

الباب الخامس

الحل العددي للمعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى

Numerical Study of the First Order - First Degree Differential Equations

فى هذا الباب سنقدم بعض الطرق العددية لإيجاد الحل العددي للمعادلة التفاضلية

$$y' = f(x, y) \quad ; \quad y = y_0 \quad \text{at} \quad x = x_0$$

ويقصد بالحل هنا هو حساب قيمة y_1 عند $x = x_1$ حيث

$$x_1 = x_0 + h$$

وبدءاً من الحل y_1 عند x_1 والذي تم حسابه نكرر نفس الخطوات وذلك لحساب y_2 عند x_2 حيث $x_2 = x_1 + h$ وهكذا .

Runge - kutta Method

(١-٥) طريقة رونجا - كوتا

تعتمد طريقة رونجا - كوتا فى الحالة العامة على حساب الميل عند نقطة x_0 وعند عدة نقاط أخرى قريبة من x_0 ثم أخذ متوسط هذه الميول وضرب ذلك المتوسط فى h ثم إضافة الناتج إلى y_0 لى تحصل على y_1 . ويتلخص ذلك فى حساب :

$$K_i = h \cdot f(x_0 + a_i h, y_0 + b_i k_{i-1}) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, M$$

حيث $a_1 = b_1 = 0$.. وبالتالي :

$$K_{av} = \sum_{i=1}^M c_i k_i \quad , \quad y_1 = y_0 + K_{av}$$

حيث المعاملات a_i, b_i, c_i اختيارية .

(١-١-٥) طريقة رونجا - كوتا من الرتبة الثانية

Second Order Runge - Kutta Method

في هذه الحالة $M = 2$ بمعنى أنه يوجد لدينا k_1, k_2

حيث :

$$k_1 = h \cdot f(x_0, y_0)$$

$$k_2 = h \cdot f(x_0 + a_2 h, y_0 + b_2 k_1)$$

$$k_{av} = c_1 k_1 + c_2 k_2 \quad ; \quad y_1 = h_0 + k_{av}$$

ولإيجاد المعاملات a_2, b_2, c_1, c_2 نقوم أولاً بفك الدالة $f(x_0 + a_2 h, y_0 + b_2 k_1)$ حول النقطة (x_0, y_0) وذلك باستخدام مفكوك تيلور .

$$k_2 = h \cdot f(x_0 + a_2 h, y_0 + b_2 k_1)$$

$$= h \cdot \left[f(x_0, y_0) + a_2 h \cdot \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} + b_2 k_1 \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} + \dots \right]$$

وبالتالي

$$y_1 = y_0 + c_1 k_1 + c_2 k_2$$

$$\begin{aligned} \therefore y_1 &= y_0 + c_1 h \cdot f(x_0, y_0) + c_2 h \left[f(x_0, y_0) + a_2 h \cdot \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} + b_2 k_1 \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} + \dots \right] \\ &= y_0 + (c_1 + c_2) h \cdot f(x_0, y_0) + h^2 \left[c_2 a_2 \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} + c_2 b_2 \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} \right] \dots \dots \dots (1) \end{aligned}$$

وبطريقة أخرى ، من المعادلة الأصلية

$$\frac{dy}{dx} \Big|_{(x_0, y_0)} = f(x_0, y_0)$$

وكذلك

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \left(\frac{dy}{dx} \right)$$

وبالتالي

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} \left(\frac{dy}{dx} \right) \Big|_{(x_0, y_0)}$$

وبفك الدالة y_1 حول النقطة (x_0, y_0) باستخدام مفكوم تيلور .

$$y_1 = y_0 + h \left(\frac{dy}{dx} \right) \Big|_{(x_0, y_0)} + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right) \Big|_{(x_0, y_0)} + \dots$$

وبالتعويض عن التفاضلات التامة في المفكوك السابق

$$\therefore y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0) + h^2 \left[\frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} + \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} \left(\frac{dy}{dx} \right) \Big|_{(x_0, y_0)} \right] + \dots \quad (2)$$

وبمقارنة (1) مع (2) نحصل على المعادلات

$$c_1 + c_2 = 1 \quad ; \quad c_2 a_2 = \frac{1}{2} \quad , \quad c_2 b_2 = \frac{1}{2}$$

وهى ثلاث معادلات غير خطية فى أربعة مجاهيل ولذلك لدينا عدد لا نهائى من الحلول وأحد هذه الحلول اليسيرة هى

$$c_1 = c_2 = 1 \quad , \quad c_2 = b_2 = 1$$

وبالتالى يمكن كتابة طريقة رونجا - كوتا من الرتبة الثانية كالتالى :

$$\text{معلوم : } y' = f(x, y) \text{ حيث } y(x_0) = y_0$$

ومطلوب إيجاد y_1 عند x_1

$$h = x_1 - x_0 \quad \text{(i) احسب :}$$

$$k_1 = h \cdot f(x_0, y_0) \quad \text{(ii) احسب :}$$

$$k_2 = h \cdot f(x_0 + h, y_0 + k_1) \quad \text{(iii) احسب :}$$

$$\text{(iv) احسب المتوسط الحسابى للقيمتين } k_1, k_2$$

$$k_{av} = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

$$\text{(v) احسب } y_1 \text{ من العلاقة}$$

$$y_1 = y_0 + k_{av}$$

والخطوات السابقة يمكن تنفيذها من خلال الأمثلة التالية :

مثال (٥-١) : استعمل طريقة رونجا - كوتا من الرتبة الثانية للحصول على y عند $x = 0.6$ وعند $x = 0.8$ وذلك إذا كان $y' = \sqrt{x+y}$ وكان $y(0.4) = 0.41$.

