الباب الثالث

حل المعادلات غير الخطية

SOLVING NONLINEAR EQUATIONS

(٣-١) مقدمة INTRODUCTION :

فى هذا الباب نقدم بعض الطرق البسيطة لحل المعادلات التى على الصورة $f(x) = 0$ حيث $x \in \Re$. وتُسمى حلول (Solutions) هذه المعادلة أيضا بالجذور Roots ، وسنكتفى هنا بحل المعادلة فى مجهول واحد x . وهناك بعض الأمثلة لمعادلات غير خطية مثل :

$$f(x) = \sin x - x = 0$$

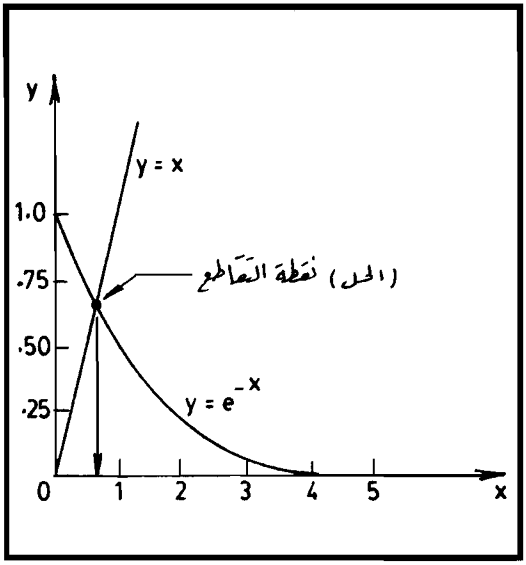
$$f(x) = e^{-x} - x = 0$$

$$f(x) = x + \ln x = 0$$

وهكذا .

ونُحب أن ننوه قبل الدخول فى الطرق العددية أن نتحدث عن طريقة تاريخية قديمة ولكنها تُفهم الطالب جيداً ما المقصود بالحل . فمثلا إذا أردنا حل المعادلة " $e^{-x} - x = 0$ " فهذا معناه أن " $e^{-x} = x$ " . وبوضع كل من الطرفين مساويا لـ y فإننا نحصل على منحنيين " $y = x$" و " $y = e^{-x}$ " وكلاهما يمكن رسمه ، ويكون الحل هو تقاطع هذين المنحنيين كما هو موضح بالرسم التالى . ومن الرسم يتضح أن الحل (وهو قيمة x المناظرة لنقطة تقاطع المنحنيين) هو عند $x \cong 0.6$ وهو حل تقريبى غير دقيق لأن عند $x = 0.6$ يكون : $e^{-x} - x = 0.051 \neq 0$ ولكن :

- هل يمكنك تعديد المشاكل (التى هى مصادر للأخطاء) عند الحل بهذه الطريقة ؟ .
- ماذا عن خطأ عدم دقة مقياس الرسم ؟ .
- ماذا عن خطأ عدم دقة نقطة التقاطع ؟ .
- ماذا عن الخطأ الناشئ من صعوبة رسم المنحنى (أحيانا) ؟ .



x	e^{-x}	x
0	1	0
1	0.37	1
2	0.14	2
3	0.05	3
4	0.02	4

لمثل هذه الأسباب وغيرها يجب البحث عن **طرق عددية تكرارية Iterative Methods** لحل هذه المعادلات والحصول على دقة أفضل .

(٣-٢) طريقة التكرار البسيط SIMPLE ITERATION METHOD
أو طريقة النقطة الثابتة FIXED POINT METHOD

فى هذه الطريقة تتولد المعادلة التكرارية Iterative Equation من المعادلة الأصلية $f(x) = 0$ بإعادة تشكيل المعادلة للحل فى x بحيث تكون المعادلة كالآتى :

$$x = \Phi(x)$$

ثم نختار حلاً مبدئياً Initial Guess وليكن $x^{(0)}$ ونضعه فى الطرف الأيمن للمعادلة لينتج حلاً أفضل من الرتبة الأولى First Improved Solution $x^{(1)}$. أى أن :

$$x^{(1)} = \Phi(x^{(0)})$$

ثم نُكرر الخطوة السابقة بتجديد المتغيرات Updating وذلك بوضع $x^{(1)}$ بدلا من $x^{(0)}$ فى االطرف الأيمن فنحصل على $x^{(2)}$ (الحل الأفضل من الرتبة الثانية Second Improved Solution) .. وهكذا ، أى أن :

$$\boxed{x^{(i+1)} = \Phi(x^{(i)})}$$

هى المعادلة التكررية المطلوبة .

