

الدرس الخامس عشر :

وبادئ الجبر = الكميات المتجهة

Directed Numbers

[١٥ - ١] تعريف :

مثال (١) : للتعرف على الأعداد أو الكميات المتجهة ، ننظر إلى الجدول التالي جدول (١٥ - ١) ، الذي يوضح أعمار بعض الأشخاص .

الإسم	العمر	الفارق في العمر بين عمر كل واحد ، وعمر أحمد
محمد	٥٥	٢٥ +
علي	٤٢	١٢ +
عصام	٣٧	٧ +
أحمد	٣٠	صفر
مجدى	٢٨	٢ -
هشام	٢١	٩ -
خالد	١٥	١٥ -

جدول [١٥ - ١]

فإذا ما قارنا عمر كل واحد من المذكورين بالجدول وقارناه بعمر واحد منهم وليكن أحمد مثلاً ، فنجد أن عمر عصام (٣٧) يزيد عن عمر أحمد (٣٠) بمقدار (٧) ،

$$٧ + ٣٠ = \text{عمر عصام}$$

$$٧ + \text{عمر أحمد} =$$

$$٧ + \text{.} =$$

وذلك باعتبار أحمد بداية القياس أو أساس القياس فنقول عمر عصام = $(7 +)$ أى (موجب ٧) بالنسبة لعمر أحمد .

أما على فيعتبر $(12 +)$ (موجب ١٢) بالنسبة لأحمد .

ويتربع محمد فى قائمة الأعمار فنجد أنه (موجب ٢٥) بالنسبة لأحمد .
أما أعمار كل من مجدى وهشام وخالد فهى أقل من عمر أحمد ويعبر عن مقدار هذا النقص بإشارة سالب $(-)$.

فمثلاً نقول عمر هشام $(- ٩)$ أى $(- ٩)$ سالب ٩ ، بالنسبة لعمر أحمد .
أما خالد وهو أصغر القائمة عمراً فنقول أن عمر خالد $(- ١٥)$ ، أى (سالب ١٥) بالنسبة لعمر أحمد .

أما بالنسبة لعمر أحمد فقد سُجل أمامه (صفر) لأنه هو نقطة البداية والتي بدأنا منها المقارنة وتسمى بنقطة الصفر أو نقطة الأصل .

مثال (٢) : فى امتحان مادة الرياضيات كانت درجات الطالبات كالتالى :
كما هو مبين بجدول (١٥ - ٢) :

اسم الطالبة	الدرجات	الفارق بين درجة كل طالبة ودرجة إيمان
رانيا	٥٠	$٨٠ +$
ياسمين	٤٦	$٤ +$
هبة	٤٥	$٣ +$
إيمان	٤٢	صفر
هند	٣٥	$٧ -$
ثناء	٣٠	$١٢ -$
أمل	٢٦	$١٤ -$

جدول [١٥ - ٢]

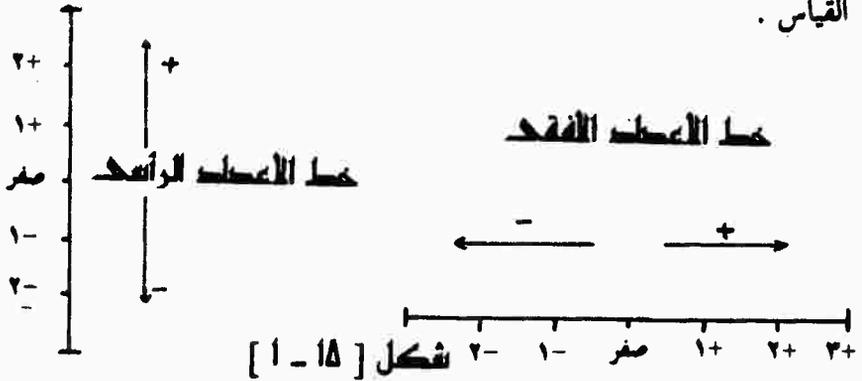
فإذا ما قارنا درجة كل طالبة بالجدول وقارناها بدرجة إيمان مثلاً سنجد أن درجة هبة تزيد بثلاث درجات عن الدرجة التي حصلت عليها إيمان وكذلك نجد أن رانيا الحاصلة على الدرجة النهائية في الرياضيات ، تزيد عن درجة إيمان بمقدار ثمانية درجات .

وعلى هذا فإننا نقول أن درجة رانيا $(+ ٨)$ أو (موجب ٨) بالنسبة لدرجة إيمان .

وكذلك درجة هبة $(+ ٣)$ أو (موجب ٣) بالنسبة لدرجة إيمان .

وبنفس الطريقة فإن درجة أمل $(- ١٤)$ بينا درجة هند $(- ٧)$ أو تقل عن إيمان بمقدار $(- ٧)$ درجات .

أما بالنسبة لإيمان فقد سجلنا أمامها (صفر) لأنها المقياس الذي بدأنا به المقارنة وتسمى درجة إيمان (٤٢) بنقطة الصفر أو نقطة الأصل أو نقطة بداية القياس .



[١٧ - ٢] خط الأعداد The Number Line :

هو خط تُسجل عليه جميع الأرقام الموجبة والسالبة ويفصل بينهما الصفر ويمتد الاتجاه الموجب مبتعداً عن الصفر وهي نقطة الأصل ويزداد تدريجياً حتى يصل إلى قيمة هائلة يصعب حصرها وتسمى :

موجب ما لا نهاية $(+ \infty)$ وبالمثل يمتد الاتجاه السالب في الاتجاه المعاكس ويتناقص تدريجياً حتى يصل إلى قيمة يصعب حصرها وتسمى سالب ما لا نهاية $(- \infty)$.

ويوضح شكل $(١٥ - ١)$ ، خط الأعداد سواء كان أفقياً أو رأسياً .

[١٧ - ٣] أكبر من ، أصغر من : Greater than, Less than

يُعبّر عن كلمة أكبر من حسابياً بالرمز <

فمثلاً نقول $15 < 14$ أى أن ١٥ أكبر من ١٤ فى حين يُعبّر عن كلمة أصغر من حسابياً بالرمز >

فمثلاً نقول أن $10 > 12$ أى أن ١٠ أصغر من ١٢ .

