الأخيرة نصل إلى المعادلات :

$$x + 2y + 3z = 2$$

$$y + 5z = 3$$

$$10z = 10$$

وبالرجوع :

$$z = 1$$

$$y = 3 - 5 = -2$$

$$x = 2 - 2(-2) - 3(1) = 2 + 4 - 3 = 3$$

ويكون عمود الحل هو :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

لاحظ أهمية عمود الاختبار فى كل صفحة . فابتداءً من الصفحة الثانية تتم عليه العمليات التى تمت على بقية عناصر الصف وتتغير قيمته من صفحة إلى صفحة . ولكن يجب دائما أن يتساوى مجموع الجهة اليمنى والجهة اليسرى فى كل صف وإلا كان هناك خطأ يجب إعادته وتصحيحه ، فهذا العمود هو كشاف أخطاء Error Detector ويجب عدم تجاهله .. فكل صفحة فى الجدول ستكون خاطئة إذا كان هناك خطأ فى سابقتها .

المثال القادم يُعطى توضيحا لحالة الحل بالتقدم وكيفية اختيار صف الارتكاز فى هذه الحالة .

مثال (٢-٢) : حل المعادلات : $x + 3z = 6$, $y + 5z = 3$, $x + 2y + 3z = 2$ بأسلوب الحل بالتقدم باستعمال طريقة جاوس .

الحل :

نرسم جدولا كالمثال السابق .

	x	y	z		عمود الإختبار ↓	
	1	2	3	2	4	ص ١
	0	1	5	3	3	
→ صف ارتكاز وعنصر إرتكاز	1	0	3	6	-2	
الصف الأول − الصف الثالث	0	2	0	-4	6	ص ٢
الصف الثانى − $\frac{5}{3}$ × الصف الثالث	$-\frac{5}{3}$	1	0	-7	$\frac{19}{3}$	
→ ينزل صف الارتكاز كما هو	1	0	3	6	-2	
الصف الأول − 2 × الصف الثانى	$\frac{10}{3}$	0	0	10	$-\frac{20}{3}$	ص ٣
→ صف ارتكاز	$-\frac{5}{3}$	1	0	-7	$\frac{19}{3}$	
	1	0	3	6	-2	

والصورة النهائية هى :

$$\frac{10}{3}x = 10$$

$$-\frac{5}{3}x + y = -7$$

$$x + 0 + 3z = 6$$

وبالتالى :

$$x = 3$$

$$y = -7 + \frac{5}{3}(3) = -2$$

$$z = \frac{1}{3}(6 - 3) = 1$$

ويكون عمود الحل هو :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ملاحظة أخيرة تخص اختيار عنصر الارتكاز ، فهى هابطة على القطـر الرئيسـى Diagonal فى حالة الحل بالرجوع (أى من أعلى إلى أسفل) ثم صـاعدة على القطـر الرئيسـى فـى حالـة الحل بالتقدم (أى من أسفل إلى أعلى) إذا أمكن ذلك . وفى حالة ما إذا كان الذى عليه الـترتيب (صفراً) لا يمكن اختياره ويجب إعادة ترتيب المعـادلات (أى الصفوف) حتـى يمكـن تجنبـه . وعامة ، فإننا يمكننا اختيار عنصر الارتكاز فى أى صف وأى عمود لم يتم اختيارهما سابقاً .

فوائد جانبية للجدول :

(i) يمكن حساب $|A|$ من الجدول ، فهو حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسـى . ففـى مثـال (٢-١) نجد أن :

$$|A| = (1) \times (1) \times (10) = 10$$

وفى مثال (٢-٢) نجد أن :

$$|A| = \left(\frac{10}{3}\right) \times (1) \times (3) = 10$$

ويجب أن يكون :

$$|A| \neq 0$$

حتى يكون هناك حلاً وحيداً وإلا تغيرت الحالة إلى عدم وجود حل أو وجود عدد لا نهائى من الحلول على حسب رتبة المصفوفة A ورتبة المصفوفة الموسعة $(A : \underline{b})$.