ولكن هنا يبرز سؤال ، هل نصل إلى حلول مُحسنة أكثر دقة (أى نقترب من الحل الصحيح) Converge أم نبتعد عن الحل Diverge ؟ . فى الواقع هناك اختبارات لمعرفة ذلك :

- الأول / اختبار عملى ، وهو ملاحظة الحلول فى الجدول .. هل تثبت بعض المنازل العشرية أم لا . فإذا كانت تثبت الواحدة بعد الأخرى من اليسار إلى اليمين فإن ذلك تقارب Convergence وإذا تغيرت الأعداد باستمرار دون استقرار أى منزلة عشرية فإن ذلك تباعد .

- الثانى / اختبار نظرى ، وهو وجود شرط تقارب لهذه الطريقة وهو أن التفاضل الأول للدالة $\Phi(x)$ بالنسبة لـــ x يكون أقل من الواحد الصحيح عددياً . أى أن :

$$|\Phi'(x)| < 1$$

وهذه المتباينة تعطى فترة لـــ x يمكن اختيار x_0 منها . فإذا ظلت متوالية الحل $\left\{x^{(i)}\right\}$ داخل هذه الفترة فأن الحل التقريبى يتقارب للحل الصحيح للمسألة وإلا تباعد عنه .

ملاحظات :

(i) هناك عدد لا نهائى لاختيار $\Phi(x)$. فمثلا إذا كانت $e^{-x} - x = 0$ ، فإنها تُعطى :

$$(a)\ x = e^{-x}$$

$$(b)\ x = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$(c)\ x = e^{\frac{1}{2}(\ln x - x)}$$

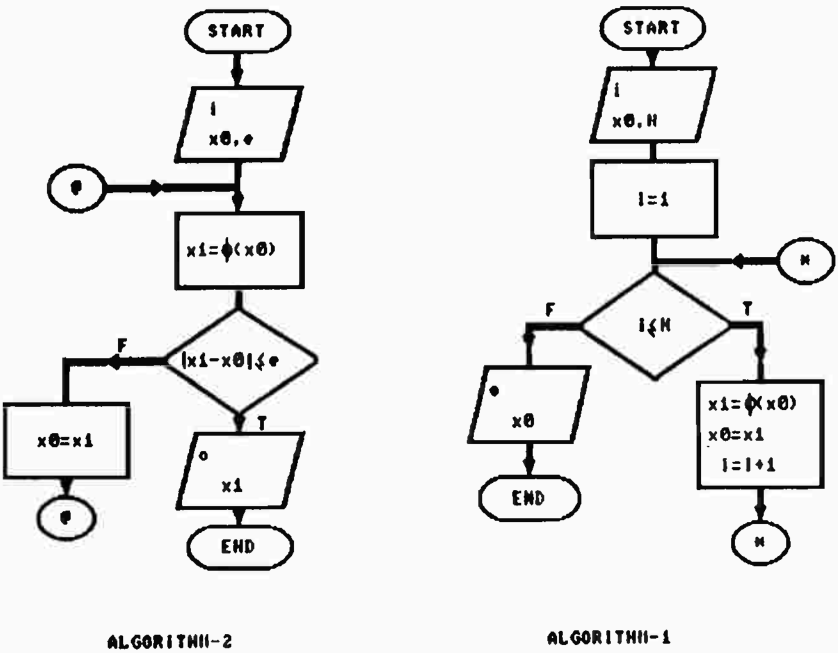
وهكذا . والاختيار يكون صحيحاً إذا كان الشرط $|\Phi'(x)| < 1$ يعطى فترة حقيقية يمكن الحل داخلها .