فإذا طبقنا هنا هذا المعنى على خط الأعداد السابق فى شكل (١٥ - ١) . نجد أن :

$$3 + < 2 + < 3 + , \text{ صفر} ,$$

$$\text{كما وأن الصفر} < 1 - \text{ كما وأن } 1 - < 3 -$$

$$\text{وبالتالى فإن } 1 + < 1 - , \text{ صفر} < 4 -$$

$$3 - > \text{ صفر} , 1 - > 1 + > 3 + \text{ وهكذا .}$$

[١٧ - ٤] جمع الكميات (الأعداد) المتجهة :

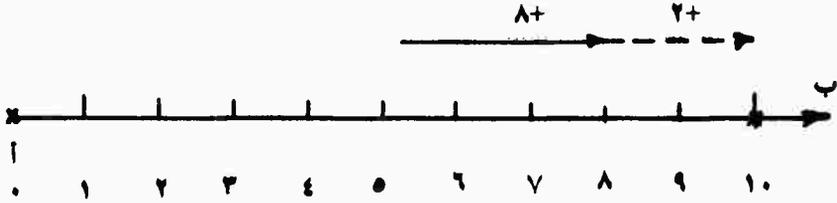
إذا افترضنا أن سيارة ما تتحرك على خط الأعداد ابتداء من نقطة الصفر فى اتجاه اليمين لخط الأعداد الأفقى أو فى اتجاه الأعلى لخط الأعداد الرأسى شكل (١٥ - ١) فإنه يقال أن السيارة تتحرك حركة موجبة ، والعكس فإذا تحركت السيارة لليسار بخط الأعداد الأفقى أو للأسفل بخط الأعداد الرأسى فإن حركة السيارة تكون حركة سالبة .

مثال (١) : إذا تحركت مبتدئة من مدينة « أ » (سنعتبر هذه المدينة هى نقطة القياس أو نقطة الأصل أو الصفر فى خط الأعداد) .

وسارت ٨ كم فى اتجاه مدينة (ب) ثم استمرت فى السير مرة ثانية لمسافة ٢ كم فى نفس الاتجاه فإنه يقال أن السيارة تحركت مسافة ١٠ كم فى الاتجاه من ا إلى ب .

وإذا اعتبرنا هذا الاتجاه من مدينة (أ) إلى مدينة (ب) هو الاتجاه الموجب « لخط الأعداد » .

فإن السيارة تكون قد سارت : $(8 +) + (2 +) = 10 +$ كم .
 ، انظر الرسم شكل (١٥ - ٢) .



شكل [١٥ - ٢]

مثال (٢) : سار محمد فوق خط الأعداد مبتدئاً من $(1 +)$ مقدار ٥ كم ثم عاد أدراجه على نفس الخط في الاتجاه المعاكس مسافة ٣ كم فأين ينتهي به المطاف ؟

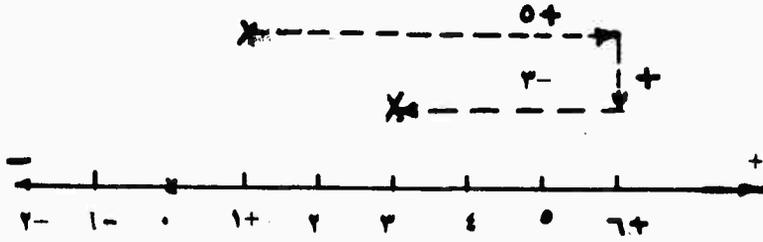
الحل :

كما في شكل (١٥ - ٣) من الرسم نلاحظ أن محمد ابتداءً من نقطة $(1 +)$ وهي نقطة تبعد بمقدار ١ كم عن نقطة بدء القياس وهي الصفر وحيث أنه سار بعد ذلك خمسة كيلومترات فإنه في النهاية يكون قد ابتعد بمسافة ٦ كيلومتر عن نقطة الصفر أي عند النقطة $(6 +)$ وحيث أنه سيعود مرة ثانية في الاتجاه السالب لخط الأعداد مسافة ٣ كم ، أي أنه سيتحرك جبرياً أو مقداراً متجهاً قدرة $(3 -)$ كم في اتجاه نقطة الصفر .

وفي النهاية سنجد أنه وصل لبعد ٣ كم عن نقطة الصفر وهي نقطة $(3 +)$ على خط الأعداد .

وذلك يؤكد صحة المقدار : $(6 +) + (3 -) = (3 +)$.

ويلاحظ كذلك أننا نضع علامة + أي أننا نجرى عملية جمع بين مقدارين مختلفي الاتجاه .



بالكيلومتر
شكل [١٥ - ٣]

[١٧ - ٥] طرح الأعداد المتجهة :

سبق لنا وأن أوضحنا عملية الطرح في الدرس الثالث ، البند الثالث إلا أن طرح الكميات أو الأعداد المتجهة ، يختلف ولتوضيح ذلك ، نورد هنا بعض الأمثلة :

مثال (١) : إن الفرق بين ٨ ، ٣ هو :

$٥ = ٣ - ٨$ وليس له قيمة غير ذلك ، كما عرفنا في الدرس الثالث ، البند الثالث إلا أن طرح الكميات أو الأعداد المتجهة ، يختلف ولتوضيح ذلك ، نورد هنا بعض الأمثلة :

مثال (١) : إن الفرق بين ٨ ، ٣ هو :

$٥ = ٣ - ٨$ وليس له قيمة غير ذلك ، كما عرفنا في الدرس الثالث ، البند الثالث ،
(٣ - ٣) ،

إلا أنه عند إيجاد الفرق بين كميتين متجهتين فإن الأمر يختلف فالفرق بين $٨ +$ ، $٣ +$ ، يُمكن أن يكون $٥ +$ أو قد يكون $٥ -$ وذلك يتوقف على طريقة المقارنة : فمن الواضح على أي خط أعداد ، أن المسافة بين $٣ +$ ، $٨ +$ هي ٥ وحدات وكذلك المسافة بين $٣ -$ ، $٨ -$ هي ٥ وحدات .

أي أن الفارق بينهما عددياً $٥ =$ وحدات مسافة .