(ii) يمكن حساب رتبة المصفوفة . فهى 3 فى المثالين السابقين (مثال (٢-١) ، (٢-٢)) حيث يمكن الاستعانة بعمليات الصف البسيط لمعرفة ذلك . وللتوضيح اعتبر المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

وبالتالى تكون رتبة A هى (1) .

(iii) يمكن حساب معكوس المصفوفة A^{-1} وذلك بتعديل بسيط فى الجدول حيث نأخذ فى الجهة اليسرى عناصر A وفى الجهة اليمنى نضع عناصر المصفوفة المحايدة (مصفوفة الوحدة Identity or Unity Matrix I) التى لها نفس أبعاد A ثم نكون المصفوفة الموسعة $(A : I)$ ونأخذ عمودا للاختبار كما هو معتاد ونجرى عمليات الصف البسيط حتى نصل إلى الصورة المكافئة (صورة المصفوفة الموسعة $(I : A^{-1})$) والتى منها يمكن معرفة المعكوس A^{-1}، كما يتضح من المثال التالى .

مثال (٢-٣) : أوجد معكوس المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$.

الحل :

	A		I		عمود الإختبار
صف ارتكاز وعنصر ارتكاز ←	2	3	1	0	4
	4	5	0	1	8
صف الارتكاز ÷ عنصر الارتكاز ←	1	3/2	1/2	0	2
	4	5	0	1	8
	1	3/2	1/2	0	2
الصف الثانى – 4 × الصف الأول	0	-1	-2	1	0
	1	3/2	1/2	0	2
صف ارتكاز وعنصر ارتكاز ←	0	1	2	-1	0
الصف الأول – (3/2) × الصف الثانى	1	0	-5/2	3/2	2
	0	1	2	-1	0
	I		A^{-1}		

ويكون

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

(٢-٢-٢) طريقة جاوس - جوردان Gauss-Jordan :

هذه الطريقة شبيهة بالطريقة السابقة إلا أن الصورة المكافئة النهائية المطلوب الوصول إليها هى مصفوفة الوحدة Unity Matrix I ، وهذا يتطلب استعمال عمليات الصف البسيط والأخذ بأسلوب الارتكاز Pivoting مع جعل العناصر أسفل وأعلى القطر أصفارا Zeros . هذا معناه مزيد من عمليات الضرب والطرح والجمع ، ولكن المكسب الذى نكسبه من ذلك هو قراءة الحل بشكل مباشر فى عمود الثوابت ولا يتطلب ذلك الحل بالرجوع أو بالتقدم كما فى طريقة جاوس وهو مكسب كبير لا يُستهان به .

مثال (٢-٤) : حل المعادلات :

$$2x - 3y + z = 5 \quad , \quad x - 4z = 3 \quad , \quad 5y + 3z = 8$$

الحل :

	x	y	z		عمود الإختبار ↓	
صف ارتكاز وعنصر ارتكاز ←	2	-3	1	5	-5	
	1	0	-4	3	-6	ص ١
	0	5	3	8	0	
صف الارتكاز ÷ عنصر الارتكاز	1	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	$-\frac{5}{2}$	ص ٢
	1	0	-4	3	-6	
	0	5	3	8	0	

	1	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	$-\frac{5}{2}$	
صف ارتكاز وعنصر ارتكاز →	0	$\underline{\underline{\frac{3}{2}}}$	$-\frac{9}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{2}$	ص ٣
	0	5	3	8	0	
	1	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	$-\frac{5}{2}$	
	0	$\underline{\underline{1}}$	-3	$\frac{1}{3}$	$-\frac{7}{3}$	ص٤
	0	5	3	8	0	
	1	0	-4	3	-6	
	0	1	-3	$\frac{1}{3}$	$-\frac{7}{3}$	ص ٥
صف ارتكاز وعنصر ارتكاز →	0	0	$\underline{\underline{18}}$	$\frac{19}{3}$	$\frac{35}{3}$	
	1	0	-4	3	-6	
	0	1	-3	$\frac{1}{3}$	$-\frac{7}{3}$	ص ٦
صف الارتكاز ÷ عنصر الارتكاز	0	0	$\underline{\underline{1}}$	$\frac{19}{54}$	$\frac{35}{54}$	
	1	0	0	$\frac{119}{27}$	$-\frac{92}{27}$	
	0	1	0	$\frac{25}{18}$	$-\frac{7}{18}$	ص ٧
	0	0	1	$\frac{19}{54}$	$\frac{35}{54}$	