الحل :

من البيانات المُعطاة :

$$x_0 = 0.4 \quad , \quad x_1 = 0.6 \quad , \quad y_0 = 0.41 \quad , \quad h = x_1 - x_0 = 0.6 - 0.4 = 0.2$$

وبالتالي :

$$K_1 = h \cdot f(x_0, y_0) = 0.2 \sqrt{x_0 + y_0} = 0.2 \sqrt{0.4 + 0.41} = 0.18$$

$$K_2 = h \cdot f(x_0 + h, y_0 + K_1) = 0.2 \sqrt{(0.4 + 0.2) + (0.41 + 0.18)} = 0.2182$$

$$\therefore y_1 = y_0 + \frac{1}{2}(K_1 + K_2) = 0.41 + \frac{1}{2}(0.18 + 0.2182) = 0.6091$$

وبالتالي :

$$y(0.6) = 0.6091$$

وكذلك بأخذ البيانات :

$$x_0 = 0.6 \quad , \quad x_1 = 0.8 \quad , \quad y_0 = 0.6091 \quad , \quad h = x_1 - x_0 = 0.8 - 0.6 = 0.2$$

وبالتالي :

$$K_1 = 0.2 \sqrt{0.6 + 0.6091} = 0.2199$$

$$K_2 = 0.2 \sqrt{(0.6 + 0.2) + (0.6091 + 0.2199)} = 0.2553$$

$$\therefore y_1 = y_0 + \frac{1}{2}(K_1 + K_2) = 0.6091 + \frac{1}{2}(0.2199 + 0.2553) = 0.8467$$

أى أن :

$$y(0.8) = 0.8467$$

مثالا (٢-٥) استخدم طريقة رونجا - كوتا من الرتبة الثانية لحساب $y(0.6)$ وذلك إذا كان $y' = y + x^2$ وكان $y(0.5) = 1$ (يراعى الاحتفاظ بستة أرقام عشرية) .

الحل :

يجب أولاً وضع المعادلة المعطاة على الصورة $y' = f(x, y)$

$$y' = \frac{y}{x} + x$$

ويكون :

$$x_0 = 0.5, \quad y_0 = 1.0, \quad x_1 = 0.6, \quad f(x, y) = \frac{y}{x} + x$$

$$\therefore h = 0.6 - 0.5 = 0.1$$

$$K_1 = h \cdot f(x_0, y_0) = h \left(\frac{y_0}{x_0} + x_0 \right)$$

$$= (0.1) \left(\frac{1}{0.5} + 0.5 \right) = 0.25$$

$$K_2 = h \cdot f(x_0 + h, y_0 + k_1) = h \left(\frac{y_0 + k_1}{x_0 + h} + (x_0 + h) \right)$$

$$= (0.1) \left(\frac{(1 + 0.25)}{(0.5 + 0.05)} + (0.5 + 0.1) \right) = 0.287273$$

$$\therefore \text{Kan} = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = \frac{1}{2}(0.25 + 0.287273)$$

$$= 0.268637$$

وبالتالي :

$$y_1 = y_0 + \text{kav}$$

$$= 1 + 0.268637$$

$$\therefore y_1 = 1.268637$$

(٥-١-٢) خوارزمية طريقة رونجا - كوتا من الرتبة الثانية على الحاسب :

يمكن استعمال أكثر من خوارزمية على الحاسب .. فإذا اخترنا الدقة Accuracy فإننا لن نتحكم في زمن البرنامج ، وإذا اخترنا التحكم في زمن البرنامج فلن نتحكم في الدقة . كذلك نستطيع تقديم خوارزمية يجمع بين الإثنين .

أولا : التحكم في وقت البرنامج Time Measure :

(1) برنامج من النوع البسيط : هذا البرنامج يحسب y_1 عند x_1 ثم ينهي عمله .

PROGRAM (In Basic Code)