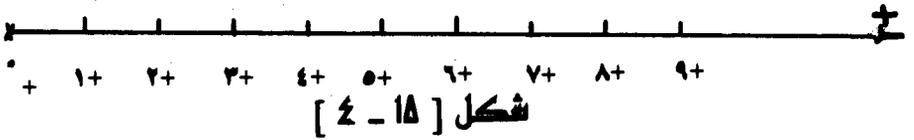
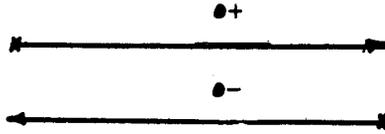
إلا أننا إذا تحركنا بادئين من نقطة $٣ +$ ومتجهين إلى نقطة $٨ +$ فإن الفارق يكون $٥ +$ أي ٥ وحدات في الاتجاه الموجب لخط الأعداد .

$$5 + = (3 +) - (8 +) \therefore$$

بينما إذا تحركنا من نقطة $8 +$ ومتجهين إلى نقطة $3 +$ فإن الفارق يكون $5 -$.
 أى $5 -$ وحدات فى الاتجاه السالب لخط الأعداد .

$$5 - = (8 +) - (3 +) \therefore$$

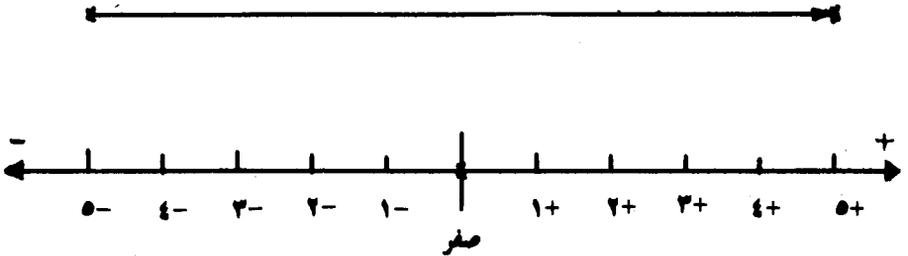
ويتضح ذلك من الشكل $(15 - 4)$.



مثال (٢) : إذا تحركنا على خط الأعداد من النقطة $5 -$ قاصدين النقطة $5 +$ فما الفرق بين النقطتين .

الحل :

انظر الرسم شكل $(15 - 5)$ ، نلاحظ منه أن مسافة التحرك الفعلية هي 10 وحدات .



شكل [15 - 5]

والفرق بين النقطة التي وصلنا لها (+ ٥) والتي بدأنا منها (- ٥) يكون جبرياً :

$$١٠ + = (٥ -) - (٥ +)$$

أى أنه = عشر وحدات فى الاتجاه الموجب لخط الأعداد .

والآن وبعد أن فهمنا عمليات جمع وطرح الكميات (الأعداد) المتجهة فإننا من الآن فصاعداً ، لن نكون بحاجة إلى استخدام خط الأعداد . ويمكننا حل هذه النوعية بسهولة ، ولنأخذ الكميات التالية :

$$\begin{array}{rcl} ٧ + & = & ٢ + - ٩ + \\ ١٥ + & = & ٥ + - ٢٠ + \\ ٢٥ + & = & ٥ - - ٢٠ + \\ ١٥ - & = & ٥ - - ٢٠ - \\ ٢٥ - & = & ٥ + - ٢٠ - \\ \text{صفر} & = & ٢ - - ٢ - \\ ٤ + & = & ٢ - - ٢ + \\ \text{صفر} & = & ٢ + - ٢ + \\ ٧ - & = & ٢ - - ٩ - \\ ١١ - & = & ٢ + - ٩ - \\ ٢ + & = & ٢ - - \text{صفر} \\ ٢ - & = & ٢ + - \text{صفر} \\ ٣٠ + & = & ١٥ - - ١٥ + \\ ٦ + & = & ٧ + - ١٣ + \\ ٢٠ + & = & ٧ - - ١٣ + \\ ١٣ - & = & \text{صفر} - ١٣ - \\ ٥ - & = & ١٢ - - ١٧ - \\ ٥ + & = & ١٢ + - ١٧ + \\ ٢٩ + & = & ١٧ - - ١٢ + \\ ٢٩ - & = & ١٧ + - ١٢ - \end{array}$$

تكريرات

[أ] فيما يلي بعض العلاقات (المتباينات)؛ بعضها صحيح وبعضها خطأ .
والمطلوب منك وضع علامة ✓ أمام الصحيح منها وعلامة X أمام الخطأ منها .

- | | | | | | | | |
|-------|---|-------|------|------|---|------|------|
| 15 + | > | 5 + | (11) | 12 + | < | 15 + | (1) |
| 12 - | > | 5 + | (12) | 20 - | < | 15 - | (2) |
| 10 + | < | 9 - | (13) | 2 - | < | 3 - | (3) |
| 9 + | < | 10 - | (14) | 5 + | < | 1 + | (4) |
| 13 - | > | 12 + | (15) | 2 + | < | 3 + | (5) |
| 12 - | < | 13 + | (16) | 8 - | < | 8 + | (6) |
| 100 - | < | 1 + | (17) | 98 - | < | 89 + | (7) |
| 101 - | > | 100 + | (18) | 51 + | < | 15 - | (8) |
| 17 + | < | 14 + | (19) | 5 - | < | صفر | (9) |
| 15 - | > | 17 - | (20) | 3 + | < | صفر | (10) |

[ب] ضع علامة < أو > فيما بين كل كمتين متجهتين من الكميات المتجهة التالية ، بحيث تتحقق صحة العلاقة الجبرية (المتباينة) :

- | | | | | | | | |
|------|---|------|------|------|---|------|------|
| 5 - | ؟ | 3 + | (11) | 14 - | ؟ | 6 + | (1) |
| 12 + | ؟ | 8 - | (12) | 3 - | ؟ | 5 - | (2) |
| 14 - | ؟ | 9 + | (13) | 11 + | ؟ | 2 - | (3) |
| 27 - | ؟ | 17 + | (14) | 9 - | ؟ | 8 + | (4) |
| 50 + | ؟ | 38 - | (15) | 28 - | ؟ | 18 + | (5) |
| 21 - | ؟ | 11 + | (16) | 9 - | ؟ | صفر | (6) |
| 30 - | ؟ | صفر | (17) | 3 + | ؟ | 3 - | (7) |
| صفر | ؟ | 10 - | (18) | 15 + | ؟ | 12 - | (8) |
| 9 + | ؟ | 9 - | (19) | 12 + | ؟ | 17 - | (9) |
| 15 + | ؟ | 51 - | (20) | 2 - | ؟ | 1 - | (10) |

[ج] أوجد قيمة ما يلي :

- | | |
|------------------|------------------|
| $7 - 11 +$ (١١) | $9 - 9 +$ (١) |
| $17 + 15 -$ (١٢) | $5 -$ صفر (٢) |
| $15 - 17 -$ (١٣) | $5 - 13 +$ (٣) |
| $17 + 15 +$ (١٤) | $30 - 27 +$ (٤) |
| $30 + 20 -$ (١٥) | $22 - 33 +$ (٥) |
| $7 - 9 +$ (١٦) | $20 + 15 -$ (٦) |
| $10 + 9 -$ (١٧) | $15 + 20 -$ (٧) |
| $1 - 5 +$ (١٨) | $20 - 20 -$ (٨) |
| $5 - 1 -$ (١٩) | $10 + 15 +$ (٩) |
| $7 - 8 +$ (٢٠) | $37 - 30 +$ (١٠) |

[د] أوجد قيمة ما يلي :

ملاحظة :- الإجابة في هذه النوعية من المسائل تحتاج إلى خطوة زيادة في الحل عن السابق .

