الباب الرابع

الاستكمال

INTERPOLATION

(٤-١) مقدمة :

إذا ما كان المنحنى موصوفاً بمجموعة من النقاط (x_i, y_i) , $i \in I^+$ فكيف يمكن وصف هذا المنحنى بشكل مستمر Continuous curve . هذه المشكلة الرياضية يمكن علاجها بأكثر من أسلوب . فى هذا الباب من الكتاب تكون هناك قضية أخرى مصاحبة لهذه المشكلة وهى قضية معرفة y عند قيمة لـــ x ليست بجدول النقاط المُعطى ، وتُسمى هذه القضية قضية الاستكمال . ويجب التفرقة بين نوعين من القضايا :

- الأولى : أن النقطة المطلوبة داخل نقاط الجدول Interior ، وبالتالى تُسمى المشكلة فى هذه الحالة " استكمال داخلى Interpolation " .

- الثانية : أن تكون النقطة المطلوبة خارج نقاط الجدول Exterior ، وبالتالى تُسمى المشكلة فى هذه الحالة " استكمال خارجى Extrapolation " .

لاحظ أن المنحنى الذى نحسبه فى هذا الباب يجب أن يمر بجميع النقاط المُعطاه فى الجدول . فإذا كان المنحنى هو $y = f(x)$ ، فإن :

$$y_i = f(x_i) \qquad , \qquad \forall i$$

وبالتالى إذا عُلمت قيمة x فإن $y = f(x)$ وكذلك إذا عُلمت قيمة y فإن $x = f^{-1}(y)$ سواء كان الاستكمال داخلى أو خارجى .

مثال توضيحى :

فى تجربة معملية Experiment فى معمل الحرارة أُخذت القراءات التالية لدرجات الحرارة x وطول قضيب y من المعدن :

x (°C)	0	10	20
y (cm)	150	151	155

أوجد علاقة خطية بين x , y ثم أوجد طول القضيب المعدنى عند :

(i) $x = 15^\circ$.

(ii) $x = 50^\circ$.

(iii) أوجد x المناظرة لـــ $y = 153$ cm .

الحل :

العلاقة العامة للخط المستقيم هى $y = ax + b$ ومعلوم أنه يكفى شرطان فقط لمعرفة a , b ، ولذلك سنختار النقطتين (0,150) ، (20,155) حتـــى نكـــون غطينـــا فـــترة : $x \in [0,20]$. وبالتالى نحصل على المعادلات الآتية :

$$(i)\ 150 = b$$

$$(ii)\ 155 = 20a + 150\ b \qquad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{4}$$

وتكون المعادلة هى :

$$\boxed{y = \frac{1}{4}x + 150}$$

وتُسمى العلاقة السابقة صيغة الاستكمال أو حدودية الاستكمال Interpolation Polynomial

(i) استكمال داخلى عند $x = 15^{o}$ (لأن $x \in [\,0,20\,]$) :

$$y = \frac{1}{4}(150) + 150 = 153.75 \text{ cm.}$$

(ii) استكمال خارجى عند $x = 50^{o}$ (لأن $x \notin [\,0,20\,]$) :

$$y = \frac{1}{4}(50) + 150 = 162.5 \text{ cm.}$$

(iii) استكمال عكسى :

$$153 = \frac{1}{4}\ x + 150 \qquad \Rightarrow \qquad x = 4\ (3) = 12\ ^{o}\,C$$

ملحوظة :

الخط المستقيم لا يمر بكل نقاط الجدول (الثلاثة) ويعتبر هذا التقريب سيئا لأنه لم يستخدم كل بيانات الجدول . ولتحسين حدودية الاستكمال لا بد من أخذ كل البيانات فى الاعتبار ، وبالتالى سيكون من الدرجة الثانية وصورتها العامة :

$$y = ax^2 + bx + c$$

المعاملات الثلاث a , b , c تحتاج إلى ثلاثة شروط رياضية وهى المرور بالثلاث نقاط . ولكن ستكون المعادلات أصعب (نوعا ما) من المعادلات السابقة .