10 INPUT X0,Y0,X1

20 H=X1-X0

30 K1=H*..... ← صورة الدالة عند (x_0,y_0)

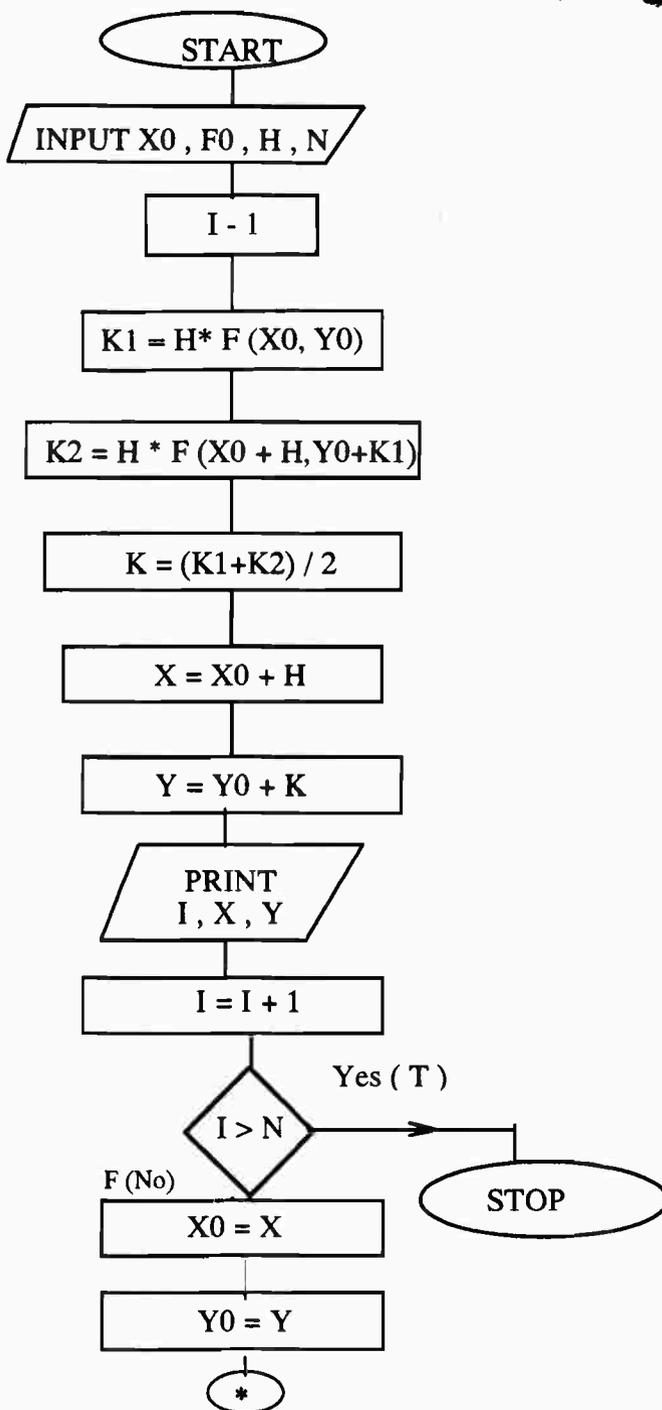
40 K2=H* ← صورة الدالة عند $(x_0 + h,y_0+K_1)$

50 Y1=Y0+0.5*(K1+K2)

60 PRINT Y1

70 STOP

ملاحظة : يمكن كتابة صورة الدالة مكتوبة بأوامر لغة BASIC أو استعمال التعليمة DEF FN في أول البرنامج . يمكن الرجوع إلى أحد مراجع لغة BASIC لتنفيذ ذلك .



Flow Chart of second - order Runge - Kutte Method

(2) برنامج لحساب y_i عند x_i حيث $x_i = x_0 + ih$ ، $i = 1, 2, 3, \dots, N$

PROGRAM (In BASIC Code)

```

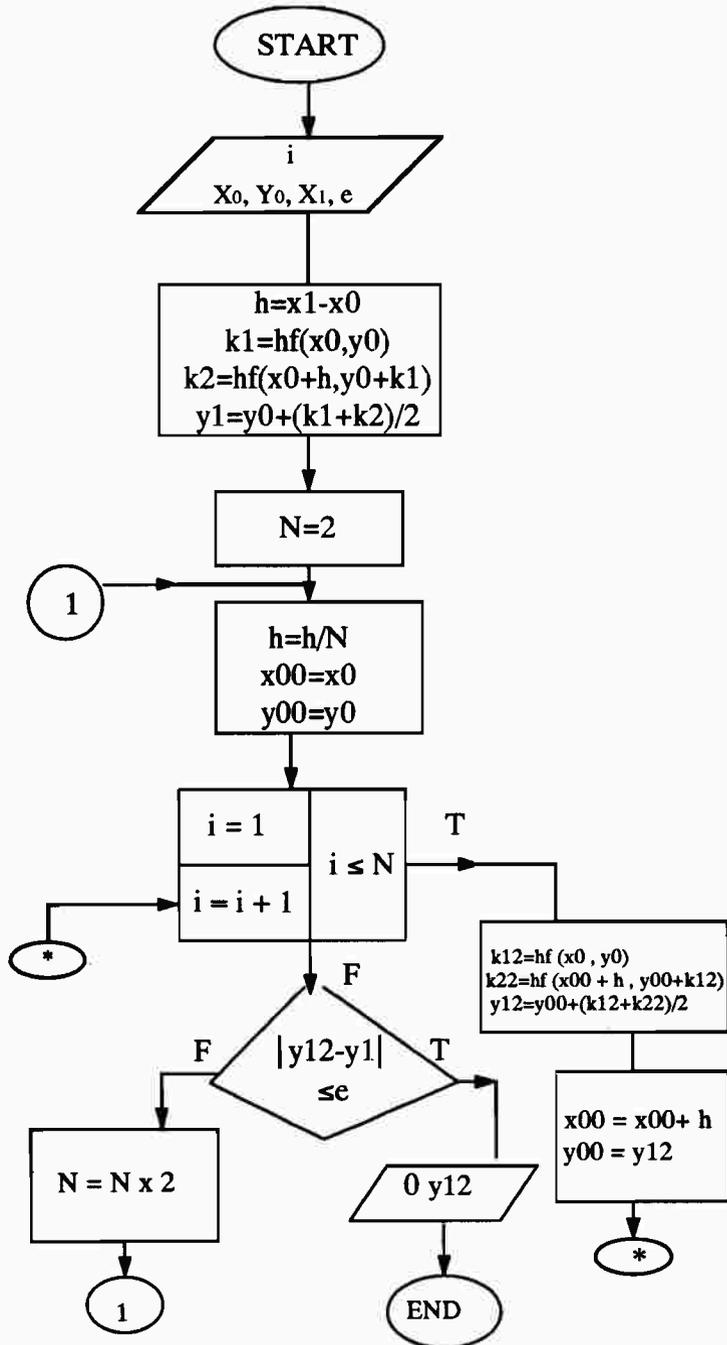
10  INPUT X0,Y0,H,N
20  FOR I=1 TO N
30  K1 = H * F (X0,Y0) ←      تعطى فى المسألة
40  K2 = H * F (X0+H,Y0+K1)
50  K = (K1 + K2) / 2
60  Y = Y0 + K
70  X = X0 + H
80  PRINT  I , X , Y
90  X0 = X   : Y0 = Y
100 NEXT I
110  END