- | | |
|-----------------------|----------------------|
| $3 - 2 + 3 -$ (١١) | $4 + 3 - 5 +$ (١) |
| $11 - 8 + 6 -$ (١٢) | $5 + 3 - 7 -$ (٢) |
| $13 + 11 - 17 +$ (١٣) | $12 + 5 - 13 +$ (٣) |
| $50 + 17 - 23 -$ (١٤) | $9 + 8 - 7 +$ (٤) |
| $9 - 8 - 7 +$ (١٥) | $13 + 5 - 10 +$ (٥) |
| $4 - 5 + 6 -$ (١٦) | $10 - 11 - 12 +$ (٦) |
| $15 + 3 - 27 +$ (١٧) | $22 - 20 + 18 -$ (٧) |
| $31 + 12 - 18 -$ (١٨) | $10 + 50 - 40 +$ (٨) |
| $16 - 13 - 14 +$ (١٩) | $14 + 12 - 11 +$ (٩) |
| $40 - 30 + 20 -$ (٢٠) | $14 - 7 - 21 +$ (١٠) |

[هـ] ضع في كل مما يلي الكمية المتجهة المناسبة الناقصة . حتى تتحقق صحة العلاقة :

$$\begin{aligned} 13 - &= \square \quad 5 - 18 + \quad (11) & 5 + &= 2 - \quad 7 + \quad (1) \\ 11 + &= \square \quad 25 - 30 + \quad (12) & 8 - &= \square \quad 13 + \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 20 + &= 7 + \square \quad 11 - \quad (13) & 19 + &= \square \quad 5 + 8 - \quad (3) \\ 25 - &= 7 + \square \quad 3 - \quad (14) & 8 - &= \square \quad 3 - 7 + \quad (4) \\ \text{صفر} &= 4 - \square \quad 17 + \quad (15) & \text{صفر} &= \square \quad 9 - \quad (5) \\ 11 + &= 8 - \square \quad 12 + \quad (16) & 20 + &= \square \quad 10 - \quad (6) \\ 15 + &= 9 + \square \quad 23 - \quad (17) & 7 - &= \square \quad 15 + \quad (7) \\ 13 - &= 11 - \square \quad 14 + \quad (18) & 19 + &= 8 + \square \quad 11 - \quad (8) \\ 30 - &= 13 + \square \quad 8 - \quad (19) & 10 - &= \square \quad 8 - 23 + \quad (9) \\ 40 + &= 20 - \square \quad 5 + \quad (20) & 1 + &= \square \quad 15 - \quad (10) \end{aligned}$$

[١٧ - ٦] ضرب وقسمة الكميات المتجهة (الأعداد الجبرية) :

عند ضرب أو قسمة أى كمية متجهة يجب ملاحظة التالى :

أولاً - الضرب :

- حاصل ضرب عدد موجب \times عدد موجب = عدد موجب .
- حاصل ضرب عدد سالب \times عدد سالب = عدد موجب .
- حاصل ضرب عدد موجب \times عدد سالب = عدد سالب .
- حاصل ضرب عدد سالب \times عدد موجب = عدد سالب .

ثانياً : القسمة :

- نتيج قسمة عدد موجب \div عدد موجب = عدد موجب .
- نتيج قسمة عدد سالب \div عدد سالب = عدد موجب .
- نتيج قسمة عدد موجب \div عدد سالب = عدد سالب .
- نتيج قسمة عدد سالب \div عدد موجب = عدد سالب .

تدريبت عامة على الكميات المتجهة

ملاحظة : سنكتفى ابتداء من الآن أن نكتب الكمية المتجهة الموجبة بدون إشارة

+

[أ] اختصر ما يلي :

$$\begin{aligned}
 &= 3 - (6 -) - (8 -) - (11) & 17 = 7 + 10 = (7-) - 10 & (1) \\
 &= (2-) + (9-) - (5-) - (12) & & = (5 -) + 5 & (2) \\
 &= (7 -) - (6 -) + 3 - (13) & & = (3 -) - (7 -) + 8 - & (3) \\
 &= (9 -) + (15 -) - 13 - (14) & & = 19 - (13 -) - 12 - & (4) \\
 &= (8 -) - (9 -) - 21 & (15) & = (8 -) - (23 -) - 15 & (5) \\
 &= (9 -) - (7 -) - 18 - & (16) & = 6 - (8 -) - 5 - & (6) \\
 &= (5 -) + (12 -) - 13 & (17) & = (8 -) - 9 - 11 & (7) \\
 &= (10 -) - (5 -) + 19 - & (18) & = (3 -) - (5 -) + 11 - & (8) \\
 &= 15 - (11 -) - 10 & (19) & = (9 -) - 3 - 17 & (9) \\
 &= 25 - (10 -) - 15 & (20) & = (9 -) - 12 - & (10)
 \end{aligned}$$

[ب] اضرب الكميات المتجهة التالية :

$$\begin{aligned}
 &= 4 - \times 11 - & (11) & = 6 - \times 5 - & (1) \\
 &= 5 - \times 3 - & (12) & = 8 - \times 5 & (2) \\
 &= 8 - \times 17 - & (13) & = \frac{1}{2} - \times 15 & (3) \\
 &= 132 \times \frac{3}{11} - & (14) & = \frac{2}{9} \times \frac{7}{3} - & (4) \\
 &= 63 - \times \frac{2}{7} & (15) & = 27 - \times \frac{17}{9} - & (5) \\
 &= 52 - \times \frac{8}{13} & (16) & = 5 \times 8 - & (6) \\
 &= 9 - \times 4 - & (17) & = 9 \times 7 - & (7) \\
 &= 11 - \times 11 & (18) & = 11 - \times 9 - & (8) \\
 &= 10 - \times 10 - & (19) & = 8 - \times 6 & (9)
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{11} - \times 100 \text{ (20)}$$

$$= 9 \div 27 - \text{(11)}$$

$$= 9 - \div 81 - \text{(12)}$$

$$= 10 \div 10 - \text{(13)}$$

$$= \frac{1}{5} - \div 7 - \text{(14)}$$

$$= 9 - \div 63 - \text{(15)}$$

$$= 4 - \div 88 \text{ (16)}$$

$$= 7 - \div 84 \text{ (17)}$$

$$= 11 - \div 132 - \text{(18)}$$

$$= 9 \div 108 - \text{(19)}$$

$$= 10 - \div 100 - \text{(20)}$$

$$= 3 - \times 4 - \text{(10)}$$

[ج] اقسام الكميات المتجهة التالية :

$$= 2 - \div 6 \text{ (1)}$$

$$= 3 - \div 9 - \text{(2)}$$

$$= \frac{1}{5} \div 7 - \text{(3)}$$

$$= 18 - \div 9 - \text{(4)}$$

$$= \frac{1}{3} \div 3 - \text{(5)}$$

$$= \frac{1}{7} - \div 4 \text{ (6)}$$

$$= 4 - \div 16 - \text{(7)}$$

$$= \frac{1}{5} - \div 25 - \text{(8)}$$

$$= 5 - \div 25 \text{ (9)}$$

$$= 6 - \div 30 - \text{(10)}$$



الدرس السادس عشر :