وعامة لو كانت البيانات ذات بعد (n+1) ستكون حدودية الاستكمال من درجة (n)، أى عل الصورة :

$$y = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

والمعادلات هى :

$$y_j = \sum_{i=0}^{n} a_i x_j^i \quad , \quad 1 \le j \le n+1$$

وهى معادلات خطية فى a_i عددها $n + 1$. أى أن :

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & .. & .. & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & .. & .. & x_2^n \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & .. & .. & x_{n+1}^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_o \\ a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \dots \\ y_{n+1} \end{bmatrix}$$

ولا يخفى على القارئ مشاكل حل المعادلات الخطية ، ولذلك نلجأ إلى طرق أخرى للاستكمال سنوجز شرح بعضها كما يأتى :

(٤-٢) طريقة لاجرانج LAGRANGE :

وهى طريقة عامة للاستكمال ، بمعنى أنها تُستعمل سواء كانت الفروق بين بيانات المتغير المستقل x ثابتة (متساوية) أم غير متساوية . وحدودية لاجرانج المُستخدمة فى هذه الطريقة هى :

$$L_n^{(k)}(x) = \frac{(x-x_o)(x-x_1)(x-x_2)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(x-x_n)}{(x_k-x_o)(x_k-x_1)(x_k-x_2)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(x_k-x_n)}$$

والفروق المحسوبة فى المقام تتجنب $(x_k - x_k)$ وفى البسط تتجنب $(x - x_k)$. ويمكن كتابة الصيغة على الصورة :

$$\boxed{L_n^{(k)}(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \ne k}}^{n} \frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)}}$$

أى أن هناك حدودية من درجة (n) : $L_n^{(k)}(x)$ لكـل نقطـة مـن نقـاط البيانـات البـالغ عددهـا (n+1) وتكون حدودية الاستكمال هى :

$$y = y_o L_n^{(o)}(x) + y_1 L_n^{(1)}(x) + y_2 L_n^{(2)}(x) + \ldots\ldots + y_n L_n^{(n)}(x)$$

أو فى صورة مختصرة :

$$\boxed{y = \sum_{i=0}^{n} y_i L_n^{(i)}(x)}$$

لاحظ أن المتغير المستقل x يكون حدوديات لاجرانج التى لها درجة ثابتة n (وهـى عدد نقـاط الجدول مطروحاً منه واحد) . أما المتغير التابع y فى الجدول فيظهر فى صيغة الاستكمال .

ولحساب الفروق الظاهرة فى بسط ومقام حدوديات لاجرانج نستخدم الجدول التالى :

x	$(x - x_o)$	$(x - x_1)$	$(x - x_2)$	……	$(x - x_n)$
x_o	$\underline{(x - x_o)}$	$(x_o - x_1)$	$(x_o - x_1)$	……	$(x_o - x_1)$
x_1	$(x_1 - x_o)$	$\underline{(x - x_1)}$	$(x_1 - x_2)$	……	$(x_1 - x_n)$
x_2	$(x_2 - x_o)$	$(x_2 - x_1)$	$\underline{(x - x_2)}$	……	$(x_2 - x_n)$
……	…………	………	………	………	…………
x_n	$(x_n - x_o)$	$(x_n - x_1)$	$(x_n - x_2)$	……	$\underline{(x - x_n)}$

وفى هذا الجدول لا يتم حساب عناصر القطر الرئيسى فى مصفوفة الفروق . ثـم مـن الجـدول مباشرةً نحسب حدوديات لاجرانج كالآتى :

$$L_n^{(0)}(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(x - x_n)}{(x_o - x_1)(x_o - x_2)(x_o - x_3)\ldots\ldots\ldots(x_o - x_n)}$$

$$L_n^{(1)}(x) = \frac{(x - x_o)(x - x_2)(x - x_3)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(x - x_n)}{(x_1 - x_o)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\ldots\ldots\ldots(x_1 - x_n)}$$

وهكذا حتى نحسب :

$$L_n^{(n)}(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(x - x_{n-1})}{(x_n - x_o)(x_n - x_1)(x_n - x_2)\ldots\ldots\ldots(x_n - x_{n-1})}$$

مثال (٤-١) : كون حدودية الاستكمال باستعمال طريقة لاجرانج للنقاط الآتية :

x	-1	2	4
y	3	7	5

الحل :

نكون جدول الفروق :

	(x + 1)	(x + 2)	(x - 4)
$x_0 = -1$	(x + 1)	-3	-5
$x_1 = 2$	3	(x -2)	-2
$x_2 = 4$	5	2	(x - 4)