```

ثانيا : تحقيق دقة معينة Accuracy Measure :

تقوم فكرة هذا الخوارزمى لحل المسألة البسيطة المعلوم فيها (x_0 , y_0) والمطلوب الحل عند (x_1 , y_1) على أساس حساب $h = x_1 - x_0$ ثم نقوم بتصنيف المسافة بين x_1 , x_0 ، أى جعل $h \rightarrow \frac{h}{2}$ ثم حساب y_{12} النهائية بتطبيق رونجا - كوتا مرتين ثم قياس الدقة المطلوبة من الشرط الرياضى $|y_{12} - y_1| \leq e$ حيث e خطأ مُعطى يحقق الدقة المطلوبة . فإذا تحقق الشرط ، إنتهى البرنامج وإذا لم يتحقق قمنا بالتصنيف مرة أخرى : $h \rightarrow \frac{h}{4}$ ثم نحسب y_{12} النهائية بتطبيق رونجا - كوتا أربع مرات ، وهكذا يستمر البرنامج . وبالطبع لا نعرف مُسبقا كمية الوقت المطلوبة للحساب ولكننا نخرج بالدقة المطلوبة . والخوارزمى التالى يحقق هذا الشرح .

Flow Chart



PROGRAM (In BASIC Code)

```

10 INPUT X0,Y0,X1,E
20 H=X1-X0
30 K1=H*F(X0,Y0) ← تُعطى
40 K2=H*F(X0+H,Y0+K1) ←
50 Y1=Y0+0.5*(K1+K2)
60 N=2
70 H=H/N
80 X00=X0
90 Y00=Y0
100 FOR I=1 TO N
110 K12=H*F(X00,Y00)
120 K22=H*F(X00+H,Y00+K12)
130 Y12=Y00+0.5*(K12+K22)
140 X00=X00+H
150 Y00=Y12
160 NEXT I
170 IF ABS (Y12-Y1)<=E THEN 200 ELSE 180
180 N=N*2
190 GO TO 70
200 PRINT Y12
210 STOP

```

(٣-١-٥) طريقة رونجا - كوتا من الرتبة الرابعة

Fourth - order Runge - Kutta Method

وتتميز هذه الطريقة بأنها أعلى دقة من الطريقة السابقة ولكنها تتطلب حسابات أكثر .

بوضع $M = 4$ فى الصيغة العامة نجد أن

$$k_1 = h.f(x_0, y_0)$$

$$k_2 = h.f(x_0 + a_2h, y_0 + b_2k_1)$$

$$k_3 = h.f(x_0 + a_3h, y_0 + b_3k_2)$$

$$k_4 = h.f(x_0 + a_4h, y_0 + b_4k_3)$$

$$k_{av} = c_1k_1 + c_2k_2 + c_3k_3 + c_4k_4$$

ومن ثم

$$y_1 = y_0 + k_{av}$$

ويمكن تحديد المعاملات فى الصيغ السابقة باتباع نفس السلوب الذى استخدم فى إيجاد المعاملات الخاصة بطريقة رونجا - كوتا من الرتبة الثانية لنحصل على :

$$c_1 = 1/6 \quad , \quad c_2 = 2/6 \quad , \quad c_3 = 2/6 \quad , \quad c_4 = 1/6$$

$$a_2 = a_3 = 1/2 \quad , \quad b_2 = b_3 = 1/2 \quad , \quad a_4 = b_4 = 1$$

وبالتالى :

$$k_1 = h.f(x_0, y_0)$$

$$k_2 = h.f(x_0 + h/2, y_0 + k_1/2)$$

$$k_3 = h.f(x_0 + h/2, y_0 + k_2/2)$$

$$k_4 = h.f(x_0 + h, y_0 + k_3)$$

$$k_{av} = \frac{1}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4]$$

$$y_1 = y_0 + k_{av}$$

مثال (٥-٣) : باستخدام طريقة رونجا - كوتا من الرتبة الرابعة احسب y عند $x = 0.6$ وذلك إذا كان