(ii) اختر دائماً x_0 داخل فترة التقارب ، أى أن $|\Phi'(x_0)| < 1$.

(iii) إنهاء الخطوات فى الطرق التكرارية يكون باتباع أحد خوارزميين :

- **الخوارزمى الأول** : الإقفال المتحكم فى الوقت Controlling time ، وفيه يتم تحديد عدد الخطوات التكرارية بـــ N مثلاً ثم يقف البرنامج أو ينتهى الخوارزمى بعدها (كما هو مبين بالشكل - خوارزمى 1) .

- **الخوارزمى الثانى** : الإنهاء المتحكم فى الدقة Controlling Accuracy ، وفيه يتم الإنتهاء من الخوارزمى بعد تحقيق دقة معينة مثل : $\left|x^{(i+1)} - x^{(i)}\right| < 0.5x10^{-k}$ حيث k عدد المنازل العشرية المطلوبة . أو عامةً : $\left|x^{(i+1)} - x^{(i)}\right| < e$ حيث e خطأ Error مُعين مطلوب تحقيقه بين الجذرين المتتاليين (كما هو مبين بالشكل - خوارزمى 2) .



خوارزمي 2　　　　　　　　　　خوارزمي 1

لاحظ أن الخوارزمـى 1 لا يتحكم فـى الدقـة وأن الخوارزمـى 2 لا يتحكم فـى الزمـن . ومـن الممكن دمج الفكرتين فى برنامج يتحكم فى الدقة والزمن معاً .

مثال (٣-١) : حل المعادلة $x - \sin x = 0$ بطريقة التكرار البسيط لسبع خطوات تكرارية .

الحل :

$$x - \sin x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \sin x$$

أى أن :

$$\Phi(x) = \sin x \quad \Rightarrow \quad \Phi'(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad |\Phi'(x)| = |\cos x| \leq 1$$

ووجود احتمال المساواة لا يتفق مع شرط التقارب ولكننا إذا كنا قريبين من الصفر فهناك احتمال لعدم التقارب . والسبع خطوات المطلوبة هى (مع أخذ $x_o = 0.1$) :

n	x_n
0	0.10000
1	0.09983
2	0.09967
3	0.09967
4	0.09933
5	0.09917
6	0.09901
7	0.9885

وبالتالى $x = 0.09885$ لسبع خطوات تكرارية .

ملاحظات :

(i) ستتغير هذه القيمة قطعاً إذا أخذت اختياراً آخر لـــ x_0 .

(ii) عند الحل التقريبى $x = 0.09885$ سيكون :

$$x - \sin x = 0.000161 \cong 0$$

بدقة :

$$|x_7 - x_6| = |0.09885 - 0.09901| = 0.16\text{x}10^{-3} < 0.5\text{x}10^{-3}$$

أى أن $k = 3$ (بدقة ثلاث منازل عشرية) .

(iv) التعويض بقيمة x فى $\sin x$ يكون بالتقدير الدائرى وليس بالدرجات ، أى أن $x = 0.09885$ (دائرى) .

(v) $|\Phi'(x)| < 1$ لكل قيم الحلول التقاربية التقريبية فى الجدول السابق .

(vi) المسألة السابقة لها ثلاثة حلول أحدهما $x = 0.0$ وهو الحل التافه **Trivial Solution** والثانى وهو الذى سنحصل عليه من الجدول السابق ، والثالث يكون سالبا . وتلعب القيمة المبدئية x_0 دوراً هاماً فى التقارب لأحد هذه الحلول .