وبالتالى :

$$L_2^{(0)}(x) = \frac{(x-2)(x-4)}{(-3)\ (-5)} = \frac{1}{15}(x-2)\ (x-4)$$

$$L_2^{(1)}(x) = \frac{(x+1)\ (x-4)}{(3)\ (-2)} = \frac{-1}{6}(x+1)\ (x-4)$$

$$L_2^{(2)}(x) = \frac{(x+1)\ (x-2)}{(5)\ (2)} = \frac{1}{10}(x+1)\ (x-2)$$

وتكون حدودية الاستكمال :

$$y = (3)\left(\frac{1}{15}\right)\ (x-2)(x-4) + (7)\ \left(-\frac{1}{6}\right)(x+1)\ (x-4) + (5)\ \left(\frac{1}{10}\right)\ (x+1)\ (x-2$$

وبضرب الأقواس وتجميع الحدود المتناظرة نحصل على :

$$\boxed{y = -\frac{7}{15}x^2 + \frac{9}{5}x + \frac{79}{15}}$$

وبالتالى نستطيع الحصول منها على أى استكمال داخلى أو خارجى أو استكمال عكسى إذا طُلب ذلك . فمثلا عند $x = 0$ تكون $y = \frac{79}{15}$ ، وعند $x = 5$ تكون $y = \frac{59}{15}$ ، وعند $y = 0$ نجد أن $x = 1.95$ و $x = -5.8$ ونختار $x = -5.8$ ونرفض الأخرى (لماذا ؟) .

(٤-٢-١) الخطأ فى الاستكمال فى طريقة لاجرانج :

نظرية :

دعنا نفترض أن حدودية الاستكمال هى $P_n(x)$ وأن الدالة المقربة بالاستكمال هى $f(x)$ دالة متصلة من رتبة n وأن تفاضلها من رتبة $(n+1)$ موجود لجميع قيم x المنتمية للفترة $[a,b]$ ($x \in [a,b]$) ، فإن الخطأ :

$$\boxed{\begin{aligned} E_n(x) &= f(x) - P_n(x) \\ &= \frac{(x-x_o)(x-x_1)\ldots\ldots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) \end{aligned}}$$

حيث $c \in [a,b]$.

حالات خاصة :

$$\text{(i)}\quad E_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2!} f^{(2)}(c) \quad , \quad c \in [x_0, x_1]$$

$$\text{(ii)}\quad E_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{3!} f^{(3)}(c) \quad , \quad c \in [x_0, x_2]$$

مثال (٤-٢) : دع $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-x^2}dx$ أو $f(x) = erf(x)$ وتُسمى دالة الخطأ . فإذا

أخذنا قيمتين لها وليكن

x	1.2	1.3
f (x)	0.3849	0.4832

، أوجد $E_1(1.22)$

(أى الخطأ فى حساب $f(x)$ عند $x = 1.22$ وذلك بطريقة لاجرانج .

الحل :

من الصيغة الخاصة بالخطأ عند $n = 1$:

$$E_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2!}f^{(2)}(c) \qquad c \in [1.2,1.3]$$

وبالتالى :

$$E_1(x) = \frac{(x-1.2)(x-1.3)}{2}f``(c)$$

ولكن :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-x^2}dx \Rightarrow f`(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2} \Rightarrow f``(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(-2x)e^{-x^2}$$

وبالتالى :

$$f''(c) = \frac{-2c}{\sqrt{2\pi}} e^{-c^2} \quad , \quad c \in [1.2, 1.3]$$

$$\Rightarrow \quad E_1(x) = -\frac{c}{\sqrt{2\pi}}(x-1.2)(x-1.3)\, e^{-c^2}$$

$$\Rightarrow \quad |E_1(x)| \le \frac{(1.3)}{\sqrt{2\pi}} |x-1.2| \; |x-1.3| \; e^{-(1.2)^2}$$

$$\Rightarrow \quad |E_1(x)| \le 0.123|x-1.2|\,|x-1.3| = |E_1(x)|_{max}$$

وعند $x = 1.22$:

$$|E_1(x)| \le 0.123|1.22-1.2|\,|1.22-1.3| = 0.1968\text{x}10^{-3} < 0.5\text{x}10^{-3}$$

إذن القيمة الاستكمالية المحسوبة عند $x = 1.22$ ستكون ذات دقة ثلاثة منازل عشرية .

