

الباب السادس

توفيق المنحنيات

CURVE FITTING

(٦-١) مقدمة INTRODUCTION :

فى كثير من المسائل العلمية يكون الموجود من علاقة بين متغير مستقل x ومتغير تابع y هو مجرد جدول ناشئ من تجربة معملية أو قياسات خارجية ... إلخ ، بحيث يكون المعلوم هو الأقراس (x_i, y_i) حيث $i = 0, 1, 2, \dots, m$ والمطلوب هو توفيق هذه النقاط للحصول على المنحنى الأمثل Optimal Curve من نوع معين : مثلاً : أمثل خط مستقيم " يوفق هذه النقاط أو " أمثل حدودية درجة ثانية " .. وهكذا . هذا معناه أن هذا المنحنى لا يجب أن يمر بهذه النقاط (وهو ما يميز هذه المسألة عن الاستكمال) ولكن يمر بين النقاط بحيث يكون مقياس للخطأ عن عدم مروره بها يكون أقل ما يمكن . ويمكننا استعمال قواعد Bases عدّة لهذا المنحنى ولتكن عامة ممثلة بالمتوالية $\{\phi_i(x)\}_{i=0}^n$ ويجب أن تكون قواعد هذا النظام متعامدة وكافية لوصف جميع نقط الفراغ بدالاتها .. أى أن المنحنى الذى نريد الحصول عليه - وهو المنحنى الأمثل وليكن $F(x)$ - يمكن فكّه بقواعد هذا النظام كالتالى :

$$F(x) = \sum_{i=0}^n a_i \phi_i(x) \quad (1)$$

فيكون المطلوب هو كيفية حساب $\{a_i\}$ التى تجعل مقياساً للخطأ أقل ما يمكن .

(٦-٢) مقياس خطأ أدنى المربعات :

LEAST SQUARES ERROR MEASUR

ويُعرف مقياس الخطأ هذا كالتالي :

$$\delta_2^2 = \sum_{i=1}^n |F(x_i) - f(x_i)|^2 \quad (2)$$

والتجميع هنا على كل النقاط الموجودة بالجدول . لاحظ أننا بهذا المقياس للخطأ نجمع مربعات الأخطاء عند كل نقطة بين المنحنى التوفيقى $F(x)$ ونقاط الجدول (المتغير التابع) $f(x_i)$. ولاحظ أيضا أن المجهول في هذه الصيغة لحساب δ_2^2 هو معاملات $F(x)$ من الصيغة السابقة (في (1)) ، إذ أنه إذا كانت $f(x)$ معطاه على هيئة نقاط جدولية ، فإن $f(x_i) = y_i$ وبالتالي تأخذ العلاقة (2) الصورة التالية :

$$\delta_2^2 = \sum_i [a_0 \phi_0(x_i) + a_1 \phi_1(x_i) + \dots + a_n \phi_n(x_i) - y_i]^2 \quad (3)$$

ولإيجاد المعاملات $\{a_i\}$ فإننا نحسبها بحيث يكون δ_2^2 أقل ما يمكن وهو ما يؤدي إلى أن يكون δ_2 أيضا أقل ما يمكن . وذلك يحدث بحل المعادلات الاتية :

$$\frac{\partial \delta_2^2}{\partial a_j} = 0 \quad , \quad j = 0, 1, 2, \dots, n \quad (4)$$

وهي $(n + 1)$ من المعادلات الخطية في $(n + 1)$ من المجاهيل . ويمكن إيجاد هذه المعاملات من المعادلات التالية بعد استعمال المعادلات (4) :

$$\frac{\partial \delta_2^2}{\partial a_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_i 2[a_0 \phi_0(x_i) + \dots + a_n \phi_n(x_i) - y_i] \phi_0(x_i) = 0$$

وبإعادة الصياغة تصبح كالتالي :

$$\left[\sum_1 (\varphi_0^2(x_i)) \right] a_0 + \left[\sum_1 (\varphi_1(x_i)) (\varphi_0(x_i)) \right] a_1 + \dots + \left[\sum_1 (\varphi_n(x_i)) (\varphi_0(x_i)) \right] a_n \\ = \sum_1 y_i \varphi_0(x_i) \quad \dots (A_1)$$

كذلك :

$$\frac{\partial \delta_2^2}{\partial a_1} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\left[\sum_1 (\varphi_0(x_i)) (\varphi_1(x_i)) \right] a_0 + \left[\sum_1 (\varphi_1^2(x_i)) \right] a_1 + \dots + \left[\sum_1 (\varphi_n(x_i)) (\varphi_1(x_i)) \right] a_n \\ = \sum_1 y_i \varphi_1(x_i) \quad \dots (A_2)$$