(٣-٣) طريقة نيوتن – رافسن NEWTON - RAPHSON :

هذه الطريقة تحل المعادلة $f(x) = 0$ باستخدام التكرار الثابت :

$$\boxed{x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}}$$

حيث x_0 هى القيمة المبدئية القريبة (ما أمكن) من الحل ، $f'(x_0)$ هى قيمة تفاضل $f(x)$ عند x_0 . ولإثبات هذه الصيغة نستعمل طريقة مفكوك تايلور **Taylor's Expansion** حول النقطة x_0 :

$$f(x_1) = f(x_o) + (x_1 - x_o)f`(x_o) + \frac{(x_1 - x_o)^2}{2!} f``(x_o) + \dots\dots\dots \to \infty$$

وبأخذ الحدين الأول والثانى فقط :

$$f(x_1) \approx f(x_o) + (x_1 - x_o)f`(x_o)$$

فإذا كان $x = x_1$ هو الحل (أى إذا كان $f(x_1) = 0$) فإن :

$$f(x_1) \approx f(x_o) + (x_1 - x_o)f`(x_o) = 0$$

وبحل هذه المعادلة فى x_1 :

$$(x_1 - x_o)f`(x_o) = -f(x_o) \qquad \Rightarrow \qquad x_1 - x_o = -\frac{f(x_o)}{f`(x_o)}$$

أى أن :

$$x_1 = x_o - \frac{f(x_o)}{f`(x_o)}$$

ملاحظات :

(i) تتعدد الأخطاء فى هذه الطريقة كالآتى :

- خطأ ناتج من استعمال حدين فقط من حدود متسلسلة تايلور (خطأ اقتطاع) ويتعاظم هذا الخطأ كلما بعُدت قيمة x_o عن الحل .
- خطأ ناتج من إستعمال $f(x_1) = 0$.
- يمكن القول أن: الخطأ فى حساب x_n يتناسب مع مربع الخطأ فى حساب x_{n-1}.

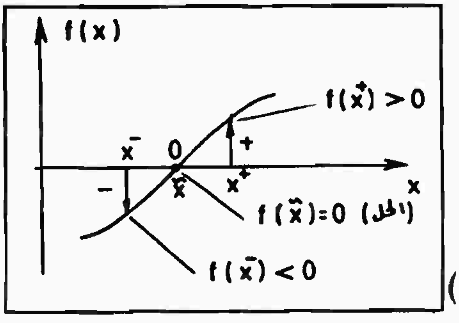
(ii) إذا كانت x_0 قريبة ما أمكن من الحل الصحيح ، فإن التقارب يكون سريعاً لأن الخطأ يقل بسرعة فى حساب كل حل مُحسن x_n من الحل السابق x_{n-1}.

(iii) ما دامت x_0 هنا ذات أهمية ، فلا بد من التدقيق الزائد فى اختيارها وأقترح هنا طريقتين:

- طريقة الرسم : (إن أمكن) كما فعلنا فى المقدمة ونستنتج قيمة لـ x_0 من الرسم .

- طريقة الإشارات : وتعتمد على أن $f(x) = 0$ إذا كان x هو الحل .. فإذا كنا قبل الحل فإن $f(x) < 0$ أو $(0 < f(x))$ ، وإذا كنا بعد الحل فإن $f(x) > 0$ أو $(0 > f(x))$. فمثلاً إذا كانت $f(x) = x^2 - 2 = 0$ ، فإن :

إشارة $f(x)$	x
(-)	0
(-)	1
(+)	2



أى أن تغير إشارة $f(x)$ من (−) إلى (+) (أو العكس) معناه أن هناك جذر للمعادلة $f(x) = 0$ واقع فى الفترة (1,2) . ويمكن تضييق هذه الفترة بأخذ القيم 1.25 , 1.5 . وهكذا .. ومراقبة إشارة الدالة ، ثم بعد ذلك نأخذ القمية المبدئية فى منتصف هذه الفترة . والرسم المقابل يوضح هذه الفكرة .

مثال (٣-٢) : حل المعادلة $x^3 - 3 = 0$ بطريقة نيوتن – رافسن لأربعة منازل عشرية .