$$y' = \sqrt{x+y} \quad , \quad y(0.4) = 0.41$$

الحل : من المسألة :

$$x_0 = 0.4 \quad , \quad y_0 = 0.41 \quad , \quad x_1 = 0.6 \quad , \quad f(x, y) = \sqrt{x+y}$$

$$\therefore h = 0.6 - 0.4 = 0.2$$

ويكون :

$$k_1 = h \cdot f(x_0, y_0) = h \sqrt{x_0 + y_0}$$

$$= 0.2\sqrt{0.4+0.41} = 0.18$$

$$k_2 = h \cdot f(x_0 + h/2, y_0 + k_1/2) = h \sqrt{(x_0 + h/2) + (y_0 + k_1/2)}$$

$$= 0.2\sqrt{(0.4+0.1) + (0.41+0.09)} = 0.2$$

$$k_3 = h \cdot f(x_0 + h/2, y_0 + k_2/2) = h \sqrt{(x_0 + h/2) + (y_0 + k_2/2)}$$

$$= 0.2\sqrt{(0.4+0.1) + (0.41+0.1)} = 0.200998$$

$$k_4 = h \cdot f(x_0 + h, y_0 + k_3) = h \sqrt{(x_0 + h) + (y_0 + k_3)}$$

$$= 0.2\sqrt{(0.4+0.2) + (0.41+0.200998)} = 0.220091$$

$$k_{av} = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$= 0.200348$$

وبالتالى :

$$y_1 = y_0 + k_{av}$$

$$= 0.41 + 0.200348$$

$$= 0.610348$$

مثال (٥-٤) : إذا كان $y' = 4\sqrt{x} + 5\sqrt{y}$ وكان $y = 1.21$ عند $x = 0.36$ أحسب y عند $x = 0.4$ مستخدماً

(١) طريقة رونجا - كوتا من الرتبة الثانية

(٢) طريقة رونجا - كوتا من الرتبة الرابعة

(يراعى الاحتفاظ بأربعة أرقام عشرية) .

الحل : من المسألة :

$$x_0 = 0.36 \quad , \quad y_0 = 1.21 \quad , \quad x_1 = 0.4 \quad , \quad f(x,y) = 4\sqrt{x} + 5\sqrt{y}$$

$$\therefore h = 0.4 - 0.36 = 0.04$$

أولا : باستخدام طريقة رونجا - كوتا من الرتبة الثانية

$$k_1 = h \cdot f(x_0, y_0) = h (4\sqrt{x_0} + 5\sqrt{y_0})$$

$$= 0.04 [4\sqrt{0.36} + 5\sqrt{1.21}] = 0.316$$

$$k_2 = h \cdot f(x_0 + h, y_0 + k_1) = h [4\sqrt{x_0 + h} + 5\sqrt{y_0 + k_1}]$$

$$= (0.04) [4\sqrt{0.36 + 0.04} + 5\sqrt{1.21 + 0.316}] = 0.3483$$

$$k_{av} = \frac{1}{2} (k_1 + k_2) = 0.3321$$

$$\therefore y_1 = y_0 + k_{av} = 1.5421$$

ثانيا : باستخدام طريقة رونجا - كوتا من الدرجة الرابعة

$$k_1 = h.f(x_0, y_0) = 0.316$$

$$k_2 = h.f(x_0 + h/2, y_0 + k_1/2) = h \left[4\sqrt{x_0 + h/2} + 5\sqrt{y_0 + k_1/2} \right]$$

$$= 0.04 \left[4\sqrt{0.36 + 0.02} + 5\sqrt{1.21 + 0.158} \right] = 0.3326$$

$$k_3 = h.f(x_0 + h/2, y_0 + k_2/2) = h \left[4\sqrt{x_0 + h/2} + 5\sqrt{y_0 + k_2/2} \right]$$

$$= (0.04) \left[4\sqrt{0.36 + 0.02} + 5\sqrt{(1.21 + 0.1663)} \right] = 0.3333$$

$$k_4 = h.f(x_0 + h, y_0 + k_3) = h \left[4\sqrt{x_0 + h} + 5\sqrt{y_0 + k_3} \right]$$

$$= (0.04) \left[4\sqrt{(0.36 + 0.04)} + 5\sqrt{1.21 + 0.3333} \right] = 0.3497$$