(٤-٣) طريقة نيوتن الأمامية NEWTON FORWARD METHOD

تُستعمل هذه الطريقة فى حالات تساوى الفروق بين قيم المتغير المستقل للبيانات ، ولا بد أولاً من حساب جدول يُسمى جدول الفروق الأمامية Δ وفيها يكون :

$$\boxed{\Delta y_i = y_{i+1} - y_i}$$

وبالتالى نحصل على الجدول الآتى للفروق الأمامية :

x	y	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^n
x_o	y_o				
		$\Delta y_o = y_1 - y_o$			
x_1	y_1		$\Delta^2 y_o = \Delta y_1 - \Delta y_o$		
		$\Delta y_1 = y_2 - y_1$		$\Delta^3 y_o = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y$	
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1$		
		$\Delta y_2 = y_3 - y_2$		$\Delta^3 y_1 = \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1$	
x_3	y_3		$\Delta^2 y_2 = \Delta y_3 - \Delta y_2$		.... $\Delta^n y_0$
..	..	..	..	..	
..	..	..	..		
		..		$\Delta^3 y_{n-2} = \Delta^2 y_{n-2} - \Delta^2 y_{n-3}$	
x_{n-1}	y_{n-1}		$\Delta^2 y_{n-2} = \Delta y_{n-1} - \Delta y_{n-2}$		
		$\Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1}$			
x_n	y_n				

ونلاحظ أن جدول الفروق الأمامية سينتهى إلى $\Delta^n y_o$. وهذا الجدول هو ما يصلح لصيغة نيوتن الأمامية التى تأخذ التعبير الرياضى التالى :

$$f(x) = y_o + \frac{\alpha}{1!}\Delta y_o + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\Delta^2 y_o + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}\Delta^3 y_o + \ldots\ldots\ldots + \frac{a(a-1)(a-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}\Delta^n y_o$$

حيث :

$$a = \frac{x - x_o}{h} \qquad , \qquad h = x_i - x_{i-1}$$

حالات خاصة :

(١) $f(x) = P_1(x)$: حدودية درجة أولى (الاكتفاء بفروق الدرجة الأولى) :

$$\boxed{P_1(x) = y_o + \frac{\alpha}{1!}\Delta y_o}$$

(٢) $f(x) = P_2(x)$: حدودية درجة ثانية (الإكتفاء بفروق الدرجة الثانية) :

$$\boxed{P_2(x) = y_o + \frac{a}{1!}\Delta y_o + \frac{a(a-1)}{2!}\Delta^2 y_o = P_1(x) + \frac{a(a-1)}{2}\Delta^2 y_o}$$

(٣) $f(x) = P_3(x)$: حدودية درجة ثالثة (الاكتفاء بفروق الدرجة الثالثة) :

$$\boxed{\begin{aligned} P_3(x) &= y_o + \frac{\alpha}{1!}\Delta y_o + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\Delta^2 y_o + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}\Delta^3 y_o \\ &= P_2(x) + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}\Delta^3 y_o \end{aligned}}$$

ويجب ملاحظة التالى :

(i) لا تُستعمل طريقة نيوتن الأمامية إلا فـى حالـة تسـاوى الفـروق بيـن المتغير المسـتقل فـى الجدول ، أى عندما تكون $x_i - x_{i-1} = h$ حيث h ثابت .

(ii) يمكننـا إيجـاد صيـغ تقريبيـة للاسـتكمال ، فيمكننـا حسـاب $P_1(x)$ أو $P_2(x)$ أو $P_3(x)$. وكلما أردنا تحسين القيم حسبنا الحدودية ذات الدرجة الأعلى . هذا لا يتوفر بـالطبع فـى حدوديات لاجرانج .

(iii) لحساب $P_k(x)$ يتم إضافة حد جديد لما تم حسابه من قبل (وهو $P_{k-1}(x)$) وبالتالى يقل مجهود الحساب عند التحسين وأخذ نقاط جديدة فى الاعتبار . لاحظ أن إضافة نقطة جديدة واحدة إلى البيانات فى طريقة لاجرانج تجعلنا نعيد الحسابات كلها لحساب حدوديات لاجرانج من جديد .

(iv) هذه الطريقة تكون دقيقة كلما كانت نقطة الاستكمال المطلوبة قريبة من x_0 (فى النصف الأول من الجدول) .