الحل :

x	0	1	2	
f(x)	(-)	(-)	(+)	

من الجدول السابق يمكننا إختيار x_o أية قيمة بين 1 , 2 . ولكن حيث أن $f(1) = -1$ فـى حيـن أن $f(2) = 6$ ، فإنه مـن المناسـب أن نـأخذ x_o مائلـة ناحيـة القيمـة 2 . لنـأخذ $x_o = 1.8$ ثـم نعوض فى المعادلة التكرارية :

$$x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f`(x_{i-1})} \quad , \quad i \geq 1$$

حيث :

$$f(x_i) = x_i^3 - 3 \qquad \Rightarrow \qquad f`(x_i) = 3x_i^2$$

وبالتالى :

$$x_i = x_{i-1} - \frac{x_{i-1}^3 - 3}{3x_{i-1}^2} \quad , \quad i \geq 1 \, , \, x_o = 1.8$$

والجدول التالى يوضح نتائج التعويض :

n	x_n
0	1.80000
1	1.50864
2	1.44513
3	1.44226
4	1.44225

لاحظ أن :

$$|x_4 - x_3| = 0.00001 = 0.1x10^{-4} < 0.5x10^{-4}$$

أى أن $(k = 4)$. إذن الجذر لأربعة منازل عشرية هو : $x = 1.4422$.

مثال (٣-٣) : حل المعادلة $x^2 - \ln x - 2 = 0$ بطريقة نيوتن - رافسن آخذا :

(i) $x_o = 1.5$ لخطوتين تكراريتين .

(ii) $x_o = 1.6$ لخطوتين تكراريتين .

وفسر مع الرسم ما حصلت عليه من نتائج .

الحل :

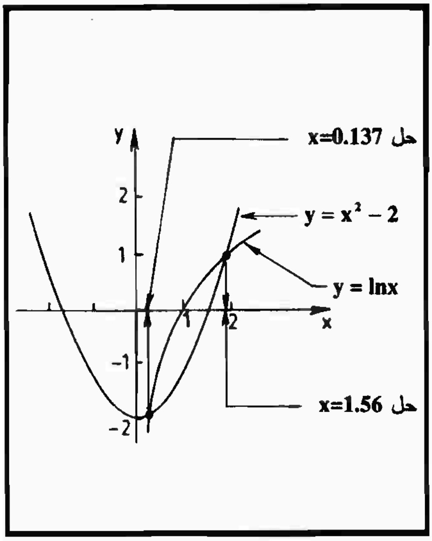
$$f(x) = x^2 - \ln x - 2 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2x - \frac{1}{x}$$

وبالتالى :

$$x_1 = x_o - \frac{x_o^2 - \ln x_o - 2}{2x_o - \dfrac{1}{x_o}}$$

n	xn
0	1.6000
1	1.5650
2	1.5645

n	xn
0	0.15000
1	0.13740
2	0.13790

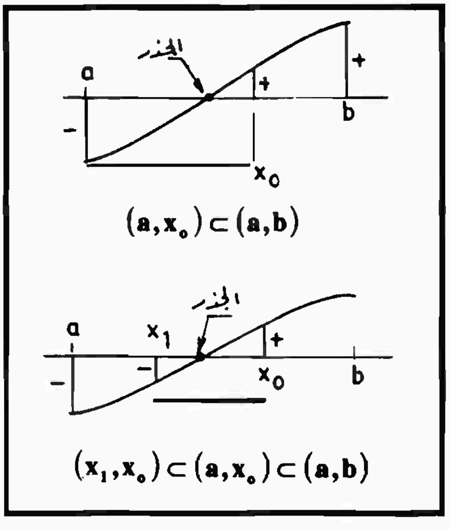


التفسير : يوجد حلان لهذه المعادلة (كما هو موضح بالرسم المقابل) . نقاط التقاطع فى الرسم تدل على الحلول وهناك نقطتا تقاطع بين المنحنى $y = x^2 - 2$ والمنحنى $y = \ln x$.

ملاحظة : إقتراب $x_o = 1.6$ من الحل الأول $x = 1.56$ أدى إلى التقارب إليه وليس إلى الحل الآخر. وكذلك بالنسبة لـ $x_o = 0.15$.