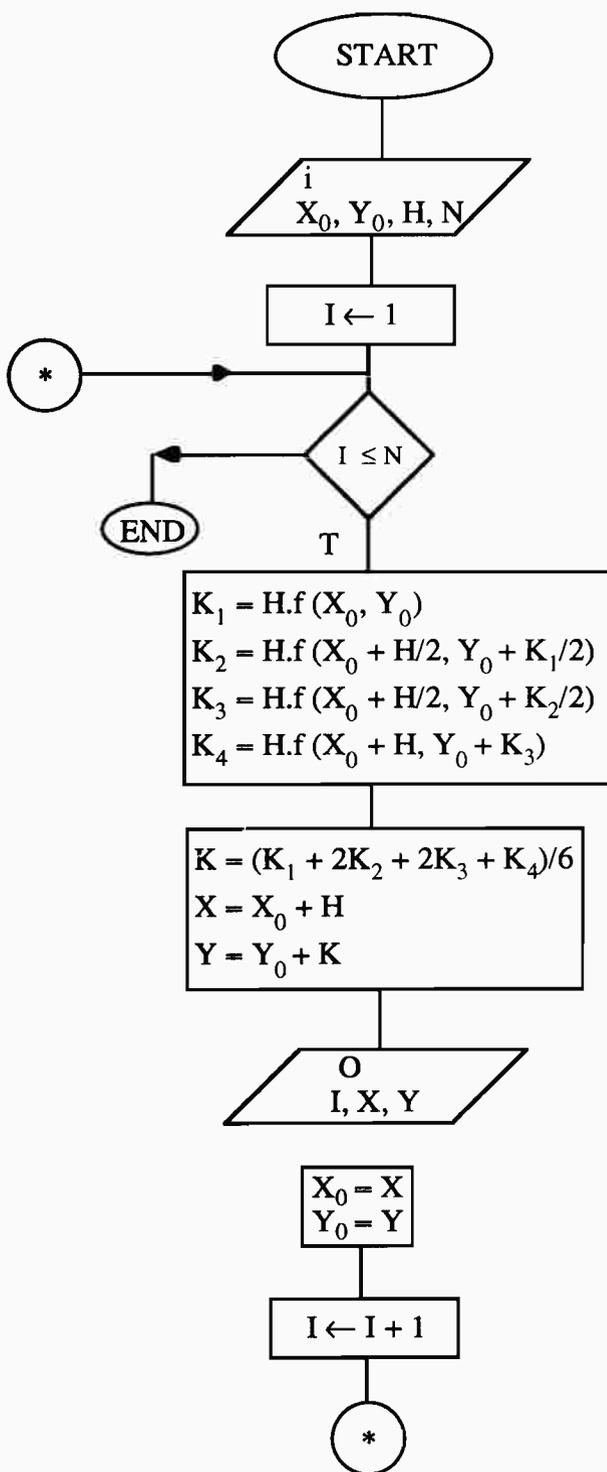
$$k_{av} = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 0.3329$$

$$y_1 = y_0 + k_{av} = 1.5429$$

(٥-١-٣) خوارزمية طريقة رونجا - كوتا من الرتبة الرابعة على الحاسب.

برنامج لحساب y_i عند x_i حيث

$$x_i = x_0 + ih, \quad i = 1, 2, \dots, N$$



Program (In BASIC Code)

```

10 INPUT X0,Y0,H,N
20 FOR I = 1 TO N
30 K1 = H*F(X0,Y0) ← تعطى فى المسألة
40 K2 = H * F(X0+H/2,Y0+K1/2)
50 K3 = H * F(X0+H/2,Y0+K2/2 )
60 K4 = H * F(X0+H,Y0+K3)
70 K = (K1+2*K2+2*K3+K4) / 6
80 X = X0 + H
90 Y = Y0 + K
100 PRINT I , X , Y
110 X0 = X
120 Y0 = Y
130 NEXT I
140 STOP

```

(٥-١-٤) خطأ الاقتران فى طريقة رونجا - كوتا

Local Truncation Error of Runge - Kutta Method

يتواجد خطأ الاقتران نتيجة الاكتفاء بعدد معين من الحدود فى مفكوك تيلور وإهمال باقى الحدود وذلك اثناء إثبات صيغتي رونجا - كوتا من الرتبة الثانية : يكون الخطأ فى حدود (h^2) ويكتب على الصورة " order of (h^2) " أو باختصار " $O(h^2)$ " بينما فى طريقة رونجا كوتا من الرتبة الرابعة فإنه يكون فى حدود (h^4) أو " $O(h^4)$ ". وهذا يعنى أنه لتقليل هذا النوع من الأخطاء نجعل h صغيرة بقدر الإمكان .

ونلاحظ أنه في طريقة رونجا - كوتا من الرتبة الثانية نحصل على خطأ " $O(h^2)$ " ويلزم في كل خطوة عمليتين حسابيتين على الدالة f . بينما في طريقة رونجا - كوتا من الرتبة الرابعة نحصل على خطأ أقل " $O(h^4)$ " ولكن يلزم في كل خطوة أربعة عمليات حسابية على الدالة f .

ومن خلال المثال التالي سيتضح لنا مدى التحسن في الدقة التي نحصل عليها نتيجة استخدام طريقة رونجا - كوتا من الرتبة الرابعة مقارنة مع طريقة الرتبة الثانية .

مثال (٥-٥) : إذا كان $y' = -y + x + 1$ وكان $y(0) = 1$

فأوجد $y(0.1)$ وذلك مستخدماً

(١) طريقة رونجا - كوتا من الرتبة الثانية ،

(٢) طريقة رونجا - كوتا من الرتبة الرابعة ،

وإذا كان الحل التحليلي للمعادلة التفاضلية السابقة هو $y_c = x + e^{-x}$

فأوجد الخطأ النسبي في إجابتك السابقة .

