الباب السابع

التكامل العددى Numerical Integration

٧-١ مقدمة

تستخدم طرق التكامل العددى لإيجاد قيمة تقريبية للتكامل المحدود

$$I = \int_a^b f(x)dx \tag{1}$$

حيث أنه فى كثير من الحالات يكون من الصعب إيجاد قيمة التكامل السابق بالطرق التحليلية المعتادة ويرجع ذلك لعدة أسباب منها أن تكون الدالة f (x) من الدوال التى يصعب إيجاد تكاملها بالطرق القياسية مثل الدوال

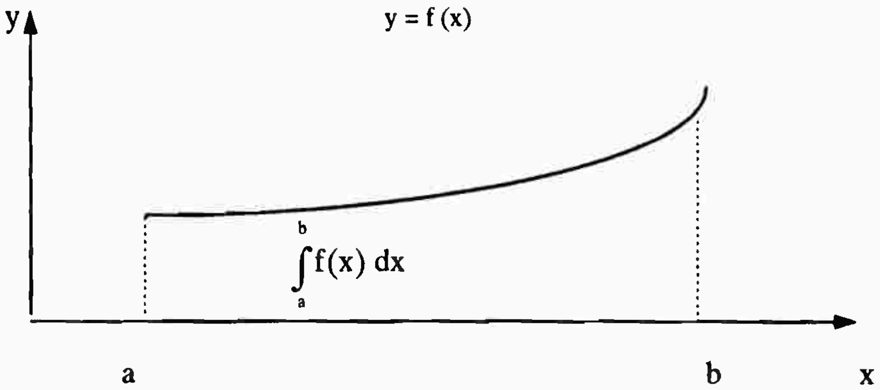
$$e^{-x^2} \quad , \quad \frac{\sin x}{x} \quad , \quad \cos(x^2) \quad , \quad \sqrt{1+\sin^2 x};.......$$

أو أن تكون الصيغة التحليلية للدالة f (x) غير معلومة وإنما يكون معلوم قيم الدالة عند عدد محدد من النقاط أى

$$(x_i , f(x_i)) , \quad i = 0 , 1 , 2 ,............. , n$$

ومن أمثلة ذلك القراءات التى يمكن أن تُسجل خلال التجارب المعملية أو نتيجة لبيانات إحصائية .

ونعلم أن المعنى الهندسى للتكامل المحدود $\int_a^b f(x)dx$ هو قيمة المساحة تحت المنحنى $y = f(x)$ فى الفترة $[a,b]$



ولهذا فإن فكرة التكامل العددى تعتمد على حساب تلك المساحة بطرق تقريبية وذلك بتقسيم الفترة $[a,b]$ إلى عدد محدد n من الفترات الجزئية المتساوية وطول كل منها يساوى h حيث $h = \dfrac{b-a}{n}$. وعلى كل فترة جزئية يتم استبدال الدالة $f(x)$ بدالة أخرى يكون من السهل تكاملها . وفى هذا الباب سوف نرى كيف يمكننا استخدام الاستكمال (أنظر الباب الرابع) لتقريب مثل هذه التكاملات المحدودة وللسهولة سوف نعتبر فقط حدودية الاستكمال الخطى (درجة أولى) أو التربيعى (درجة ثانية) كبديل للدالة $f(x)$ وذلك على كل فترة جزئية .

$$[x_i , x_{i+1}] , \quad i = 0,1,2,\dots,n-1$$

ومن خلال دراستنا السابقة لطريقة نيوتن الأمامية فى باب الاستكمال نعلم أن

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\alpha}{1!}\Delta y_0 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}\Delta^3 y_0$$
$$+ \dots\dots\dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots\dots(\alpha-n+1)}{n!}\Delta^n y_0 \quad \dots\dots\dots \quad (2)$$

حيث

$$y_i = f(x_i) \quad , \quad \alpha = \frac{x - x_0}{h}$$

وبالتعويض عن f (x) فى التكامل المحدود (١) بدالة الاستكمال السابقة نجد أن

$$I = h\int_0^n \left[y_0 + \alpha \Delta y_0 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{3!}\Delta^3 y_0 + \dots\dots\dots\dots \right] d\,\alpha \dots\dots(3)$$

ملاحظة : يترك للقارئ كيفية استنتاج (3)

وبإجراء عملية التكامل نحصل على

$$I = h\left[ny_0 + \frac{n^2}{2}\Delta y_0 + \left(\frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2}\right)\frac{\Delta^2 y_0}{2!} + \left(\frac{n^4}{4} - n^3 + n^2\right)\frac{\Delta^3 y_0}{3!} + \dots\dots \right] \dots\dots(4)$$

ومن الصيغة العامة السابقة يمكن الحصول على عدة قواعد لإيجاد التكامل I وذلك بالتعويض عن قيمة n = 1,2,.... وسنكتفى بدراستنا فى هذا الباب بطريقتين هما :