(٣-٤) طريقة التنصيف المتكرر BISECTION METHOD :

هذه الطريقة ليست لها صيغة عامة لمعادلة تكرارية ، ولكن التكرار فيها يعتمد على تنفيذ خوارزمى وصفى Discriptive وهو بدوره يعتمد على تغير إشارة الدالة $f(x)$ حول الجذر وعملية التقارب يمكن وصفها كالآتى :



- **أولا** : تحديد الفترة التى يقع فيها الجذر عن طريق قاعدة الإشارات حول الجذر . فإذا فرضنا أن $f(a) < 0$ وأن $f(b) > 0$ نأخذ منتصف الفترة $x_o = \dfrac{a+b}{2}$.
- **ثانيا** : نحسب إشارة $f(x_o)$ فإذا كانت موجبة إستبدلت b بالقيمة x_o ، وإذا كانت سالبة إستبدلت a بالقيمة x_o . وهذا معناه اقتراب للجذر أكثر كما هو موضح بالرسم المقابل .

• **ثالثا** : تكرر الخطوة (أولاً) على الفترة الضيقة الجديدة - ولتكن (a,x_o) ونوجد منتصفها $x_1 = \frac{a + x_o}{2}$ ونوجد $f(x_1)$ (حسب الرسم السابق نجد أن $f(x_1)$) $0 <$. تُستبدل القيمة a بالقيمة x_1 لنحصل على فترة أضيق وحدودها تقترب من الجذر أكثر من سابقتها . ثم نحسب $x_2 = \frac{x_o + x_1}{2}$ ونحدد إشارة $f(x_2)$ فإذا كانت موجبة استُبدلت x_o بالقيمة x_2 وتصبح الفترة الجديدة هى (x_2,x_o) .. وهكذا نستمر حتى نحقق الدقة المطلوبة أو عدد الخطوات المطلوب .

ملاحظة :

لا يمكن التنبؤ بالفترات المتتالية التى سنحصل عليها مسبقاً ولا يمكن وضعها فى صورة عامة وكل مسألة لها شكل فتراتها الخاص بها .

نظرية :

إذا كان الخطأ المطلق فى الخطوة (n) فى طريقة التنصيف المتكرر هو e_n (أى أن $e_n = |x_n - x|$ حيث x هو الحل) فإن $\boxed{e_n \le \frac{b-a}{2^{n+1}}}$ حيث (a,b) هى أول فترة مُستخدمة فى خوارزمى الحل . وتكون عدد الخطوات (n) التى تحقق k من المنازل العشرية تعطى بـ $\boxed{n \cong \frac{\log_{10}(b-a)+k}{\log_{10}2}}$.

الإثبات :

سنقوم بإثبات الجزء الأخير من النظرية وهو أن $n \cong \frac{\log_{10}(b-a)+k}{\log_{10}2}$.

من الجزء الأول من النظرية :

$$e_n \le \frac{b-a}{2^{n+1}} \qquad (1)$$

وكذلك (لتحقيق k من المنازل العشرية) :

$$e_n \le 0.5x10^{-k} \qquad (2)$$

ومن (2) , (1) يمكن القول (تقريباً) أن :

$$\frac{b-a}{2^{n+1}} \cong \frac{1}{2} x10^{-k}$$

وبحل هذه المعادلة فى n :

$$\frac{2^{n+1}}{b-a} \cong 2 \text{ x } 10^{k} \qquad \Rightarrow \qquad 2^{n} \cong (b-a)x10^{k}$$

وبأخذ لوغاريتمات الطرفين (للتيسير اعتبر أن $\log_{10} = \log$) :

$$n \log 2 \cong \log(b-a) + k \qquad \Rightarrow \qquad n \cong \frac{\log(b-a)+k}{\log 2}$$

النظرية السابقة تقول أنه لتحقيق دقة (k) من المنازل العشرية يلزمنا تنفيذ (n) من الخطوات تقريباً ، وبالتالى ، بمعرفة الدقة يمكننا تقدير عدد الخطوات اللازمة لذلك .. مع ملاحظة أن الدالة f(x) لا تدخل هنا بشكلٍ مباشر ، ولكن عن طريق الفترة الأولى (a,b) التى يقع داخلها الجذر .