ويكون الحل النهائى هو :

$$x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 119/27 \\ 25\ /18 \\ 19/54 \end{bmatrix}$$

ويمكن التأكد من صحة الحل بالتعويض فى أحد المعادلات .

سؤال هام : ماذا تفعل إذا ما وجدت على القطر (وأثناء إختيارك لعنصر الإرتكاز) صفراً.. هل تختاره كعنصر ارتكاز ؟ .

الإجابة : لا فالصفر لا يصلح كعنصر ارتكاز وبالتالى هذا الصف لا يصلح كصف ارتكاز .. فماذا نفعل للوصول إلى الحل بطرق جاوس السابقة ؟ . الإجابة على هذا السؤال نتركها لذكاء الطالب .. غير أننا ننوه إلى أننا يمكننا الوصول إلى شكل من المصفوفات يُسمى المصفوفات الأولية Elmentary Matrices وهى مصفوفات تحتوى على n(n-1) من الأصفار و n عنصر ذو القيمة (1) ويكون رتبتها n مثل :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2x2} , \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{2x2} , \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3x3} , \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{3x3} , \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{4x4}$$

(٣-٢) الطرق غير المباشرة INDIRECT METHODS :

إذا ما زادت المعادلات والمجاهيل عن حد معين ، فإنه يجب اللجوء للحاسب الآلى للقيام بعمليات الحساب وخاصةً إذا كان معظم عناصر مصفوفة المعاملات أصفاراً ، وغالبا ما يظهر فى نوع من المصفوفات المتناثرة Sparse Matrices وهى المصفوفات التى تكون معظم عناصرها أصفارا ً. وكثيرا ً ما تظهر هذه المصفوفات فى نظم المعادلات الناشئ من

تطبيق طريقة الفروق المحددة Finite Differences أو طريقة العناصر المحددة Finite Elements لحل المعادلات التفاضلية . وتُسمى الطرق المتبعة فى هذا الفصل بالطرق غير المباشرة أو بالطرق التكرارية Iterative Methods .

(٢-٣-١) طريقة جاكوبى Jacobi Method :

تقوم الطريقة على حل المعادلات $A\underline{x} = \underline{b}$ وذلك بحل كل معادلة لمجهول من المجاهيل . فمثلا تُستعمل المعادلة الأولى لحل المجهول الأول x_1 بحيث يكون :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots\dots + a_{1n}x_n = b_1 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x \;\; - a_{13}x_3 - \dots - a_{1n}x_n)$$

ومن المعادلة الثانية :

$$x_2 = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \dots\dots - a_{2n}x_n)$$

وعامة ،

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}}(b_i - a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \dots\dots - a_{i(i-1)}x_{i-1} - a_{i(i+1)}x_{i+1} - \dots\dots\dots - a_{in}x_n), a_{ii} \neq 0$$

وبذلك نحصل على n من المعادلات بشكل جديد ثم نتبع أسلوب التكرار Iterations فى الحل وذلك بتخمين قيمة مبدئية للحل ولتكن $\underline{x}_0$. أى أن :

$$\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} x_1^o \\ x_2^0 \\ .. \\ .. \\ x_n^o \end{bmatrix}$$

ثم نعوض بها فى الطرف الأيمن للمعادلات الجديدة فنحصل على حل جديد مُحسن هو $\underline{x}_1$ ، حيث

$$\underline{x}_1 = \begin{bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ .. \\ .. \\ x_n^1 \end{bmatrix}$$

ثم نقوم بوضع $\underline{x}_1$ فى الجهة اليمنى من المعادلات لنحصل على التحسين االثانى $\underline{x}_2$ .. وهكذا حتى نحصل على الدقة المطلوبة فى جميع المجاهيل .