قاعدة شبه المنحرف Trapezoidal Rule وقاعدة سمبسون Simpson Rule

والقاعدتان تعتمدان على تكوين جدول به عدد (n+1) من النقاط الأساسية كالاتى :

x	x_0	x_1	x_2	x_3	....	x_{n-1}	x_n
f (x)	f_0	f_1	f_2	f_3	....	f_{n-1}	f_n

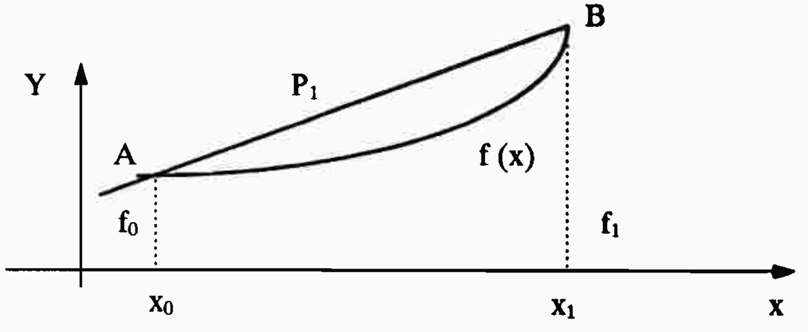
حيث :

$$x_0 = a \quad , \quad x_n = b \quad , \quad h = \frac{b - a}{n}$$

وللتيسير استخدمنا الرمز f_i بدلا من $f(x_i)$ ، ويجب أن نعلم بأنه نتيجة استبدال الدالة الاصلية $f(x)$ بأخرى حدودية $P_n(x)$ فأن هناك أخطاء مصاحبة Inherent Errors للنتائج التى نحصل عليها باستخدام طرق التكامل العددى ومقدار هذه الأخطاء تختلف من طريقة لأخرى تبعاً لدرجة التقريب المستخدمة فى حدودية الاستكمال $P_n(x)$.ذ

٧-٢ قاعدة شبه المنحرف The Trapezoidal Rule

على كل فترة جزئية $[x_i, x_{i+1}]$ $i = 0,1,2,.......,n-1,$ يتم استبدال دالة التكامل $f(x)$ بحدودية استكمال خطية (من الدرجة الأولى) $P_1(x)$ بحيث أن : $f(x_i) = P_1(x_i)$



وهذا يعنى أن المساحة تحت المنحنى $f(x)$ فى الفترة ، ولتكن $[x_0, x_1]$ ، سوف تقرب إلى المساحة تحت المستقيم الواصل بين النقطتين $A(x_0, f_0)$ و $B(x_1, f_1)$.

بوضع $n = 1$ فى الصيغة العامة (4) مع إهمال الفروق ..... , Δ^2, Δ^3 نحصل على

$$I_T = \int_{x_0}^{x_0+h} f\,dx = h\left[y_0 + \frac{1}{2}\Delta y_0\right]$$

$$= h\left[y_0 + \frac{y_1 - y_0}{2}\right]$$

$$\therefore I_T = \frac{h}{2}[y_0 + y_1] \qquad (5)$$

والقاعدة السابقة خاصة بالفترة الجزئية $[\,x_0\,,\,x_1\,]$. وبتطبيق صيغة التكامل على باقى الفترات الجزئية كل على حدة ثم التجميع نحصل على صيغة شبه المنحرف المركبة التالية :

$$I_T = \int_a^b f(x)dx$$

$$= \frac{h}{2}\left[f_0 + f_n + 2\sum_{i=1}^{n-1} f_i\right] \qquad (6)$$

ويتضح من الرسم أنه يوجد خطأ ناتج من الفرق بين المساحة تحت المنحنى $y = f(x)$ والمساحة تحت الخط المستقيم AB . ولتقليل الخطأ فى الفترة $[a,b]$ فأننا نقسم هذه الفترة إلى عدد أكبر من الفترات الجزئية ، مما يعنى أن الخطأ يقل كلما زاد عدد الفترات الجزئية أو كلما صغرت قيمة h حيث $h = \dfrac{b-a}{n}$.

مثال ٧-١ : باستخدام قاعدة شبه المنحرف أوجد $I = \int_4^{5.2} \ln dx$ آخذا $n = 6$ ومحتفظاً بستة أرقام عشرية

الحل :

$a = 4 \quad , \qquad b = 5.2 , \qquad f(x) = \ln x \quad , \qquad n = 6$

$$\therefore h = \frac{b-a}{n} = \frac{5.2-4}{6} = 0.2$$

فى هذا المثال f (x) معلومة فى الصورة التحليلية $f(x) = \ln x$.

نكون الجدول التالى والذى يحتوى على سبعة نقاط أساسية .

x	4	4.2	4.4	4.6	4.8	5.0	5.2
f	1.386294	1.435085	1.481605	1.5260560	1.568616	1.609438	1.648654
	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6

$$I_T = \frac{h}{2}\left[f_0 + f_6 + 2\sum_{i=1}^{5} fi\right]$$

$$\therefore I_T = 1.827655$$

نلاحظ أن القيمة التحليلية (الفعلية) للتكامل السابق هى (عن طريق التجزئ)

$$I_e = \left[x \ \ln \ x - x\right]_4^{5.2} = 1.827842$$

مما يعنى أن الخطأ الفعلى فى القيمة العددية التى حصلت عليها هو:

$$E_e = |I_e - I_T| = |1.827848 - 1.827655| = 0.000193 < \ .5\,(10)^{-3}$$

أى صحيحة لثلاثة منازل عشرية .

مثال ٧-٢ : باستخدام الجدول التالى أوجد $I = \int_{1.6}^{2.1} f(x)dx$

x	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0	2.1
f	4.9539	6.0501	7.3894	9.0256	11.0232	13.4647
	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5

الحل :

من الجدول السابق نجد أن

$$a = 1.6, \qquad b = 2.1, \qquad h = 0.1, \qquad n = 5$$

$$\therefore I_T = \frac{h}{2}\left[f_0 + f_5 + 2\sum_{i=1}^{4} f_i\right]$$

$$\therefore I_T = 4.2698$$

نلاحظ فى هذا المثال أن الصورة التحليلية للدالة f (x) غير معطاه . ولذلك فأنه من الصعب إيجاد الخطأ الفعلى فى قيمة التكامل العددى الذى حصلت عليه ولكننا سنقدم فى الجزء التالى صيغة عددية تمكننا من إيجاد الأخطاء المصاحبة للنتائج التى نحصل عليها باستخدام قاعدة شبه المنحرف والتى يكون من السهل استخدامها خاصةً فى ظل عدم وجود الصيغة التحليلية للدالة f (x) كما فى المثال السابق .