مثال (٣-٤) : استخدم طريقة التنصيف المتكرر لحل المعادلة $x + \ln x = 0$ لمنزلتين عشريتين .

الحل :

أولا : تحديد الفترة (a,b) :

x	0.1	0.5	0.6
$f(x) = x + \ln x$	-	-	+

وبالتالى تكون الفترة هى (0.5,0.6) وهذا يعنى أن $a = 0.5$, $b = 0.6$.

ثانياً : تقدير عدد الخطوات n :

$$n \cong \frac{\log(b-a)+k}{\log 2} = \frac{\log(0.1)+2}{\log 2} \quad \Rightarrow \quad n \cong 3$$

ثالثاً : تنفيذ الخطوات :

n	a_n	b_n	$x_n = \frac{a_n + b_n}{2}$	إشارة f(x)
0	0.5000	0.6000	0.55000	(-)
1	0.5500	0.6000	0.57500	(+)
2	0.5500	0.5750	0.56250	(-)
3	0.5625	0.5750	0.56875	

إذن $x \cong 0.56$ لمنزلتين عشريتين .

* * * * *

تمرينات عامة على الباب الثالث

(١) حل المعادلة $x - \cos x = 0$ لعشرة خطوات .

(٢) حل المعادلة $\frac{3}{2}x - \tan x = 0.1$ لعشرة خطوات أو لتحقيق دقة قدرها ثلاثة منازل عشرية (أيهما أقرب) .

(٣) حل المعادلة $x^5 - 2 = 0$ لخمسة منازل عشرية أو لعشرة خطوات تكرارية أيهما أقرب .

(٤) حل المعادلة $x^2 + \tan^{-1} x = 0$ لثلاثة منازل عشرية .

(٥) حل المعادلات التالية مستخدما طريقة التنصيف المتكرر :

لخمسة منازل عشرية		(i) $x^3 = 2$

لثلاثة منازل عشرية		(ii) $x^2 - 2 = e^{-x}$

لأربعة منازل عشرية		(iii) $x - \tan x = 0$

(٦) هل تصلح الصيغ الرياضية الآتية لـــ $g(x)$ لحل المعادلة $4x - e^x$ بطريقة التكرار البسيط $x = g(x)$ ؟ .

(i) $g(x) = \frac{x(e^x + 1)}{4x + 1}$		(ii) $g(x) = \frac{1}{5}(x + e^x)$

(iii) $g(x) = \frac{1}{4}e^x$		(iv) $g(x) = \ln x$

ثم استعمل إحدى هذه الصيغ لحل المعادلة آخذا $x_0 = 1$ لثلاثة منازل عشرية (يمكنك المقارنة بينها جميعاً) .

الحل : $\{x = 0.357\}$

(٧) استعمل طريقة التنصيف لإيجاد قيمة $\sqrt[4]{2}$ لمنزلتين عشريتين أو أربع خطوات تكرارية ، مع حساب قيمة تقريبية لعدد الخطوات المطلوبة فى الفترة [0,2] .

الحل : $\left\{ \sqrt[4]{2} \cong 1.1875 \right\}$ لأربع خطوات

(٨) حل المعادلة $x^3 - x^2 - 2x + 2 = 0$ بطريقة تمكنك مسبقاً من تقدير عدد الخطوات التقريبية للحل علما بأن الجذر المطلوب موجب وأكبر من الواحد الصحيح وذلك لمنزلتين عشريتين فقط .

الحل : { $x = 1.41$ لمنزلتين عشريتين }

(٩) استعمل طريقة لحل المعادلة $\sqrt{x} = 2 - x$ لدقة منزلتين عشريتين إذا علمت أن عدد الخطوات التقريبية تقريبا (4) وأن بداية الفترة المفتوحة لوجود الجذر هى (0.9) ، وأكتب الخطأ الناتج من الحل .

الحل : { $x = 1$ والخطأ صفر }

* * * * *