جمع الحدود الجبرية المتشابهة Collecting Like Terms

إذا كان في حقيبتك ٤ كتب واشترت عدد ٣ كتب أخرى فإنه يقال أن معك ٧ كتب ، ولكن إذا كان عندك ٤ كتب واشترت ٣ كراسات فإن ما معك ليس ٧ كتب ولا هو ٧ كراسات لأنه لا يمكن جمع نوعين مختلفي الوحدات ولكن يمكننا جمع أى كميات جبرية من نفس النوعية .

وبالمثل فإن ٣ كيلو تفاح ، ٤ كيلو موز لا يمكننا أن نقول أنها ٧ كيلو تفاح ولا هي ٧ كيلو موز لاختلاف الوحدات .

فإذا فرضنا أن رمز الكتاب س بينما رمز الكراسة ص .

فإن في الحالة الأولى لدينا ٤ س وإشترينا ٣ س .

فيكون مجموع مالدينا = ٤ س + ٣ س = ٧ س أى سبعة كتب .

ويطلق على ٤ س ، ٣ س ، .. حدوداً متشابهة بينما في الحالة الثانية ، لدينا ٤ س

وإشترينا ٣ ص .

فيكون مجموع مالدينا = ٤ س + ٣ ص = ٣ ص + ٤ س .

ويطلق على ٤ س ، ٣ ص حدوداً غير متشابهة .

مثال (١) : اختصر الآتى :

$$٤ س + ٣ س + ٩ س + س .$$

ملاحظة : س تعنى ١ س ولكن جبرياً لا يتم كتابة رقم ١ وبالمثل ١ ص = ص ،

١ م = م ، وهكذا ..

والمجموع = ١٧ س .

مثال (٢) : اختصر الآتى :

$$٧ \text{ س} + ٥ \text{ س} - ٨ \text{ س} + ٩ \text{ س} - ٣ \text{ س} .$$

ويلاحظ فى هذه المسألة أنه لدينا حدود متشابهة فى س كما أن بعضها موجب وبعضها سالب .

ومن السهل فى مثل هذه المسائل أن نجمع الحدود الموجبة معاً والحدود السالبة معاً ثم نوجد الفرق بينهما كما يلى :

$$٧ \text{ س} + ٥ \text{ س} + ٩ \text{ س} - ٨ \text{ س} - ٣ \text{ س} .$$

(حدود موجبة) (حدود سالبة)

$$\therefore ٢١ \text{ س} - ١١ \text{ س} = ١٠ \text{ س}$$

مثال (٣) : اختصر الآتى :

$$٧ \text{ س} + ٣ \text{ ص} + ٨ \text{ س} + ١٠ \text{ ص} - \text{س}$$

فى هذا المثال لدينا حدود جبرية غير متشابهة فى س ، ص ولحل هذا النوع علينا بتجميع كل الحدود المتشابهة معاً كما يلى :

$$٧ \text{ س} + ٨ \text{ س} - \text{س} + ٣ \text{ ص} + ١٠ \text{ ص} =$$

$$= ١٥ \text{ س} - \text{س} + ١٣ \text{ ص} = ١٤ \text{ س} + ١٣ \text{ ص} .$$

ويلاحظ أنه لا يمكننا أن نختصر هذه المجموعة من الحدود إلى أقل من هذه الصيغة .

مثال (٤) : اختصر الآتى :

$$٧ \text{ س} + ٦ - ٢ \text{ س} + ٩ \text{ ص} - ٥ - ٣ \text{ ص} .$$

ويلاحظ فى هذه المسألة أن الحدود الغير متشابهة ذات ثلاث نوعيات أحدهما تحتوى على س والثانية على ص والثالثة عبارة عن أرقام مطلقة (حدود مطلقة) وهى $٦ +$ ، $٥ -$.

وبنفس الطريقة علينا بتجميع كل نوعية بمفردها كما يلى :

$$\begin{aligned}
& ٧ \text{ س} + ٦ - ٢ \text{ س} + ٩ \text{ ص} - ٥ - ٣ \text{ ص} = \\
& = (٧ \text{ س} - ٢ \text{ س}) + (٩ \text{ ص} - ٣ \text{ ص}) + (٥ - ٦) = \\
& = ٥ \text{ س} + ٦ \text{ ص} + ١ =
\end{aligned}$$

وهى أبسط صورة لاختصار هذه الحدود المعطاه لنا في المثال .

مثال (٥) : اختصر الآتى :

٥ س ص + ٢ س م + ٣ ص س + ٧ م س
يبدو فى هذه المسألة ، لأول وهلة أنها عبارة عن ٤ حدود جبرية غير متشابهة ،
ولكن دعنا نتأمل الحدين : ٥ س ص ، ٣ ص س .

يلاحظ أن س ص تعادل تماماً ص س مثلما الحال فى :

$$٤ \times ٦ = ٦ \times ٤$$

وبمعنى آخر نجد أن س ص = ١ س ١ ص = ١ س ص

أو ١ ص س = س ص = ص س

وكذلك الأمر بالنسبة للحدود المحتوية على س م ، م س فهى متعادلة تماماً حيث

$$\text{أن } م \times م = م \times م = م س = س م$$

∴ المسألة تعتبر نوعين فقط مختلفى الحدود وهما س ص ، س م .

$$\therefore ٥ \text{ س ص} + ٢ \text{ س م} + ٣ \text{ ص س} + ٧ \text{ م س} =$$

$$= ٥ \text{ س ص} + ٣ \text{ ص س} + ٢ \text{ م س} + ٧ \text{ م س} =$$

$$= ٨ \text{ س ص} + ٩ \text{ م س} .$$

وهذه الحدود لا يمكن اختصارها لصورة أبسط من هذه .