مثال (٤-٣) : أوجد قيمة y عند $x = 0$ إذا كان

x	-1	1	3	5
y	3	2	5	-7

الحل :

نلاحظ تساوى الفروق $(h = 2)$ ونلاحظ أن القيمة المطلوبة للاستكمال هى $x = 0$ وهى فى النصف الأول من الجدول ، وبالتالى نستعمل طريقة نيوتن الأمامية ، ومن ثم لا بد من حساب الفروق الأمامية :

x	y	$\downarrow \Delta y_o$	$\downarrow \Delta^2 y_o$	$\downarrow \Delta^3 y_o$
$x_o = -1$	$y_o = 3$			
		-1		
1	2		4	
		3		-19
3	5		-15	
		-12		
5	-7			

$$, \ \alpha = \frac{x - x_o}{h} = \frac{x+1}{2}$$

: $P_1(x)$ (i)

$$P_1(x) = y_o + \alpha(\Delta y_o) = 3 + \frac{x+1}{2}(-1)$$

وعند $x = 0$:

$$y = P_1(0) = 2.5$$

: $P_2(x)$ (ii)

$$P_2(x) = P_1(x) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}(\Delta^2 y_2) = \left[3 + \frac{x+1}{2}(-1)\right] + \frac{\left(\frac{x+1}{2}\right)\left(\frac{x+1}{2}-1\right)}{2}(4)$$

وعند $x = 0$:

$$y = P_2(0) = P_1(0) + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{-3}{2}\right)}{2}(4) = 2.0$$

: $P_3(x)$ (iii)

$$P_3(x) = P_2(x) + \frac{a(a-1)(a-2)}{6}\left(\Delta^3 y_o\right) =$$

$$P_2(x) + \frac{\left(\frac{x+1}{2}\right)\left(\frac{x+1}{2}-1\right)\left(\frac{x+1}{2}-2\right)}{6}(-19)$$

وعند $x = 0$:

$$y = P_3(0) = P_2(0) + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{-3}{2}\right)\left(\frac{-5}{2}\right)}{6}(-19) = 0.8125$$

وواضح من تتبع قيم x , y فى الجدول أن النتيجة الأخيرة هى أفضل قيمة لهذا الاستكمال .

(٤-٣-١) الخطأ فى طريقة نيوتن الأمامية

يمكن حساب الخطأ من الصيغة التالية :

$$E_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)......(\alpha-n)}{(n+1)!} h^{n-1} f^{(n+1)}(c)$$

حيث :

$$\alpha = \frac{x - x_o}{h} \quad , \quad h = x_1 - x_o \quad , \quad c \in [x_o, x_n]$$

حالات خاصة :

(i) درجة أولى $P_1(x)$:

$$E_1(x) = \frac{a(a-1)}{2!} h^2 f``(c) \quad , \quad c \in [x_0, x_1]$$

(ii) درجة ثانية $P_2(x)$:

$$E_2(x) = \frac{a(a-1)(a-2)}{3!} h^3 f```(c \quad) \quad , \quad c \in [x_o, x_2]$$

وهكذا . ولا بد من معرفة صيغة العلاقة الأساسية $f(x)$ لنستطيع حساب الخطأ .

مثال (٤-٤) : إذا كانت $\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ (sine integral), $f(x) = Si(x) =$ ، ومن جدول الدالـة علمنا أن

x	0.2	0.4
Si (x)	0.1996	0.3965

أوجد $f(0.22)$ ثم وجد أقصى خطأ فى الحساب .

الحل :

باستعمال صيغة نيوتن الأمامية :

↓ xo	↓ y_o	↓ Δyo
0.2	0.1996	0.1969
0.4	0.3965	

$$, \quad h = 0.2, a = \frac{x-0.2}{0.2} = \frac{10x-2}{2} = 5x-1$$

ومنها نحصل على :

$$y = P_1(x) = y_o + \alpha(\Delta y_o) = 0.1996 + (5x-1)(0.1969)$$

وبالتالى عند $x = .22$:

$$y = f(.22) = .1996 + (5(.22)-1)(.1969) = .2193$$

ولحساب أقصى خطأ فى الحساب :

$$E_1(x) = \frac{a(a-1)}{2!}h^2.f``(c) \qquad , \qquad c \in [0.2,0.4]$$

حيث

$$f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}dt \qquad \Rightarrow \qquad f``(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$$