وهكذا حتى نحصل على المعادلة الأخيرة :

$$\frac{\partial \delta_2^2}{\partial a_n} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\left[\sum_1 (\varphi_0(x_i)) (\varphi_n(x_i)) \right] a_0 + \left[\sum_1 (\varphi_1(x_i)) (\varphi_n(x_i)) \right] a_1 + \dots + \left[\sum_1 (\varphi_n(x_i)) \right] a_n \\ = \sum_1 y_i \varphi_n(x_i) \quad \dots (A_{n+1})$$

وهي (n+1) من المعادلات في (n+1) من المجاهيل يمكن كتابتها في صورة مصفوفية كالتالي

$$\begin{bmatrix} \sum \phi_0^2 & \sum \phi_1 \phi_0 & \sum \phi_2 \phi_0 & \dots & \dots & \sum \phi_n \phi_0 \\ \sum \phi_0 \phi_1 & \sum \phi_1^2 & \sum \phi_2 \phi_1 & \dots & \dots & \sum \phi_n \phi_1 \\ \sum \phi_0 \phi_2 & \sum \phi_1 \phi_2 & \sum \phi_2^2 & \dots & \dots & \sum \phi_n \phi_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum \phi_0 \phi_n & \sum \phi_1 \phi_n & \sum \phi_2 \phi_n & \dots & \dots & \sum \phi_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y \phi_0 \\ \sum y \phi_1 \\ \sum y \phi_2 \\ \dots \\ \dots \\ \sum y \phi_n \end{bmatrix}$$

وتُكتب هذه المعادلات رمزياً كالتالي :

$$N\mathbf{A} = \mathbf{Y}$$

وتُسمى N بالمصفوفة القياسية Normal Matrix ، كما تُسمى المعادلات بالمعادلات القياسية Normal Equations . وللحصول على المتجه \mathbf{A} الذي به المعاملات المجهولة نتبع أي طريقة من طرق حل المعادلات السابق ذكرها في الباب الثاني .

$$(٦-٢-١) \text{ استخدام القواعد } \{x^i\}_{i=0}^n :$$

تكون الحدودية $F(x)$ في الصورة :

$$F(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + \dots + a_nx^n$$

وتأخذ المعادلات الصورة المصفوفية التالية:

$$\begin{bmatrix} (m+1) \sum x_i & \sum x_i^2 & \dots & \dots & \sum x_i^n \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \dots & \dots & \sum x_i^{n+1} \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 & \dots & \dots & \sum x_i^{n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum x_i^n & \sum x_i^{n+1} & \sum x_i^{n+2} & \dots & \dots & \sum x_i^{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \\ \sum x_i^2 y_i \\ \dots \\ \dots \\ \sum x_i^n y_i \end{bmatrix}$$

حيث $(m+1)$ هي عدد النقاط والتجميع على عدد النقاط. ويمكن إعداد جدول خاص يمكن حساب التجميعات منه بسهولة.

ويمكن كتابة حالة خاصة سريعة الحساب كالآتي:

دع $F(x) = a_0 + a_1 x$ هو أحسن خط مستقيم توفيقى للبيانات المعطاه، وبالتالي تكون المعادلات الطبيعية هي:

$$\begin{bmatrix} (m+1) \sum x & \sum x^2 \\ \sum x & \sum x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y \\ \sum xy \end{bmatrix}$$

وبالتالى يكون:

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\{(m+1)\sum x^2 - (\sum x)^2\}} \cdot \begin{bmatrix} \sum x^2 & -\sum x \\ -\sum x & (m+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum y \\ \sum xy \end{bmatrix}$$

أى أن :

$$a_0 = \frac{1}{\{(m+1)\sum x^2 - (\sum x)^2\}} \cdot [(\sum x^2)(\sum y) - (\sum x)(\sum xy)]$$

$$a_1 = \frac{1}{\{(m+1)\sum x^2 - (\sum x)^2\}} \cdot [(-\sum x^2)(\sum y) + (m+1)(\sum xy)]$$

وشرط وجود الحل هو أن :

$$(m+1)\sum x^2 - (\sum x)^2 \neq 0$$

ويمكن إعداد جدول كالتالي :

x	y	x^2	xy
x_0	y_0	x_0^2	$x_0 y_0$
x_1	y_1	x_1^2	$x_1 y_1$
...
...
x_m	y_m	x_m^2	$x_m y_m$
$\sum x_i$	$\sum y_i$	$\sum x_i^2$	$\sum x_i y_i$

مثال (٦-١) : أوجد أمثل خط مستقيم على مقياس أدنى المربعات δ_2^2 للبيانات التالية :

x	1	2	3	4
y	6.5	9.6	13.8	18.3

الحل :

بتكوين الجدول التالي :

x	y	x ²	xy
1	6.5	1	6.5
2	9.6	4	19.2
3	13.8	9	41.4
4	18.3	16	73.2
10	48.2	30	140.3

وبالتالي تكون المعادلات الطبيعية :

$$\begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 48.2 \\ 140.3 \end{bmatrix}$$