تکلیفات

[أ] اختصر ما يلي :

- (١) ٥ س + ٤ س + س .
- (٢) ١٩ + ٢ + ٢٣ .
- (٣) ١١ ب + ٣ ب + ٨ ب .
- (٤) ٦ م + ٩ ص + ٣ س
- (٥) ٦ س + ٤ س - ٩ س .
- (٦) ٨ س - س - ٣ س .
- (٧) ٣ ص - ٥ ص + ٧ ص .
- (٨) ١٧ - ٨ ب + ١٩ .
- (٩) ٨ س + ٣ ص - ٢ س + ٩ ص + ٦ .
- (١٠) ٧ س - ٥ + ٢ س - ٣ ص + ٧ ص + ٩
- (١١) ١٣ + ٢ ب - ٢ - ٧ ب .
- (١٢) ١٧ + ٥ س - ٢٣ - س .
- (١٣) ٢ ص + س - ٢ + ٣ س + ٥ ص .
- (١٤) ٢٢ - ٣ س - ١٣ + ٤ س .
- (١٥) ٤ ص - ١٥ - ٣ ص + ٧ .
- (١٦) ٦ - ٢ س + ٧ + ٧ س .
- (١٧) ١٥ - ١٤ ب + ١٣ ص - ١٢ .
- (١٨) س - ص + ٧ س - ٨ ص .
- (١٩) ١٧ + ب - ٣ ج + ٢٢ - ٤ ب - ج .
- (٢٠) ٨ س + ١ + ٦ ب - ٥ ب + ٢٣ - ٢٠ س
- (٢١) ٢ م + ن + ل - ن + ٣ ل .
- (٢٢) ٢٣ + ٥ ب + ٢ + ٣ ب + ٢٢ + ٦ ب .
- (٢٣) ٧ س + ٥ ص + س - ٢ ص - ٨ س .
- (٢٤) ١٦ س + ٨ ص - ٩ س + ٧ ص - ٥ .
- (٢٥) ١ + ب - ٢٨ + ١٩ - ٥ ب + ٩ .

[ب] اختصر ما يلي وتذكر أن $ص = ص$ ، $س = س$ ، $اب = ب ا$ وهكذا .

(١) $أ ب ج + ب ج ا + ج ا ب$.

(٢) $٢ س ص + ٣ ص س - ٥ س ص أ$.

(٣) $٥ س ص + ٦ ص س - ٣ س ص$.

(٤) $٨ س ص ع + ٢ ع ص س - ٢ س ص$.

(٥) $٦ س ص + ٣ ص أ - ٥ ص س - ٢٢ ص$.

(٦) $٨ أ ب + ٩ ب ج - ٧ ب أ - ٩ ج ب$.

(٧) $٢ أ ب + ٥ س ص - ٣ ب أ + ٧ ص س$.

(٨) $س ص + ٣ ص س + س - ص$.

(٩) $٢٥ ب - ٢ ب أ + ب - أ$.

(١٠) $٦ س ص - ٢٢ ص - ٤ ص س + ٢ ص أ$.

[ج] اختصر ما يلي ثم أوجد قيمة الناتج بعد الاختصار باعتبار الآتي :

$٥ = ١$ ، $٣ = ب$ ، $٢ = ج$.

(١) $٤٥ ب + ٦ ب - ٧ ج + ٣ ج$.

(٢) $١٢ أ - ٥ ب + ٣ ج - ٤ ب$.

(٣) $٧ أ - ٨ ب + ٩ ج$.

(٤) $١٢ أ - ٦ ب + ٢ ج - ٤ أ$.

(٥) $٤٥ ب + ٦ ب ج - ٦ ب + ٣ أ ب$.

(٦) $٣ أ ج - ٥ ج ب + ٦ أ ب$.

(٧) $١٢ أ - ٦ ج + ٣ ب - ٧ أ ج$.

(٨) $أ + ب + ج - أ ب$.

(٩) $أ - ب - ج + أ ج$.

(١٠) $٢٢ أ - ٢ ب + ٢ ج - ج ب$.

(١١) $٣ ج - ٥ ب أ + ٦ أ ج - ٣ ب$.

(١٢) $٢٢ أ ج - ٢ ب ج + ٣٣ ج$.

(١٣) $٢٥ ج - ٥ ب ج + ٣ ج أ - ج$.

(١٤) $٢٢ ب ج + ٣ ج ب أ - ٥ ب ج$.

(١٥) $٢٥ ب ج - ٢ ج ب أ + ٣ ج$.

الدروس السابع عشر :

قوانين المعادلات الجبرية

Laws of Equations

[١٧ - ١] قوانين الإبدال والدمج والتوزيع :

Commutative, Associative and Distributive Laws :

(أ) قانون الإبدال :

إذا كانت s ، v ، c تمثل أعداداً فإن :

$$(١) s + v = v + s .$$

$$(٢) s \cdot v = v \cdot s .$$

أى أنه فى (١) أى فى الجمع فإن الكميات الجبرية يمكن إبدالها .

وكما فى (٢) أى فى الضرب فإن الكميات الجبرية يمكن إبدالها كذلك .

إلا أن قانون الإبدال لا ينطبق على عمليتي الطرح والقسمة .

ففى الطرح :

إذا اعتبرنا $s - v$ فإنها لا تساوى $v - s$.

ومثال ذلك : $٥ - ٦$ لا تساوى $٦ - ٥$.

فالأولى تساوى $١ -$ بينما الثانية تساوى $١ +$.

وفى القسمة :

إذا قلنا $\frac{s}{v}$ فإنها لا تساوى $\frac{v}{s}$.

ومثال ذلك :

$$\frac{٤}{٢} \text{ لا تساوى } \frac{٢}{٤} .$$

فالأولى $(\frac{٤}{٢}) = ٢$ بينما الثانية $(\frac{٢}{٤})$ فتساوى $\frac{١}{٢}$.

(ب) قانون الجمع :

إذا كانت a ، b ، c تمثل أعداداً جبرية فإنه :

$$\text{في الجمع : } a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c) .$$

ومثال ذلك :

$$18 = (5 + 6) + 7 = (5 + 7) + 6 = (7 + 6) + 5 = 7 + 6 + 5$$

وفي الضرب : $a(b + c) = ab + ac$.

$$\text{ومثال ذلك : } 60 = (2 \times 6) \times 5 = 2 \times (6 \times 5) .$$

(ج) قانون التوزيع :

إذا كانت s ، v ، e تمثل أعداداً جبرية فإن :

$$s(v + e) = sv + se .$$

ومثال ذلك : إذا اعتبرنا $s = 2$ ، $v = 3$ ، $e = 4$.

$$\therefore 2(v + e) = 2 \times 3 + 2 \times 4 = 6 + 8 = 14$$

وكذلك : $(v + e)s = sv + es$.

$$\text{فإن } 2(v + e) = 2 \times 3 + 2 \times 4 = 6 + 8 = 14 .$$

[١٧ - ٢] التعويض عن الرموز الجبرية :

Simple Substitution

إن الرموز الجبرية المستعملة في المقادير الجبرية تعنى في كثير من الحالات وترمز إلى مقادير عددية أو قيم عددية .