وبالتالى :

$$E_1(x) = \frac{(5x-1)(5x-2)}{2}.(0.2)^2.\left[\frac{c.\cos c - \sin c}{c^2}\right] \quad , \quad c \in [0.2,0.4]$$

$$\Rightarrow \quad |E_1(x)| \le \frac{|5x-1||5x-2|}{2}.(0.2)^2.\left[\frac{0.4\cos(0.2) - \sin(0.2)}{(0.2)^2}\right]$$

$$\Rightarrow \quad |E_1(x)| \le 0.097|5x-1||5x-2|$$

وبالتالى :

وبالتالى :

$$\left|E_1(0.22)\right| \le 0.097\left|5(0.22)-1\right|\left|5(0.22)-2\right| \le 8.73x10^{-3} = 0.087310^{-1}$$

أى أن :

$$\left|E_1(0.22)\right| \le 0.0873x10^{-1} < 0.5x10^{-1}$$

وبالتالى تتحقق منزلة عشرية واحدة لهذا الاستكمال .

(٤-٤) طريقة نيوتن الخلفية NEWTON BACKWARD METHOD

تصلح هذه الطريقة للاستكمال فى النصف الثانى من الجدول (بعد ترتيب البيانات تصاعديا بالنسبة للمتغير المستقل) ولها الصيغة التالية :

$$f(x) = y_n + \frac{\beta}{1!}\nabla y_n + \frac{\beta(\beta+1)}{2!}\nabla^2 y_n + \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)}{3!}\nabla^3 y_n + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots\ldots(\beta+n-1)}{n!}\nabla^n y_n$$

حيث :

$\beta = \frac{x - x_n}{h}$, $h = x_i - x_{i-1}$ (بيانات متساوية الفروق بالنسبة للمتغير المستقل)

$$\nabla y_i = y_i - y_{i-1} \quad , \nabla^2 y_i = \nabla y_i - \nabla y_{i-1}$$

وجدول الفروق المُستخدم لهذه الطريقة يُسمى جدول الفروق الخلفى وهى فروق من الدرجة الأولى والثانية والثالثة .. وهكذا ، كما هو مبين :

x	y	∇	∇^2	∇^n
x_o	y_o			
x_1	y_1	$\nabla y_1 = y_1 - y_o$	$\nabla^2 y_2 = \nabla y_2 - \nabla y_1$	
x_2	y_2	$\nabla y_2 = y_2 - y_1$	$\nabla^2 y_3 = \nabla y_3 - \nabla y_2$	
x_3	y_3	$\nabla y_3 = y_3 - y_2$	$\nabla^2 y_4 = \nabla y_4 - \nabla y_3$	..... $\nabla^n y_n$
..	..	..	..	
..	..	..	..	
x_{n-1}	y_{n-1}	$\nabla y_n = y_n - y_{n-1}$	$\nabla^2 y_n = \nabla y_n - \nabla y_{n-1}$	
x_n	y_n			

ونلاحظ أن قيم جدول الفروق الخلفية هى نفسها قيم جدول الفروق الأمامية ، ولذلك يُسمى الجدول بجدول الفروق Difference Table فقط . الفرق الجوهرى هو فى المسمى ، ففى الأمامى نأخذ Δ (Delta وفى الخلفى نسميه ∇ (Nabla) . كذلك فى جدول الفروق الأمامى نهتم بالقيم $\Delta y_o , \Delta^2 y_o , \Delta^3 y_o , \ldots\ldots , \Delta^n y_o$ (وهى التى تُستخدم فى صيغة نيوتن الخلفية) .والمزايا والملاحظات السابق ذكرها فى طريقة نيوتن الأمامية شبيهة بتلك الموجودة فى طريقة نيوتن الخلفية مع وجود فروق بسيطة .