والطرق التكرارية هذه مصممة للعمل على حاسب آلى ولا نقوم بها يدوياً إلا فى الأبعاد الصغيرة والتى يمكن حلها بالطرق المباشرة بسهولة . لذلك لا تظهر قوة هذه الطرق فى الأبعاد الصغيرة ولكن تظهر أهميتها وتوفيرها للوقت وعدد المخازن فى الحاسب فى حالة الأبعاد الكبيرة (مثلا ٣٠ معادلة فى ٣٠ مجهول) .

شروط استعمال الطريقة :

(i) أن تكون $a_{ii} \neq 0$ لجميع قيم i

(ii) ضمان التقارب Convergence للحل ، وهو غير مضمون إلا إذا كانت مصفوفة المعاملات من النوع الذى يُسمى مهيمنة القطر Diagonally Dominant ، وهى المصفوفة التى تحقق الشرط الرياضى :

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \qquad \forall i \quad , \quad (j \neq i)$$

وهذا معناه أن تكون القيم العددية لعنصر القطر فى أى صف أكبر من مجموع القيم العددية للعناصر الأخرى فى هذا الصف .

فمثلا فى المصفوفة $\begin{bmatrix} -20 & 15 & -3 \\ 4 & 7 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ ، تقارب الحل مضمون لأن :

$$i = 1: \qquad |-20| > |15| + |-3| = 18$$
$$i = 2: \qquad |7| > |4| + |-2| = 6$$
$$i = 3: \qquad |3| > |1| + |-1| = 2$$

وإثبات هذه النظرية مطول ويمكن اللجوء لأحد المراجع فى المصفوفات وحل المعادلات (وليكن المرجع 5 فى نهاية هذا الكتاب) .

مثال (٢-٥) : حل المعادلات الآتية بطريقة جاكوبى :

$$5x + 2y = 7 \quad , \quad x - 4y + z = -2 \quad , \quad y + 2z = 3$$

آخذاً $\underline{x}_o = \begin{bmatrix} 1.2 \\ 0.8 \\ 1.2 \end{bmatrix}$ كحل تقريبى مبدئى .

الحل :

نكتب المعادلات التكرارية :

$$x^{(1)} = \frac{1}{5}(7 - 2y^{(o)})$$
$$y^{(1)} = \frac{-1}{4}(-2 - x^{(o)} - z^{(o)})$$
$$z^{(1)} = \frac{1}{2}(3 - y^{(o)})$$

لاحظ أن مصفوفة المعاملات مهيمنة القطر ، فالتقارب للحل الصحيح مضمون ولأية قيمة مبدئية . ثم أن (o) يعبر عن القيم القديمة و (1) تعبر عن القيم الجديدة المُحسنة .

ويمكن من المعادلات التكرارية السابقة تكوين الجدول التالى :

الخطوة	x	y	z
0	1.2000	0.8000	1.2000
1	1.0800	1.1000	1.1000
2	0.9600	1.0450	0.9500
..	....	....	....
10	0.9999	0.9999	0.9990
11	1.0000	1.0000	1.0000

لاحظ أننا توقفنا بعد الوصول إلى دقة أربعة منازل عشرية فى كل المجاهيل . أى أن :

$$|x_{11} - x_{10}| < 0.5x10^{-4} \quad , \quad |y_{11} - y_{10}| < 0.5x10^{-4} \quad , \quad |z_{11} - z_{10}| < 0.5x10^{-4}$$

وأننا لو أجرينا الخطوة الثانية عشر لوجدنا :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

وهو الحل النهائى (والمطلوب) للمسألة .

ملاحظات :

(i) هناك عدة معايير للتوقف فى خوارزمى حل المعادلات التكرارية منها :

- التحكم فى الدقة ، أى التوقف بعد الوصول إلى دقةٍ معينة . فى هذه الحالة لا نعرف كم من الوقت يمضى حتى نصل إلى هذه الدقة .