٧-٢-١ الخطأ المصاحب لقاعدة شبه المنحرف

The Trapezoidal Rule Inherent Error

بفرض أن f (x) دالة متصلة ومحدودة فى الفترة

$$[x_0 , x_1] \quad , \quad x_1 = x_0 + h$$

وبفرض أن تكامل f (x) هو F (x) أى أن

$$F`(x) = f(x), \quad F``(x) = f`(x), \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\therefore I_e = \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx = F(x_0 + h) - F(x_0)$$

وباستخدام قاعدة شبه المنحرف اليسيرة

$$I_T = \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_0 + h)]$$

ويكون الخطأ المصاحب فى I_T هو

$$E_T = I_e - I_T$$

$$E_T = [F(x_0 + h) - F(x_0)] - \left[\frac{h}{2}((f(x_0) + f(x_0 + h))\right]$$

وباستخدام مفكوك تيلور حول x_0 نحصل على

$$E_T = \left[F(x_0) + \frac{h}{1!}F`_{(x_0)} + \frac{h^2}{2!}F``(x_0) + \frac{h^3}{2!}F```(x_0)\ldots\ldots\ldots - F(x_0)\right]$$

$$-\frac{h}{2}\left[f(x_0) + f(x_0) + \frac{h}{1!}f`(x_0) + \frac{h^2}{2!}F`(x_0) + \frac{h^3}{2!}F``(x_0) + \ldots\ldots\ldots\right]$$

وبأهمال الحدود التى على الأقل ذات رتبة رابعة فى h فإننا نحصل على الآتى :

$$E_T = -\frac{h^3}{12} f''(\xi) \quad , \quad x_0 \le \xi \le x_1$$

وحيث أنه فى قاعدة شبه المنحرف لدينا n من الفترات الأساسية ، لذلك فإن الخطأ المصاحب على الفترة [a,b] يكون :

$$E_T = -\frac{nh^3}{12} f''(\xi) \quad , \quad a \le \xi \le b$$

أو

$$|E_T| = \frac{b-a}{12} h^2 |f''(\xi)| \quad , \quad a \le \xi \le b$$

ويكون الحد الأقصى للخطأ المصاحب لقاعدة شبه المنحرف هو

$$|E_T|_{max} = \frac{b-a}{12} h^2 |f''(\xi)|_{max} \quad , \quad a \le \xi \le b$$

ويكون الحد الأدنى للخطأ هو :

$$|E_T|_{min} = \frac{b-a}{12} h^2 |f''(\xi)|_{min} \quad , \quad a \le \xi \le b$$

وحدود الخطأ هى :

$$|E_T|_{min} \le |E_T| \le |E_T|_{max}$$

مثال(٧-٣): أحسب الحد الأقصى والأدنى للخطأ المصاحب فـى إيجـاد قيمـة التكامـل $\int_{1.6}^{2.1} f(x)\ dx$ وذلك باستخدام قاعدة شبه المنحرف آخذا $n = 5$ ، حيث $f(x)$ معروفة بصورة جدولية كما فى المثال (٧-٢)

الحل :

نلاحظ أن الصورة التحليلية للدالة $f(x)$ غير معطاه ولذلـك فإنـه مـن الصـعب ايجـاد المشتقة الثانية للدالة $f(x)$ لحساب E_T ، ولذلك سـنتبع الأسلوب العددى التـالى والـذى يعتمـد على جدول الفروق البسيطة فى عملية الاستكمال ومراعاة أن $f'' = \dfrac{\Delta^2 f}{h^2}$

x	f	Δ	Δ^2
1.6	4.9539		
		1.0962	
1.7	6.0501		<u>0.2431</u>
		1.3393	
1.8	7.3894		0.2969
		1.6362	
1.9	9.0256		0.3614
		1.9976	
2.0	11.0232		<u>0.4439</u>
		2.4415	
2.1	13.4647		

ويكون الحد الأقصى للخطأ المصاحب

$$|E_T|_{max} = \frac{2.1-1.6}{12}|\Delta^2 f|_{max} \quad , \quad or$$

$$|E_T|_{max} = \frac{0.5}{12}(0.4439) = 0.0185$$

والحد الأدنى للخطأ المصاحب

$$|E_T|_{max} = \frac{b-a}{1.2}|\Delta^2 f|_{min}$$

$$= \frac{0.5}{12}(0.2431) = 0.0101$$

وعلى ذلك فإن حدود الخطأ المصاحب هى

$$0.0101 \le |E_T| \le 0.0185$$

نلاحظ فى المثال السابق أننا اضطررنا لحساب الخطأ المصاحب عن طريق استخدام طرق الاستكمال والتفاضل العددى نظرا لأن الصورة التحليلية للدالة $f(x)$ غير معلومة وهناك بعض التكاملات تكون صورة الدالة التحليلية معلومة . ومع ذلك يكون من الأسهل اتباع الأسلوب العددى السابق مقارنة بالأسلوب التحليلى مثل التكاملات .