والأمثلة التالية تُوضح ذلك :

مثال (١) : إذا افترضنا أن $s = 5$ ، فأوجد قيمة $5 + 6$

$$\therefore 5 + 6 = 5 \times 5 + 6 = 25 + 6 = 31$$

مثال (٢) : إذا افترضنا أن $س = ٢$ فأوجد قيمة $٧ س - ٨ - ٣ س$.
 $\therefore ٧ س - ٨ - ٣ س = ٤ س - ٨ = ١٦ - ٨ - ٨ = ٨ - (٢ \times ٤)$

مثال (٣) : إذا افترضنا أن $س = ٣$ ، $ص = ٢$ ، فأوجد قيمة : $٧ س - ٥ ص$ ؟
 $٧ س - ٥ ص = ٣ \times ٧ - ٢ \times ٥ = ٢١ - ١٠ = ١١$

مثال (٤) : أوجد قيمة $٥ س - ٣ ص - ٦ ص - ٤ ص$ إذا علمت أن $س = ٣$ ، $ص = ٢$.

الحل :

$\therefore ٥ س - ٦ ص - ٣ ص - ٤ ص = ٥ س - ١٥ ص = ١٥ - ١٥ = ٠$
 $\therefore ٥ س - ٦ ص + ٣ ص - ٤ ص = ٥ س - ٧ ص = ١٥ - ١٤ = ١$
 $= ٥ - ١٤ = ٨ + ٩ - ٦ = ٢ - ٤ - ٣ \times ٣ - ٢ - ٣ =$

مثال (٥) : أوجد قيمة $\frac{٦ س ص}{٢٤} - \frac{٢ س ع}{ص}$

إذا كانت $س = ٣$ ، $ص = ٢$ ، $ع = ١$ ، $١٥ = ٢$

الحل :

$٣ = ٣ - ٦ = \frac{١ \times ٣ \times ٢}{٢} - \frac{٢ \times ٣ \times ٦}{١,٥ \times ٤}$

تكريرات

[أ] إذا كانت قيمة $س = ٢$ فأوجد قيمة ما يلي :

(١) $٧ س$
(٢) $١٩ س$
(٣) $٣ س - ٤$
(٤) $١٢ س - ٥ + س$
(٥) $٧ س + ٢ - ٦ س$
(٦) $\frac{١}{٤} س - ٦ - س$
(٧) $\frac{١}{٤} س + ٣$
(٨) $٥ س - ٦$
(٩) $١٠ س - ٧$
(١٠) $\frac{٣}{٤} س - ٢ + \frac{٧}{٢} س$

[ب] إذا كانت قيمة س = ٥ ، ص = ٢ فأوجد قيمة ما يلي :

- (١) ٣ - ٢ ص
 (٢) ٥ - ٣ ص
 (٣) $\frac{٧}{٥}$ س - $\frac{٥}{٣}$ ص
 (٤) ٢ - ٥ ص
 (٥) ٢ - $\frac{١}{٣}$ ص
 (٦) ٧ - ٣ ص
 (٧) ٦ + ٣ ص
 (٨) ٨ - ٣ ص
 (٩) ٣ + ٢ ص
 (١٠) ٥ - ٣ ص

[ج] إذا كانت ا = ٤ ، ب = ٥ ، ج = ٢ فأوجد قيمة ما يلي :

- (١) ١٣ - ٢ - ب - ج - ا
 (٢) $\frac{٤}{١٥} ب - \frac{٢}{٤} ج +$
 (٣) ٦ - ٢ - ج - ب - ا
 (٤) $\frac{١٦}{٣} - ٢ - ب - ج + ٣$
 (٥) $\frac{١٣ - ج}{٢} - \frac{١٥ - ج}{٢}$
 (٦) ٦ - ب ÷ ٥ ج
 (٧) ١٥ - ٢ ÷ ب ج
 (٨) ٢٣ - ب ج ÷ ٨ ب
 (٩) ١٢ - ج + ٣ - ب ج - ٢٥ ب ج
 (١٠) ٥ - ب ÷ (٢ + ٢٤ ج)

مسائل أخرى متنوعة :

[١] إذا كانت العلاقة بين عمر رجل س وعمر ابنه ص تتوقف على فارق السن بينهما ع .

$$فإذا علمت أن ٢ س = ٣ ع + ٢ ص$$

فأوجد :

(أ) عمر الرجل إذا كان الفارق بينهما ع = ٢٢ سنة ، عمر الابن = ٧ سنوات .

(ب) عمر الابن إذا كان عمر الرجل = ٤٦ والفارق بينهما = ٢٤ سنة .

[٢] إذا كانت مساحة شبه المنحرف = $\frac{١}{٣}$ حاصل ضرب مجموع القاعدتين المتوازيين × الارتفاع المحصور بينهما .

وكان طول القاعدة الصغرى = س ، طول القاعدة الكبرى = ص ،

الارتفاع = ع

فأوجد مساحة شبه المنحرف إذا كان :

$$(أ) \text{ س} = 6 \text{ سم} ، \text{ ص} = 12 \text{ سم} ، \text{ ع} = 3 \text{ سم}$$

$$(ب) \text{ س} = 5 ، \text{ ص} = 8 ، \text{ ع} = 6 \text{ سم}$$

وإذا كانت مساحة شبه المنحرف = 100 سم² فأوجد :

$$(أ) \text{ طول القاعدة الصغرى إذا كان طول القاعدة الكبرى} = 20 \text{ سم} ،$$

$$\text{الارتفاع} = 8 \text{ سم} .$$

$$(ب) \text{ الارتفاع إذا كان مجموع القاعدتين} = 50 \text{ سم} .$$

[٣] إذا كانت تكلفة نقل طن من الفاكهة س تتوقف على قيمة إيجار السيارة ص وعلى بعد المسافة المنقولة منها ف .

وكانت تربطهم العلاقة الجبرية التالية :

$$\text{س} = \frac{1}{5} \text{ ص} + \frac{1}{4} \text{ ف جنياً} .$$

فأوجد :

$$(أ) \text{ تكلفة نقل الطن إذا كان إيجار السيارة} 200 \text{ جنياً والمسافة} = 90 \text{ كم} .$$

$$(ب) \text{ قيمة إيجار السيارة إذا كانت الكمية المنقولة هي} 5 \text{ طن والمسافة} 120 \text{ كم}$$

$$\text{وتكلفة نقل الطن} = 80 \text{ جنياً} .$$

[٣ - ١٧] حل المعادلات البسيطة :

Solving simple equations :

إذا قلنا أن $10 = 2 + 8$ فهي في لغة الرياضيات تعنى معادلة حسابية .