- التحكم فى الوقت ، اى التوقف بعد عدد معين من الخطوات . وفى هذه الحالة لا يمكن التنبؤ بدقة الحل النهائى .

(ii) إذا لم تكن مصفوفة المعاملات مهيمنة القطر فيمكننا (بإعادة ترتيب المعادلات الأصلية) الوصول إلى شكل المصفوفة مهيمنة القطر ما أمكن ذلك . وبذلك نكون أقرب ما يمكن للتقارب .. ولكنه غير مضمون إلا إذا كانت مهيمنة القطر تماماً .

(٢-٣-٢) طريقة جاوس - سيدل Gauss-Seidel Method :

فى هذه الطريقة يتم استعمال الحلول المُحسنة أولا بأول . فمثلا $x_2^{(o)}$ تستعمل $x_1^{(1)}, x_3^{(o)}, x_4^{(o)}, \ldots, x_n^{(o)}$ بدلاً من $\underline{x}^{(o)}$ كله كما فى طريقة جاكوبى . وعلى هذا الأساس ، إذا كان $A\underline{x} = \underline{b}$ هو النظم المطلوب حله وكانت القيم المبدئية هى $\underline{x}^{(o)}$ ، فإن :

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^{(o)} - a_{13}x_3^{(o)} - \ldots\ldots\ldots\ldots - a_{1n}x_n^{(o)}\right)$$

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}\underline{\underline{x_1^{(1)}}} - a_{23}x_3^{(o)} - \ldots\ldots\ldots\ldots - a_{2n}x_n^{(o)}\right)$$

$$x_3^{(1)} = \frac{1}{a_{33}}\left(b_3 - a_{31}\underline{\underline{x_1^{(1)}}} - a_{32}\underline{\underline{x_2^{(1)}}} - \ldots\ldots\ldots\ldots - a_{3n}x_n^{(o)}\right)$$

....

....

$$x_n^{(1)} = \frac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n1}\underline{\underline{x_1^{(1)}}} - a_{n2}x_2^{(1)} - \ldots\ldots\ldots\ldots - a_{n(n-1)}\underline{\underline{x_{n-1}^{(1)}}}\right)$$

لاحظ أن $x_1^{(1)}$ تحسب من القيم القديمة كما فى حالة جاكوبى . أما $x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, \ldots\ldots, x_{n-1}^{(1)}$ فتحسب من القيم القديمة والجديدة معا ، ثم نجد أن $x_n^{(1)}$ تُحسب من القيم الجديدة بكاملها . ويمكن صياغة المعادلات على النحو التالى :

$$x_k^{(m+1)} = \frac{1}{a_{kk}}\left(b_k - \sum_{r=1}^{k-1} a_{kr}x_r^{(m+1)} - \sum_{r=k+1}^{n} a_{kr}x_r^{(m)}\right)$$

وتتقارب هذه الطريقة إلى الحل وذلك إذا كان :

$$\lim_{m\to\infty} x^{(m)} = \underline{x}$$

حيث $\underline{x}$ هو حل نظم المعادلات $A\underline{x} = \underline{b}$. بطريقة أخرى ، يكون شرط تقارب طريقة جاوس – سيدل هو :

$$\max\left\{\left|\lambda\left(-L^{-1}G\right)\right|\right\} < 1$$

حيث G مصفوفة مثلثية عليا ذات أصفار فى القطر الرئيسى ، $L = A - G$ (وبالتالى مصفوفة مثلثية سفلى) ، هذا معناه أن أقصى قيمة عددية للقيم الذاتية للمصفوفة $(-L^{-1}G)$ يكون دائما أقل من الواحد الصحيح (5) ، وحسابات التقارب خارجة عن هدف هذا الكتاب .

مثال (٢-٦) : حل نظم المعادلات السابق (مثال (٢-٥)) بطريقة جاوس – سيدل .