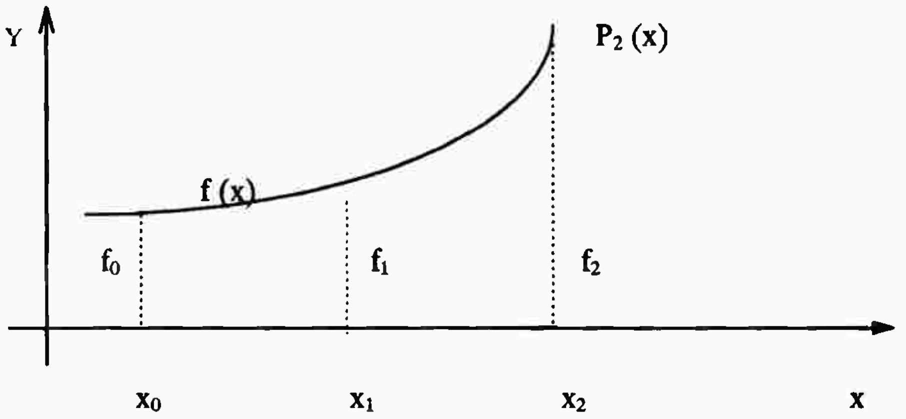
$$\int \frac{\sin x}{x}dx \quad , \quad \int e^{-x^2}dx \quad , \quad \ldots\ldots\ldots$$

نظرا لأن اتباع الأسلوب التحليلى فى إيجاد حدود الخطأ المصاحب لتلك التكاملات يحتاج إلى مجهود ووقت كبير وخاصة فى طرق التكامل الأخرى مثل طريقة سمبسون والتى سنعرض لها فى الجزء التالى .

٧-٣ قاعدة سمبسون Simpson Rule

تعتبر قاعدة سمبسون واحدة من أكثر قواعد التكامل العددى استخداماً نظراً للدقة العالية التى نحصل عليها . وتعتمد هذه الطريقة على أساس تقريب المساحة تحت المنحنى $y = f(x)$ بأخرى تحت منحنى حدودية من الدرجة الثانية $P_2(x)$ وتمر بالنقاط الثلاثة .

$A(x_0, f_0)$, $B(x_1, f_1)$, $C(x_2, f_2)$



ونلاحظ أنه فى هذه الطريقة لا بد أن يكون عدد المسافات n زوجياً وذلك لأن عدد المسافات الأساسية لقاعدة سمبسون اليسيرة هو اثنان .

الآن أعتبر الفترة $[x_0 , x_2]$ وبوضع $n = 2$ فى الصيغة العامة (4) مع إهمال الفروق التى تتعدى Δ^2 نحصل على الآتى :

$$I_S = \int_{x_0}^{x_0+2h} f(x)dx$$

$$= h\left[2f_0 + 2\Delta f_0 + \left(\frac{8}{3} - 2\right)\frac{\Delta^2 f_0}{2}\right]$$

$$= h\left[2f_0 + 2(f_1 - f_0) + \frac{1}{3}(f_2 - 2f_1 + f_0)\right]$$

$$= \frac{h}{3}\left[f_0 + 4f_1 + f_2\right]$$

الصيغة السابقة تسمى بقاعدة سمبسون اليسيرة Simple Simpson Rule وباتباع الاسلوب السابق على الفترة $[x_2,x_4]$ و $[x_4 \ , \ x_6]$ و .... و $[\ x_{n-2} \ , \ x_n\ ]$ ثم التجميع نحصل على قاعدة سمبسون المركبة Compound Simpson Rule التالية :

$$I_S = \frac{h}{3}\left[f_0 + f_n + 4\sum_{i=1,3,\ldots}^{n-1} f_i + 2\sum_{i=2,4,\ldots}^{n-2} f_i\right]$$

حيث n : عدد زوجى

مثال (٧-٥): باستخدام طريقة سمبسون أوجد قيمة التكامل $I = \int_0^{0.6} e^{-x^2}dx$ آخذا $h = 0.1$

الحل :

$a = 0 \quad , \qquad b = 0.6 , \qquad h = 0.1 , \qquad f(x) =$

$$\therefore n = \frac{b-a}{h} = \frac{0.6-0}{0.1} = 6$$

نكون الجدول التالى :

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4
f (x)	1	0.990050	0.960789	0.913931	0.852144
	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4

x	0.5	0.6
f (x)	0.778801	0.697676
	f_5	f_6

$$I_S = \frac{h}{3}\left[f_0 + f_6 + 4(f_1 + f_3 + f_5) + 2(f_2 + f_4)\right]$$

$$\therefore I_S = 0.535156$$

وإذا أردنا حل المثال السابق باستخدام قاعدة شبه المنحرف نحصل على

$$I_s = \frac{h}{3}\left[f_0 + f_6 + 4(f_1 + f_3 + f_5) + 2(f_2 + f_4)\right]$$

$$\therefore I_s = 0.535156$$

$$I_T = \frac{h}{2}\left[f_0 + f_6 + 2(f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5)\right]$$

$$I_T = 0.534455$$

<u>**ملاحظة**</u> : أعد حل المثال السابق آخذا $h = 0.05$.