مثال (٤-٥) : أوجد قيمة y عند $x = 7$ من الجدول التالى :

x	2	4	6	8
y	-1	2	3	0

الحل :

نلاحظ تساوى الفروق $(h = 2)$ ونلاحظ أن القيمة المطلوبة للاستكمال هى $x = 7$ وهى فى النصف الثانى من الجدول (فى نهاية الجدول تقريبا) ، وبالتالى نستعمل طريقة نيوتـن الخلفية :

x	y			
2	-1			
		3		
4	2		-2	
		1		$\nabla^3 y_3 = -2$
6	3		$\nabla^2 y_3 = -4$	
		$\nabla y_3 = -3$		
$x_3 = 8$	$y_3 = 0$			

$$\beta = \frac{x - x_3}{h} = \frac{x - 8}{2}$$

(i) $P_1(x)$ (درجة أولى) :

$$y = P_1(x) = y_3 + \beta(\nabla y_3) = 0 + \left(\frac{x}{2} - 4\right)(-3)$$

وعند $x = 7$:

$$y = P_1(7) = \left(\frac{7}{2} - 4\right)(-3) = 1.5$$

(ii) $P_2(x)$ (درجة ثانية) :

$$y = P_2(x) = P_1(x) + \frac{\beta(\beta+1)}{2}(\nabla^2 y_3) = P_1(x) + \frac{\left(\frac{x}{2} - 4\right)\left(\frac{x}{2} - 3\right)}{2}(-4)$$

$$= P_1(x) - 2\left(\frac{x}{2} - 4\right)\left(\frac{x}{2} - 3\right)$$

وعند $x = 7$:

$$y = P_2(7) = P_1(7) - 2\left(\frac{7}{2}-4\right)\left(\frac{7}{2}-3\right) = 1.5 - 2\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = 2.0$$

(iii) $P_3(x)$ (درجة ثالثة) :

$$y = P_3(x) = P_2(x) + \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)}{6}(\nabla^3 y_3)$$
$$= P_2(x) + \frac{1}{6}\left(\frac{x}{2}-4\right)\left(\frac{x}{2}-3\right)\left(\frac{x}{2}-2\right)(-2)$$

وعند $x = 7$:

$$y = P_3(7) = P_2(7) + \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)(-2) = 2.0 + \frac{1}{8} = 2.125$$

(٤-٤-١) الخطأ فى طريقة نيوتن الخلفية :

على غرار الخطأ فى طريقة نيوتن الأمامية ، يكون الخطأ فى طريقة نيوتن الخلفية كما يلى :

$$E_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)........(\beta+n)}{(n+1)!}.h^{n+1}.f^{(n+1)}(c)$$

حيث $c \in [x_o, x_n]$.

حالات خاصة :

(i) درجة أولى $P_1(x)$: $E_1(x) = \dfrac{\beta(\beta+1)}{2!}.h^2.f``(c)$

(ii) درجة ثانية $P_2(x)$: $E_2(x) = \dfrac{\beta(\beta+1)(\beta+2)}{3!}.h^3.f```(c)$

تمرينـات عامة على البـاب الرابـع

(١) استعمل طريقة لاجرانج لإيجاد قيمة y عند $x = 1.5$ وعند $x = 3.5$ ، ثم أوجد y عند $x = 2.5$ حاسباً تقديراً للخطأ فى قيمة الاستكمال .

x	0.0	0.5	1.1	2.0	3.0	4.0
y	-2.0	0.0	1.3	7.5	4.0	-1.5

(٢) إذا علمـت أن دالـة جيـب التمـام Integral Cosine تُعـرف كـالآتى : $Ci(x) = \int_x^{\infty} \frac{\cos(t)}{t} dt$ ، وكان معلوما الجدول التالى :

x	2.0	2.2	2.4
ci (x)	-0.4230	-0.3751	-0.3173

أوجد : (i) Ci (2.05) مقدرا أقصى خطأ عدديا . (ii) Ci (2.35) مقدرا أقصى خطأ عدديا

(٣) أوجد حدودية للاستكمال من الدرجة الرابعة للبيانات الآتية :

x	-1	5	6	8	10
y	3	6	4	-3	-14

ثم أوجد قيمة تقريبية لــ y عند $x = 0$.

(٤) أوجد حدودية لاجرانج للبيانات الآتية :

x	-1	3	6	7	14
y	-2	4	0	17	50

ثم أوجد قيمة y عند $x = 0$ وعند $x = -8$ مع تقدير الخطأ فى الحساب .

(٥) أوجد حدودية الاستكمال للقراءات التالية :

θ	-1	1	3	5	7
r	3	6	4	-3	-14

وذلك كحدودية درجة ثانية ، ثم أوجد r عند $\theta = 0$ وعند $\theta = 8$.

* * * * *