الحل :

لتكن : $x_3 = z \qquad , \qquad x_2 = y \qquad , \qquad x_1 = x$

إذن تأخذ المعادلات الصورة :

$$\begin{aligned} 5x_1 + 2x_2 &= 7 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 &= -2 \\ x_2 + 2x_3 &= 3 \end{aligned}$$

وتكون المعادلات التكرارية :

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{5}\left(7 - 2x_2^{(0)}\right)$$

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{-4}\left(-2 - x_1^{(1)} - x_3^{(0)}\right)$$

$$x_3^{(1)} = \frac{1}{2}\left(3 - x_2^{(1)}\right)$$

وبأخذ :

$$\underline{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1.2 \\ .8 \\ 1.2 \end{bmatrix}$$

يمكن تكوين الجدول التالى :

الخطوة	$x = x_1$	$y = x_2$	$z = x_3$
0	1.2000	0.8000	1.2000
1	1.0800	1.0700	0.9550
2	0.9770	0.9843	1.0079
..	....	....	....
..	....	....	....
8	1.0000	1.0000	1.0000

يتضح من الجدول أن خطوات الحل بطريقة جاوس - سيدل أقل من مثيلتها لطريقة جاكوبى ، إلا أن هذا لا يعنى أن طريقة جاوس - سيدل أفضل دائما من جاكوبى ، فليست هناك دراسة تفيد ذلك .

* * * * *

تمرينات عامة على الباب الثانى

(١) حل المعادلات :

•بطريقة جاكوبى :

(أ) لخمسة خطوات تكرارية (ب) لتحقيق دقة قدرها ثلاثة منازل عشرية

ملاحظة : المصفوفة على هذه الصورة ليست مهيمنة القطر ، فماذا تفعل ؟

(٢) حل المعادلات :

$$\begin{aligned} 13x_1 + 5x_2 - \quad x_3 &= 24 \\ 4x_1 + x_2 - 55\,x_3 &= 17 \\ 17x_1 + 35x_2 - 15x_3 &= 32 \end{aligned}$$

آخذا

$$\underline{x}^{(o)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

بطريقة :

- جاوس – جوردان
- جاكوبى
- جاوس – سيدل

(٣) استعمل طريقة عددية لحل المعادلات :

$$\text{(i)}\quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{(ii)}\quad \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \underline{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(٤) حل المعادلات $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 16 \\ 3 \end{bmatrix}$ باستخدام (i) طريقة مباشرة و (ii) طريقة جاوس – سيدل لخطوتين تكراريتين فقط مع أخذ $\underline{x}_o = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ، وأوجد الخطأ المطلق فى حساب $\underline{x}$.

الحل : $\left\{ \underline{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$

(٥) حل المعادلات : $-3y + 6z = 12$, $x + z = 4$, $5x - 3y + z = 2$

(i) بطريقة مباشرة

(ii) بطريقة غير مباشرة حتى ثلاث خطوات مع أخذ $\underline{x}_o = \underline{0}$ ثم أوجد الخطأ النسبى فى حساب (x,y,z) .

الحل : $\left\{ \underline{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$

(٦) حل المعادلات : $3x - 5y + 47z = 1 \quad , \quad 56x + 23y = 2 \quad , \quad 66y - 13z = 3$

بطريقة جاوس – سيدل لخطوتين تكراريتين فقط مع أخذ $\underline{x}_o = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

الحل : $\left\{ \underline{x} = \begin{bmatrix} 0.0170 \\ 0.0501 \\ 0.0255 \end{bmatrix} \right\}$

(٧) حل المعادلات $\begin{bmatrix} 3 & -5 & 47 \\ 56 & 23 & 11 \\ 17 & 66 & -13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ و $\underline{x}_o = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

بطريقة جاكوبى لثلاث خطوات تكرارية فقط مناقشاً شرط التقارب ومدى الدقة التى وصلت إليها فى الحل .

الحل لرقمين عشريين : $\left\{ \underline{x} = \begin{bmatrix} 0.0147 \\ 0.0464 \\ 0.0227 \end{bmatrix} \right\}$

* * * * *