مثال ٧-٦ : أعتبر الجدول التالى :

x	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6
y	0.8012	0.7614	0.7119	0.6837	0.6226	0.5993	0.5412

أوجد باستخدام قاعدة سمبسون التكامل التالى :

$$I = \int_{1}^{1.6} (x^2 + y^2)\, dx$$

الحل :

نلاحظ أن الدالة تحت علامة التكامل هى $(x^2 + y^2)$

ولذلك نكون جدولاً جديداً كالآتى :

x	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6
y	0.8012	0.7614	0.7119	0.6837	0.6226	0.5993	0.5412
x^2+y^2	1.6419	1.7897	1.9468	2.1574	2.3476	2.6092	2.8529
	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6

$$\therefore I_S = 1.3103$$

مثال ٧-٧ : أوجد $\int_{-0.4}^{0.4} \frac{\sin x}{x} dx$ آخذاً $h = 4$

وذلك باستخدام قاعدة سمبسون

الحل :

$$a = -0.4, \quad b = 0.4, \quad n = 4, \quad f(x) = \frac{\text{Sinx}}{x}$$

$$\therefore \; h = 0.2$$

نكون الجدول التالى :

x	-0.4	-0.2	0	0.2	0.4
f	0.97355	0.99335	1.0	0.99335	0.97355
	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4

$$I_S = \frac{h}{3}\left[f_0 + f_4 + 4(f_1 + f_3) + 2f_2\right]$$

$$\therefore I_S = 0.79293$$

<u>ملاحظة</u> : عند تكوين الجدول السابق استخدمنا

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

٧-٣-١ : الخطأ المصاحب لقاعدة سمبسون Smipson's Inherent Error

بفرض أن f (x) دالة متصلة ومحدودة فى الفترة

$$[x_0, x_2] \quad , \quad x_1 = x_0 + h \quad , \quad x_2 = x_0 + 2h$$

$$\therefore I_e = \int_{x_0}^{x_0+2h} f(x)dx$$

$$= F(x_0 + 2h) - F(x_0)$$

حيث كما سبق افترضنا أن تكامل f (x) هو F (x)

وباستخدام قاعدة سمبسون اليسيرة على الفترة [x_0 , x_2] نحصل على

$$I_S = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + f(x_0 + 2h) + 4f(x_0 + h)\right]$$

ويكون الخطأ المصاحب فى I_S هو

$$E_S = I_e - I_S$$

$$E_S = \left[F(x_0 + 2h) - F(x_0)\right] - \frac{h}{3}\left[f(x_0) + f(x_0 + 2h) + 4f(x_0 + h)\right]$$

وباستخدام مفكوك تيلور حول النقطة x_0 يمكن إثبات أن الخطأ المصاحب فى قاعدة سمبسون اليسيرة على الفترة [x_0 , x_2] هو

$$E_S = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi) \quad , \quad x_0 \le \xi \le x_0 + 2h$$

ولحساب الخطأ المصاحب على الفترة [a,b] نجد أنه لدينا عدد $\frac{n}{2}$ من المسافات الأساسية (كل مسافة أساسية تحتوى على فترتين جزئيتين) ولذلك فإن الخطأ المصاحب الكلى على الفترة [a , b] هو :

$$E_S = -\frac{nh^5}{90} f^{(4)}(\xi) \quad , \quad a \le \xi \le b$$

باستعمال $nh = (b - a)$ فإن :

$$|E_S| = \frac{b-a}{180} h^4 \left|f^{(4)}(\xi)\right| \quad , \quad a \le \xi \le b$$

وتكون حدود الخطأ المصاحب فى قاعدة سمبسون هى

$$|E_S|_{max} \le |E_S| \le |E_S|_{min}$$

حيث :

$$|E_S|_{max} = \frac{b-a}{180} h^4 \left|f^{(4)}(\xi)\right|_{max}$$

$$|E_S|_{min} = \frac{b-a}{180} h^4 \left|f^{(4)}(\xi)\right|_{min}$$

مثال ٧-٨: أوجد حدود الخطأ المصاحب عند إيجاد قيمة التكامل $\int_0^{0.6} e^{-x^2} dx$ آخذاً $n = 6$ وذلك باستخدام قاعدة سمبسون .

الحل :

فى هذا المثال نجد أن الصورة التحليلية للدالة $f(x)$ معلومة وتساوى e^{-x^2} . وحساب قيمة الخطأ المصاحب بالطرق التحليلية يستلزم إيجاد المشتقة الرابعة لهذه الدالة ثم حساب أقصى وأدنى قيمة لهذه المشتقة على الفترة $[a , b]$ وذلك يحتاج إلى كثير من الوقت والجهد . ولذلك سوف نتبع الأسلوب العددى الذى سبق واستخدم فى حساب الخطأ المصاحب فى قاعدة شبه المنحرف مع مراعاة أن :

$$|E_S| = \frac{b-a}{1.80} \left|\Delta^4 f(\xi)\right|_{max} \quad , \quad a \le \xi \le b$$

وعلى ذلك يتم تكوين جدول الفروق البسيطة كالآتى :

x	f	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
0	1				
		-0.00995			
0.1	0.99005		-0.019311		
		-0.029261		0.001714	
0.2	0.960789		-0.017597		<u>0.000954</u>
		-0.046858		0.002668	
0.3	0.913931		-0.014929		0.000705
		-0.061787		0.003373	
0.4	0.852144		-0.011556		<u>0.000401</u>
		-0.073343		0.003774	
0.5	0.778801		-0.007782		
		-0.081125			
0.6	0.697676				

لإيجاد أكبر خطأ مصاحب نأخذ أكبر قيمة عددية فى عمود Δ^4 :

$$|E_S|_{max} = \frac{b-a}{180}|\Delta^4 f|_{max}$$
$$= \frac{0.6}{180}(0.000954) = 0.000003$$

ولإيجاد أقل خطأ مصاحب نأخذ أقل قيمة عددية فى عمود Δ^4

$$|E_S|_{min} = \frac{b-a}{180}|\Delta^4 f|_{min}$$
$$= \frac{0.6}{180}(0.000401) = 0.000001$$

وتكون حدود الخطأ المصاحب فى قيمة التكامل هى

$$0.000001 \le |E_S| \le 0.000003$$

مثال (٧-٩): من الجدول التالى أوجد قيمة $\int_{1}^{2} f(x)dx$

x	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2
f (x)	1	0.83333	0.71429	0.625	0.55556	0.5

ثم أوجد حدود الخطأ المصاحب لإجابتك وإذا علمت أن $f(x) = \frac{1}{x}$ فأوجد الخطأ الفعلى (يراعى الاحتفاظ بستة أرقام عشرية) .