ويكون الحل النهائي :

$$a_0 = 2.15 \quad , \quad a_1 = 3.96$$

وتكون معادلة أمثل خط مستقيم على مقياس δ_2^2 هي :

$$y = 2.15 + 3.96x$$

(٦-٢-٢) إستخدام القواعد $\{P_i\}_{i=0}^n$: قواعد حدوديات لاجندر

Legendre Polynomials

وهذه الحدوديات مُعرفة فى الفترة $(-1,1)$ وهى حدوديات متعامدة من (-1) إلى $(+1)$. أى أن :

$$\int_{-1}^1 P_m(x) \cdot P_n(x) dx = 0 \quad m \neq n$$

وبعض الصور الخاصة لهذه الحدوديات الأولى على الصورة التالية :

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \\ P_1(x) &= x \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \end{aligned}$$

ونلاحظ أن القواعد السابقة $\{x_i^n\}$ تتفق مع القواعد الجديدة $\{P_i(x)\}$ حتى الدرجة الأولى ، فالخط المستقيم الأمثل على مقياس δ_2^2 سيكون منطبقاً بين القاعدتين . ولكن يبدأ الاختلاف بدء من الدرجة الثانية فما فوق .

مثال (٦-٢) : أوجد أمثل حدودية درجة ثانية على قواعد لاجندر وبمقياس δ_2^2 توفيق البيانات التالية :

x	1	3	4	5
y	7.2	22.8	33.6	47.4

الحل :

بإعداد الجدول التالي :

x	y	$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$	xy	P_2y	$P_1^2 - x^2$	P_2^2	xP_2
1	7.2	1	7.2	7.2	1	1	1
3	22.8	13	68.4	296.4	9	169	39
4	33.6	23.5	134.4	789.6	16	552.25	94
5	47.4	37	237.0	1753.8	25	1369	185
13	111	74.5	447	2847	51	2091.25	319

وتكون المعادلات القياسية :

$$\begin{bmatrix} \sum P_0^2 & \sum P_1P_0 & \sum P_2P_0 \\ \sum P_0P_1 & \sum P_1^2 & \sum P_2P_1 \\ \sum P_0P_2 & \sum P_1P_2 & \sum P_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum P_0y \\ \sum P_1y \\ \sum P_2y \end{bmatrix}$$

وباستعمال الصورة الرياضية المعروفة لـ P_0, P_1, P_2 تصبح المعادلات كالتالي :

$$\begin{bmatrix} 4 & \sum x & \sum P_2 \\ \sum x & \sum x^2 & \sum xP_2 \\ \sum P_2 & \sum xP_2 & \sum P_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y \\ \sum xy \\ \sum P_2y \end{bmatrix}$$

ومن الجدول (الذي أعد لحساب التجميعات المطلوبة) نحصل على :

$$\begin{bmatrix} 4 & 13 & 74.5 \\ 13 & 51 & 319 \\ 74.5 & 319 & 2091.25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 111 \\ 447 \\ 2847 \end{bmatrix}$$

وبحل هذه المعادلات (بطريقة جاوس - جوردان مثلا) نحصل على :

$$a_0 = 3.386 \quad , \quad a_1 = 3.068 \quad , \quad a_2 = 0.773$$

وبالتالي :

$$y = (3.386) + (3.068)x + (0.773) \left(\frac{1}{2}\right) (3x^2 - 1)$$

$$\boxed{y = 2.9995 + 3.086x + 1.1595x^2} : \text{والذي يمكن تبسيطه إلى}$$

* * * * *

تمرينات عامة على الباب السادس

(١) باستعمال القواعد $\{x^i\}_{i=0}^n$ ومقياس δ_2^2 أوجد الخط الأمثل الذى يوفِّق البيانات التالية :

x	1	3	4	5
y	7.2	22.8	33.6	47.4

(٢) باستعمال قواعد لاجندر $\{P_i\}_{i=0}^n$ أكتب المعادلات القياسية لمقياس δ_2^2 والتي توفِّق البيانات التالية لمنحنى لدرجة ثانية :

x	1	2	3	4
y	6.5	9.6	12.8	18.3

(٣) أوجد المستقيم ومنحنى الدرجة الثانية والثالثة الأمثل الذى يمثل البيانات

x	1	3	5	10
y	1.5	5.0	6.5	12.5

على مقياس δ_2^2 بطريقتين مختلفتين .

(٤) باستعمال قواعد لاجندر $\{P_i\}_{i=0}^3$ أكتب المعادلات القياسية لتوفيق المنحنى

$$F(x) = \sum_{i=0}^3 a_i P_i(x)$$

لنقاط معطاة m ، $i = 0, 1, \dots, m$ ، (x_i, y_i) بأقل خطأ δ_2^2 . ثم

وفق الخط المستقيم للبيانات :

x	1	2	3
y	3	4.5	2.5

على نفس المقياس والقواعد .

* * * * *