والآن لو ذكرنا هذه المعادلة في صورة لغز بسيط كالتالى :

ما هو العدد الذى إذا أضيف إليه العدد 2 لأصبح الناتج 10 ولحل هذا اللغز نعتبر

أن العدد المجهول = س

∴ لو أضفنا على العدد س ، العدد 2 يُصبح الناتج 10 ويمكن تحويل هذا الكلام

إلى معادلة رياضية كالتالى :

$$س + ٢ = ١٠$$

ويطلق على هذه المعادلة بمعادلة جبرية لأن بها رموز أو مجاهيل ، وهي ذات مجهول واحد وهو س ، حيث أنه توجد معادلات في مجهولين وفي ثلاثة مجاهيل وهكذا ..

وهذا المجهول في المعادلة المذكورة له قيمة واحدة فقط ولحسابه نقول :

$$.. س + ٢ = ١٠$$

$$.. س = ١٠ - ٢ = ٨$$

$$.. س = ٨$$

مثال (١) : لنعتبر المعادلة : $س - ٣ = ٥ = ١٠$

ويكون حل هذه المعادلة ، أى إيجاد قيمة س التي تجعل طرفي المعادلة متعادل .

أو إيجاد قيمة س التي لو ضربت في ٣ وطرح منها ٥ لكان الناتج = ١٠ .

وتعنى علامة = أن الطرف الأيمن للمعادلة " ٣ س - ٥ " يعادل تماماً أو يتزن

تماماً مع الطرف الأيسر للمعادلة " ١٠ " .

وهذا يلزمنا بأن أى تغيير يتم في الطرف الأيمن لابد وأن يعادله نفس التغيير بالضبط

في الطرف الأيسر .

وذلك بمعنى أننا إذا أضفنا فرضاً + ٥ للطرف الأيمن فإنه لا بد وأن نضيف

كذلك + ٥ للطرف الأيسر وبذلك تُصبح المعادلة كالتالي :

$$٣ س - ٥ + ١٠ = ٥ + ٥$$

.. $٣ س = ١٥$ وهي نفس المعادلة الأصلية تماماً .

لاحظ أن الطرف الأيمن هنا (٣ س) ينقص عن الطرف الأيمن في المعادلة الأصلية

(٣ س - ٥) بمقدار ٥ .

بينما الطرف الأيسر في المعادلة الأخيرة (١٥) يزيد عن الطرف الأيسر في المعادلة

الأصلية (١٠) بمقدار ٥ .

وحيث أن $٣ س = ١٥$. فر بقسمة كل طرف على ٣

$$\text{ينتج أن } 3 \div 15 = 3 \div 5$$

$$\therefore 5 = 3$$

وهذا هو حل المعادلة أى أن $5 = 3$ تحقق المعادلة المعطاة لنا .

$$\text{مثال (٢) : } 5 = 3 - 6 = 10 + 3 \text{ س}$$

نلاحظ في هذا المثال أن المجهول s يظهر في كل من طرفي المعادلة ويلزم أولاً وقبل كل شيء أن نجمع الحدود التي تحتوى على s مع بعضها في طرف واحد من طرفي المعادلة ،

ولحل هذه المسألة نقوم بطرح 3 s لكل من طرفي المعادلة .

$$\therefore 5 = 3 - 6 = 10 + 3 - 3 \text{ س}$$

$$\therefore 2 = 3 - 6 = 10$$

وبإضافة 6 لكل من طرفي المعادلة .

$$\therefore 2 = 3 - 6 + 6 = 10 + 6$$

$$\therefore 2 = 16$$

وبقسمة طرفي المعادلة على 2 :

$$\therefore 2 \div 2 = 16 \div 2$$

$\therefore 8 = 3$ وهذا هو حل المعادلة .

موجز للمسألة $5 = 3 - 6 = 10 + 3 \text{ س}$

\therefore بطرح 3 s من كلا الطرفين $2 = 3 - 6 = 10$

وبإضافة 6 لكل من الطرفين $2 = 3 - 6 + 6 = 10 + 6$

وبقسمة كلا الطرفين على 2 $\therefore 8 = 3$

تطبيقات

[أ] ضع الجمل التالية في صورة معادلات جبرية :

- (١) عدد مجهول ، نضاعفه وننقص منهم ٥
- (٢) عدد مجهول نطرح منه ٥ والناتج = ١٠
- (٣) عدد مجهول نضيف إليه ٥ والناتج = $١٠ + \frac{١}{٣}$ العدد المجهول .
- (٤) عدد مجهول نضربه في ٦ والناتج = ١٢ - ضعف العدد المجهول .
- (٥) عدد مجهول نضربه في نفسه ثلاث مرات ونطرح منه ٩ .
- (٦) عدد مجهول نضربه في ٤ ونطرح منهم ٣ فيكون الناتج ٩ .

[ب] حل المعادلات التالية وذلك بطرح نفس العدد من كلا الطرفين :

(٦) $٢ + س = ١٤$	(١) $١٠ = ٩ + س$
(٧) $١٠ = ٨ + س$	(٢) $٨ = ٢ + س$
(٨) $٢٦ = س + ٦$	(٣) $٦ = س + ٢$
(٩) $٣ = ٣ + س$	(٤) $٢ = ٩ + ٢٣$
(١٠) $٨ = ١٠ + س$	(٥) $٧ = ١ + ص$

[ج] حل المعادلات التالية وذلك بإضافة نفس العدد لكلا الطرفين :

(٦) $٢ = ٨ - س$	(١) $٤ = ٥ - س$
(٧) $٢ = ٢ - س$	(٢) $٨ = ٢ - س$
(٨) $١ - س = ١٠$	(٣) $٩ = ١ - س$
(٩) $٧ - ٢ = ٤$	(٤) $صفر = ٢ - س$
(١٠) $٢ - ب = ١٣$	(٥) $١ = ١٠ - س$

[د] حل المعادلات التالية :

(٦) $١٢ = ٤ - س$	(١) $١٥ = س$
(٧) $٣ = ٨ - س$	(٢) $١٢ = س$
(٨) $٩ = ٩ + س$	(٣) $٢٨ = س$
(٩) $٣ - س = ١٣$	(٤) $١٢ = س$
(١٠) $١٨ = ٩ - س$	(٥) $٤٢ = س$