الحل :

نلاحظ من الجدول أن $n = 5$ ولهذا لا يمكن استخدام قاعدة سمبسون (لماذا ؟) ولذلك سوف نستخدم قاعدة شبه المنحرف لإيجاد قيمة التكامل المطلوب

$$I_T = \frac{h}{2}\left[f_0 + f_5 + 2\left(f_1 + f_2 + f_3 + f_4\right)\right]$$
$$\therefore I_T = 0.69564$$

ولإيجاد حدود الخطأ المصاحب نُكون جدل الفروق البسيطة التالى :

x	f	Δ	Δ^2
1	1		
		-0.16667	
1.2	0.83333		0.04763
		-0.11904	
1.4	0.71429		0.02975
		-0.08929	
1.6	0.625		0.01985
		-0.06944	
1.8	0.55556		0.01388
		-0.05556	
2.0	0.5		

ويكون الحد الأعلى للخطأ المصاحب هو

$$\left|E_T\right|_{max} = \frac{b-a}{12}\left|\Delta^2 f(\xi)\right|_{max} \quad , \quad 1 \le \xi \le$$

$$\left|E_T\right|_{max} = \frac{2-1}{12}(0.04763) = 0.00397$$

ويكون الحد الأدنى للخطأ المصاحب هو

$$\left|E_T\right|_{min} = \frac{b-a}{12}\left|\Delta^2 f(\xi)\right|_{min} \quad , \quad 1 \le \xi \le 2$$

$$\left|E_T\right|_{max} = \frac{2-1}{12}(0.01388) = 0.00116$$

وعلى ذلك فإن حدود الخطأ المصاحب هى

$$0.00116 \le \left|E_T\right| \le 0.00397$$

وحيث أن $f(x) = \frac{1}{x}$ فإن قيمة التكامل الفعلى هى

$$I_e = \int_1^2 \frac{1}{x} dx = \{\ln x\}_1^2$$
$$= 0.69315$$

وطبقاً لذلك يكون الخطأ الفعلى هو

$$E_e = | I_e - I_T |$$
$$= | 0.69316 - 0.69564 |$$
$$= 0.00249$$

ملاحظة : ١- فى قاعدة شبه المنحرف يكون الخطأ المصاحب صفراً إذا كانت الدالة $f(x)$ كثيرة حدود من الدرجة الأولى أو الثانية حيث أنه فى هذه الحالة تنعدم المشتقة الثانية للدالة $f(x)$.

٢- فى قاعدة سمبسون يكون الخطأ المصاحب صفراً إذا كانت الدالة $f(x)$ كثيرة حدود من الدرجة الأولى أو الثانية أو الثالثة حيث تنعدم فى هذه الحالة المشتقة الرابعة للدالة $f(x)$.

مثال (٧-١٠): احسب عددياً قيمة التكامل $\int_2^3 \ln x \, dx$ آخذاً h بحيث يكون خطأ الاقتطاع أقل من 0.005 وذلك مستخدماً قاعدة شبه المنحرف ثم قدر الخطأ الفعلى فى إجابتك وحدود خطأ الاقتطاع .

الحل :

$a = 2 , \quad b = 3 , \quad f(x) = \ln x$

باستخدام قاعدة شبه المنحرف :

$$\therefore |E_T| = \frac{b-a}{12} h^2 |f``(\xi)|_{max}, \quad 2 \le \xi \le 3$$

$$f(x) = \ln x \qquad \therefore f` = \frac{1}{x} \qquad , f`` = -\frac{1}{x^2}$$

نلاحظ أن أقصى قيمة عددية للمشتقة الثانية $f``(x)$ توجد عند $\xi = 2$ ولذلك فإن

$$\frac{b-a}{12} h^2 |f``(2)| < 0.005$$

$$\therefore \frac{3-2}{12} h^2 (0.25) < 0.005$$

ومنها نحصل على :

$$\therefore h < 0.2$$

وتكون قيمة n اللازمة هى $n = \frac{b-a}{h} > 4.17$

وحيث أن عدد المسافات لا بد وأن يكون صحيحا لذلك نأخذ $n = 5$. فتكون قيمة h المقابلة هى

$$h = \frac{b-a}{n} = 0.20$$

نكون الجدول التالى :

x	2	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0
f	0.6931	0.7885	0.8755	0.9555	1.0296	1.0986
	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5