الحل : من المسألة :

$$x_0 = 0 , \quad y_0 = 1 , \quad x_1 = 0.1 , \quad f(x,y) = -y+x+1$$

$$h = 0.1 - 0 = 0.1$$

(i) باستخدام طريقة رونجا - كوتا من الرتبة الثانية

$$k_1 = h.f(x_0, y_0) = h[-y_0 + x_0 + 1]$$

$$= (0.1)[-1 + 0 + 1] = 0$$

$$k_2 = h.f(x_0 + h, y_0 + k_1)$$

$$= h[-(1+0) + (0+0.1) + 1] = 0.01$$

$$k_{av} = \frac{1}{2} (k_1 + k_2) = 0.01$$

$$y_1 = y_0 + k_{av}$$

$$\therefore y_1 = 1.01$$

(ii) باستخدام طريقة رونجا - كوتا من الرتبة الرابعة

$$k_1 = h.f(x_0, y_0) = 0$$

$$k_2 = h.f(x_0 + h/2, y_0 + k_1/2)$$

$$= 0.1 [-(1+0) + (0+0.05)+1] = 0.005$$

$$k_3 = h.f(x_0 + h/2, y_0 + k_2/2)$$

$$= 0.1 [-(1+0.0025) + (0+0.05)+1] = 0.00475$$

$$k_4 = h.f(x_0 + h, y_0 + k_3)$$

$$= (0.1) [-(1+0.00475) + (0+0.01)+1] = 0.009525$$

$$k_{av} = (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) / 6 = 0.0048375$$

وبالتالى :

$$y_1 = y_0 + k_{av}$$

$$\therefore y_1 = 1.0048375$$

والآن بمعلومية الحل المضبوط (التحليلي) $y_e = x + e^{-x}$ فبوضع $x = 0.1$ نحصل على

$$(y_1)_e = (0.1) + e^{-0.1} = 1.0048374$$

• ويكون مقدار الخطأ الفعلى فى طريقة رونجا - كوتا من الرتبة الثانية

$$E = |1.0048374 - 1.01|$$

$$= 0.0051626$$

وبالتالي فإن الخطأ النسبي يكون

$$E_r = \frac{0.0051626}{1.0048375}$$

$$\approx 5.14\%$$

* بينما يكون مقدار الخطأ الفعلي في طريقة رونجا - كوتا من الرتبة الرابعة

$$E = |1.0048374 - 1.0048375|$$

$$= 0.0000001$$

وبالتالي فإن الخطأ النسبي يكون

$$E_r = \frac{0.0000001}{1.0048375}$$

$$\approx 0.00001\%$$

(٥-٢) طريقة مفكوك تيلور من الرتبة النونية

Method of n^{th} Order Taylor Expansion

نفرض أن المعادلة التفاضلية

$$y' = f(x, y) \quad y(x_0) = y_0$$

لها الحل $y(x)$ وأن هذا الحل له $(n+1)$ من المشتقات المتصلة بكتابة مفكوك الدالة $y(x)$ بدلالة كثيرة (حدود) تيلور من الدرجة n حول النقطة x_1 حيث $x_1 = x_0 + h$

$$y(x_1) = y(x_0) + \frac{h}{1!} y'(x_0) + \frac{h^2}{2!} y''(x_0) + \frac{h^3}{3!} y'''(x_0) + \dots + \frac{h^n}{n!} y^{(n)}(x_0) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} y^{(n+1)}(\xi), x_0 \leq \xi \leq x_1$$

من المعادلة المعطاة

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

وبالاشتقاق المتتالي لهذه المعادلة نحصل على

$$y''(x) = f'(x, y)$$

$$y'''(x) = f''(x, y)$$

وعامة :

$$y^{(k)}(x) = f^{(k-1)}(x, y)$$

وبالتعويض بتلك المشتقات في مفكوك تيلور السابق

$$\therefore y(x_1) = y(x_0) + \frac{h}{1!} f(x_0, y_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0, y_0) + \frac{h^3}{3!} f'''(x_0, y_0) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0, y_0) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi, y(\xi)), x_0 \leq \xi \leq x_1$$

مثال (٥-٦) : باستخدام مفكوك تيلور حتى الرتبة الرابعة أوجد $y(0.1)$ وذلك إذا كان

$$y' = -y + x + 1$$

$$y(0) = 1$$

الحل :

من المسألة

$$x_0 = 0 , \quad y_0 = 1 , \quad x_1 = 0.1 , \quad f(x,y) = -y + x + 1$$

$$\therefore h = 0.1$$

ومن المسألة

$$y' = -y + x + 1$$

$$\therefore y'(x_0, y_0) = -y_0 + x_0 + 1 = 0$$

بالاشتقاق مرة أخرى

$$Y'' = -Y' + 1$$

$$\therefore Y''(X_0, Y_0) = -Y'_0 + 1 = 1$$

$$Y''' = -Y'' + 0$$

بالاشتقاق مرة أخرى

$$\therefore Y'''(X_0, Y_0) = -Y''(X_0, Y_0) = -1$$

وأخيرا

$$y^{(4)} = -y''''$$

$$\therefore y^{(4)}(x_0, y_0) = -y''''(x_0, y_0) = 1$$

بالتعويض في المفكوك

$$\therefore y(x_1) = y_0 + \frac{h}{1!} y_0' + \frac{h^2}{2!} y_0'' + \frac{h^3}{3!} y_0''' + \frac{h^4}{4!} y_0^{(4)}$$