$$I_T = \frac{h}{2}\left[f_0 + f_5 + 2\sum_{i=1}^{4} f_i\right]$$

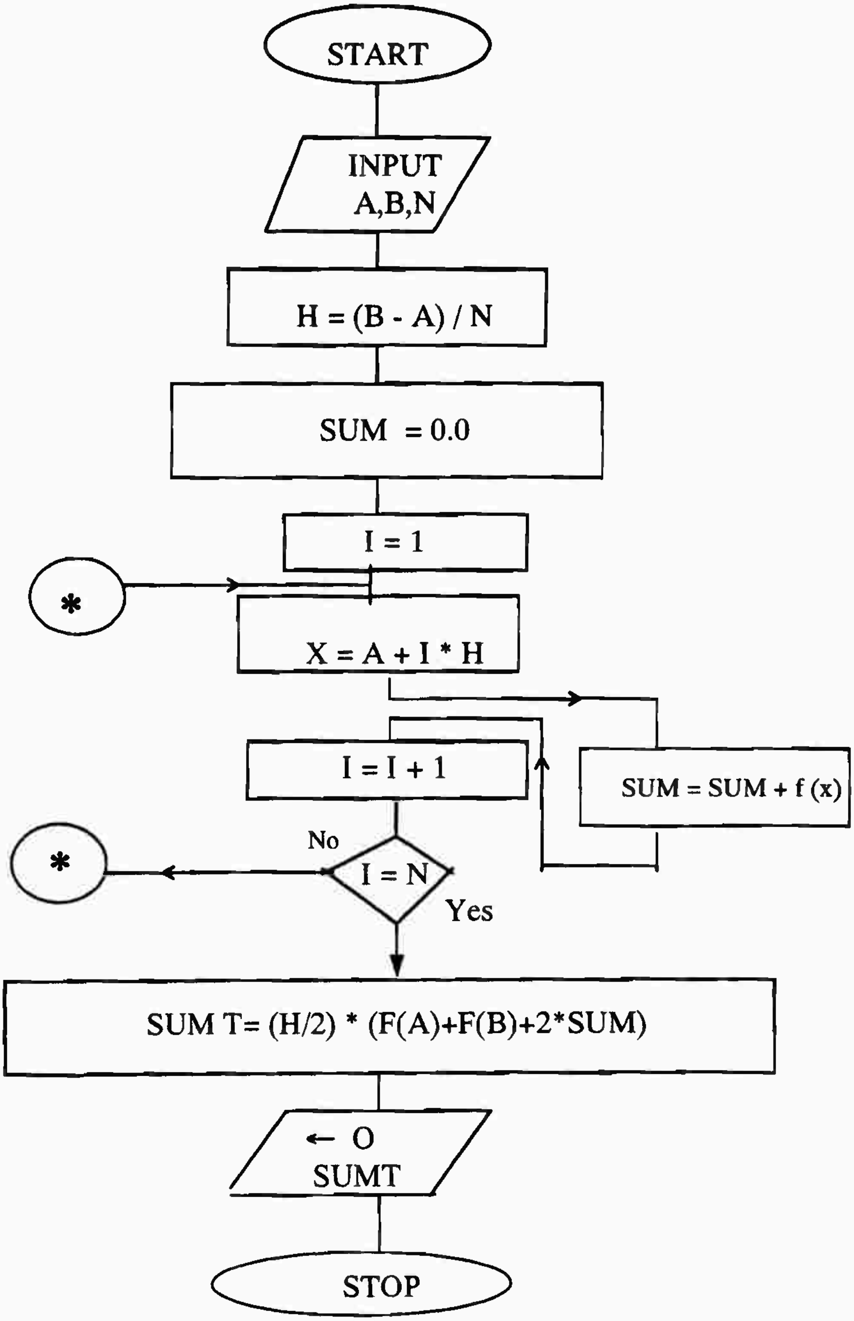
$$\therefore I_T = 0.9090$$

نلاحظ أن التكامل الفعلى هو

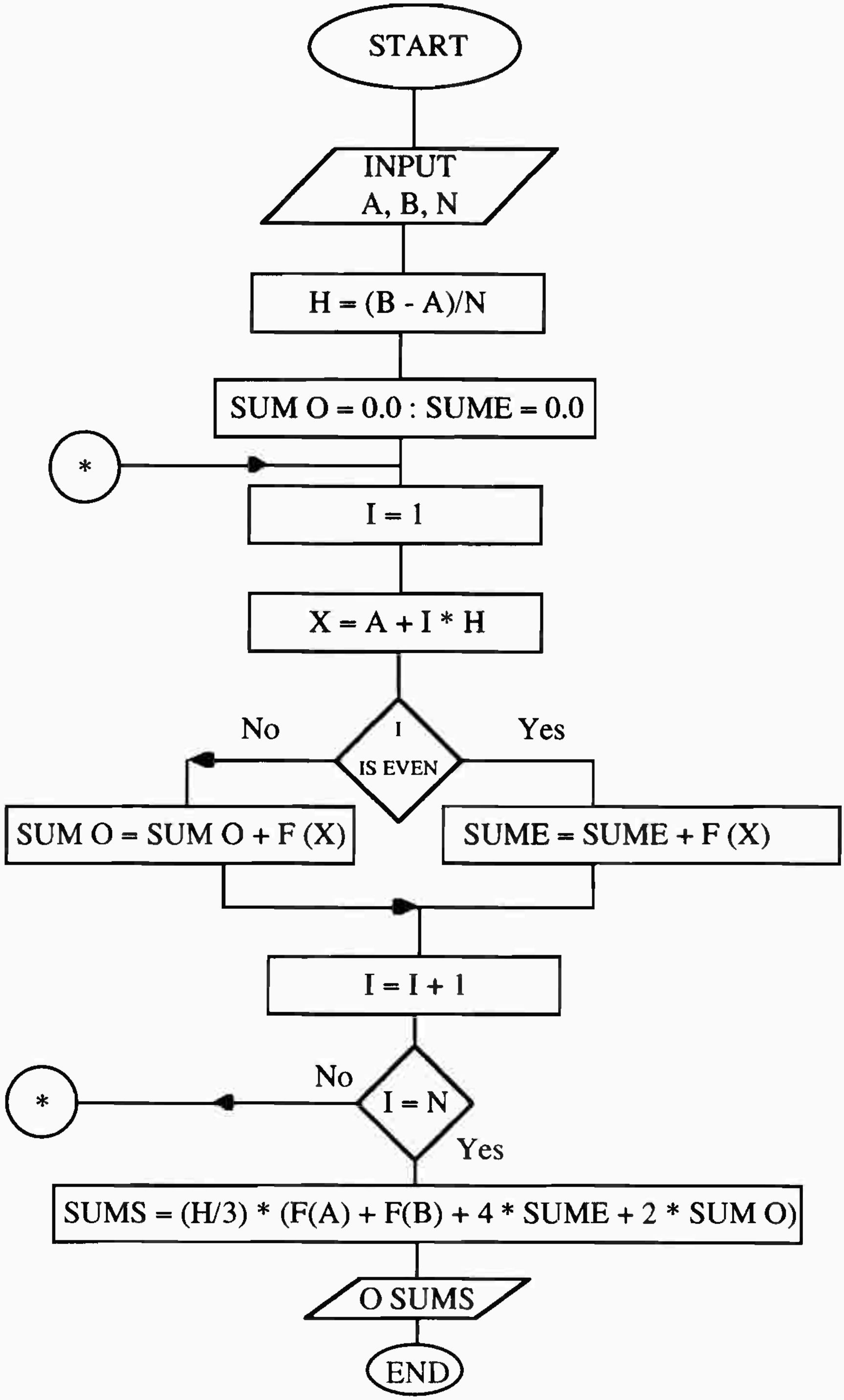
$$I_e = 0.9095$$ (لماذا ؟)

يترك للطالب إيجاد قيمة الخطأ المصاحب وتكرار حل المسـألة باستخدام قـاعدة سمبسـون مـع مراعاة أن قاعدة سمبسون لا تطبق إلا فى حالة n عدد زوجى .

٧-٤ خوارزمى عام لطريقة شبه المنحرف المركبة



٧ - ٥ خوارزمى عام لطريقة سمبسون المركبة



تمارين على التكامل العددي

١- (i) من جدول البيانات التالى قدر قيمة التكامل $\int_{2}^{3} f(x)dx$ وذلك مستخدماً قاعدة سمبسون.

x	1	1.5	2	2.5	3.0	3.5	4	4.5	5
f	0	0.4055	0.6931	0.9163	1.0986	1.2528	1.3863	1.5041	1.6094

(ii) احسب قيمة الخطأ الفعلى فى نتيجة (i) إذا علم أن البيانات السابقة خاصة بالدالة $f(x) = \ln x$.

(iii) احسب قيمة الخطأ المصاحب لإجابتك فى الجزء (i) .

٢- احسب قيمة التكامل $I = \int_{0}^{1} \frac{dx}{1+x}$ باستخدام قاعدة شبه المنحرف آخذاً $h = 0.25$ ثم احسب قيمة الخطأ الفعلى وحدود خطأ الاقتطاع .

٣- أوجد قيمة التكامل $I = \int_{0}^{1} \frac{e^{-x^2}}{4} dx$ مستخدماً كل من قاعدة شبه المنحرف وقاعدة سمبسون (آخذا $n = 8$) .

٤- احسب قيمة التكامل $\int_{0}^{\Pi} \sqrt{1 - \text{Sin}^2 x}\, dx$ آخذا $h = \frac{\Pi}{16}$ وذلك باستخدام قاعدة سمبسون.

٥- احسب قيمة التكامل $\int_0^1 \frac{1-\cos x}{x} dx$ باستخدام قاعدة سمبسون آخذا $n = 4$. ثم احسب الحد الأقصى والأدنى للخطأ المصاحب لإجابتك .

٦- باستخدام البيانات التالية ، احسب التكاملات

$$\text{(i)} \int_{0.5}^{1.1} xy\, dx \qquad \text{(ii)} \int_{0.6}^{1.0} y^2\, dx \qquad \text{(iii)} \int_{0.5}^{1.1} x^2 y\, dx$$

وذلك مستخدما قاعدة سمبسون

x	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1
y	0.4804	0.5669	0.6490	0.7262	0.7985	0.8658	0.9281

٧- احسب عددياً قيمة التكامل $\int_0^{\pi/4} \cos x\, dx$ باستخدام قاعدة شبه المنحرف آخذاً الخطوة h بحيث يكون خطأ الاقتطاع أقل من 0.01 .

٨- احسب عددياً قيمة التكامل $\int_0^1 e^{-x} dx$ باستخدام قاعدة سمبسون آخذاً الخطوة h بحيث يكون خطأ الاقتطاع أقل من 0.0001 .

الحمد الله رب العالمين

المراجـــع

المراجع الأجنبية:

1 - Fröberg C. E., Introduction to Numerical Analysis, 2nd ed., Addison - Wesley Pub. Comp., London, 1974.

2 - Zurmuhl R., Numerical Analysis for Engineers and Physicists, Allied Pub. Private limited, New Delhi, 1980.

3 - Scheid F., Numerical Analysis, Schaum's outline series, McGraw - Hill, Singapore, 1983.

4 - Burden R.L and Faires J. D., Numerical Analysis, 5th ed., PWS-Kent Pub. Comp, Boston, 1993.

المراجع العربية:

5 – مجدى الطويل، المصفوفات . . النظرية والتطبيق، دار الفتح للإعلام العربى – القاهرة، ١٩٩٦ .

6 – أبو بكر أحمد السيد، التحليل العددى، دار القلم – الكويت، ١٩٨٨ .

7 – محمد نبيه الترزى، مقدمة فى التحليل العددى، (ترجمة سعاده سعادات عبد المجيد)، دار القلم – الكويت، ١٩٨٨ .