نحصل على

$$y(0.1) = 1 + \frac{0.1}{1!}(0) + \frac{(0.1)^2}{2!}(1) + \frac{(0.1)^3}{3!}(-1) + \frac{(0.1)^4}{4!}(1)$$

$$\therefore y(0.1) = 1.0048375$$

مثال (٥-٧) : باستخدام مفكوك تيلور حتى الرتبة الثانية أوجد $y(0.6)$ وذلك إذا كان

$$xy' = y + x^2, \quad y(0.5) = 1$$

الحل :

لتيسير الاشتقاق نترك المعادلة المعطاة كما هي $xy' = y + x^2$ بدلاً من وضعها على الصورة

$$y' = \frac{y}{x} + x$$

من معلومات المسألة : $x_1 = 0.6$, $x_0 = 0.5$, $y_0 = 1$

$$\therefore h = 0.6 - 0.5 = 0.1$$

ومن المعادلة المعطاة

$$x_0 y_0' = y_0 + x_0^2$$

$$\therefore (0.5)y_0' = (1) + (0.5)^2$$

وبالتالى

$$y_0' = 2.5$$

$$x y'' + y' = y' + 2x$$

وبالاشتقاق مرة أخرى للمعادلة الأصلية .

$$x y'' = 2x$$

أى أن

$$y'' = 2$$

$$y_0'' = 2$$

وبالتالى :

وبالتعويض فى مفكوك تيلور حتى الرتبة الثانية

$$y(x_1) \approx y_0 + \frac{h}{1!} y_0' + \frac{h^2}{2!} y_0''$$

$$\therefore y(0.6) = 0.1 + (0.1)(2.5) + \frac{(0.1)^2}{2}(2)$$

$$y(0.6) = 1.26$$

* * * * *

تمارين عامة على الباب الخامس

(١) إذا كان $y' = \frac{x^2}{y^2} + \sqrt{x}$ وكانت $y(1) = 1.21$ فأوجد y عند $x = 1.2$ ، 1.4 مستخدماً طريقة رونجا - كوتا من الرتبة الثانية .

(٢) أعتبر المعادلة التفاضلية :

$$y' = (x + y) , \quad y(0) = 0$$

(i) أحسب $y(0.1)$ وذلك باستخدام طريقة رونجا - كوتا من الرتبة الرابعة .

(ii) إذا علمت أن الحل التحليلي للمعادلة المعطاه هو $y = e^x - x - 1$ فأوجد الخطأ النسبى فى الاجابة التى حصلت عليها وكيف يمكننا تقليل هذا الخطأ .

(iii) ارسم خوارزمى يعبر عن طريقة الحل فى الجزء (i)

(٣) أوجد $y(0.8)$ وذلك إذا كان

$$y' = \frac{y}{\sqrt{x+y}} , \quad y(0.4) = 10.5$$

مستخدماً (i) رونجا - كوتا من الرتبة الثانية .

(ii) رونجا - كوتا من الرتبة الرابعة .

(٤) إذا كان $y' = 4\sqrt{x} + 5\sqrt{y}$ وكانت $y(0.36) = 1.21$ فأوجد $y(0.4)$ وذلك باستخدام طريقة تيلور حتى الرتبة الثانية . وضع كيف يمكن زيادة دقة الحل ؟

(٥) إذا كان $y' = \sin x + e^{-x}$ وكانت $y(0) = 0$ فأوجد $y(0.2)$ وذلك مستخدماً

(i) طريقة رونجا - كوتا من الرتبة الرابعة .

(ii) طريقة تيلور حتى الرتبة الرابعة .

(iii) إذا علمت أن الحل التحليلي للمعادلة المعطاه هو $y = -\cos x - e^{-x} + 2$

وضح أى من الحلين فى (i) أو (ii) هو الأتق .

(٦) إذا كان $y' = 1 + x \sin(x y)$ وكانت $y(0) = 0$ فأوجد $y(0.5)$ مستخدماً طريقة

رونجا - كوتا من الرتبة الثانية .

(٧) باستخدام طريقة رونجا - كوتا من الرتبة الرابعة أوجد $y(0.2)$ وذلك إذا كان

$$y' = 1 - y, \quad y(0) = 0$$

أعد حل المسألة السابقة مستخدماً طريقة تيلور حتى الرتبة الخامسة .

(٨) فى المسألة السابقة . أوجد الحل التحليلي للمعادلة التفاضلية $y' = 1 - y$ ثم قارن دقة

الحل للطرق الآتية :

(i) طريقة رونج كوتا من الرتبة الثانية أخذاً $h = .2$

(ii) طريقة رونج كوتا من الرتبة الثانية أخذاً $h = .1$

(iii) طريقة رونج كوتا من الرتبة الرابعة أخذاً $h = .2$

(iv) طريقة مفكوك تيلور حتى الرتبة الثانية ($h = .2$)

* * * * *