الجــزء الثــانى

القيــاس

MEASURE

الدرس السادس :

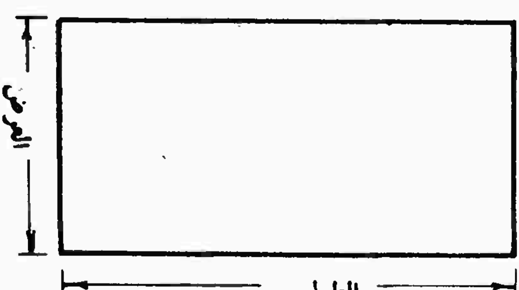
المســـاحات Area

[٦ ـ ١] عـــام :

فى هذا الدرس سنتعرض بإيجاز لما سبق دراسته فى الجزئين الأول والثانى عن المساحات .

١ ـ مساحة المستطيل :

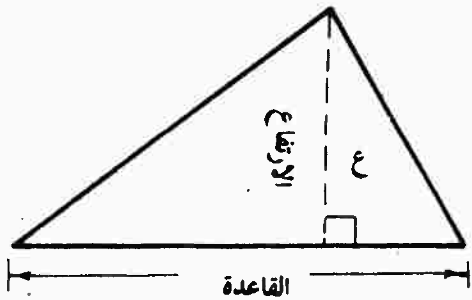
المساحة = الطول × العرض .... وحدة مربعة



شكل [٦ ـ ١]

٢ ـ مساحة المثلث :

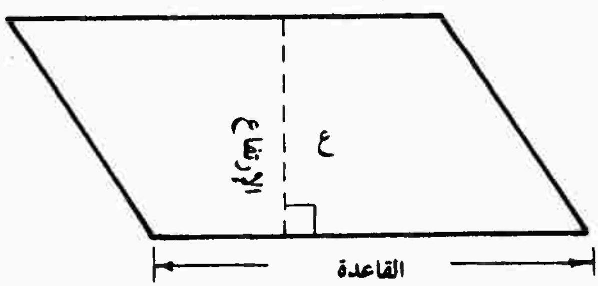
المساحة = $\frac{١}{٢}$ القاعدة × الارتفاع



شكل [٦ ـ ٢]

٣ ـ مساحة متوازى الأضلاع :

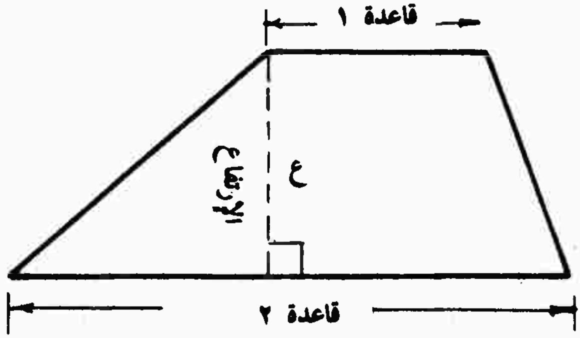
المساحة = طول القاعدة × الارتفاع



شكل [٦ ـ ٣]

٤ ـ شبه المنحرف :

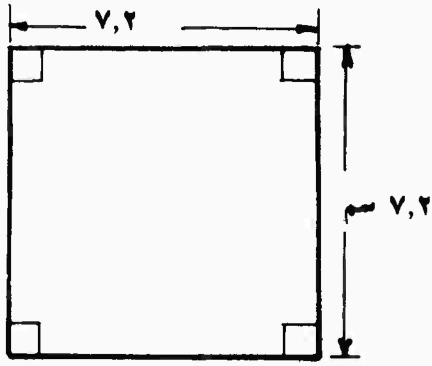
المساحة = $\frac{١}{٢}$ مجموع القاعدتين المتوازيتين × الارتفاع المحصور بينهما



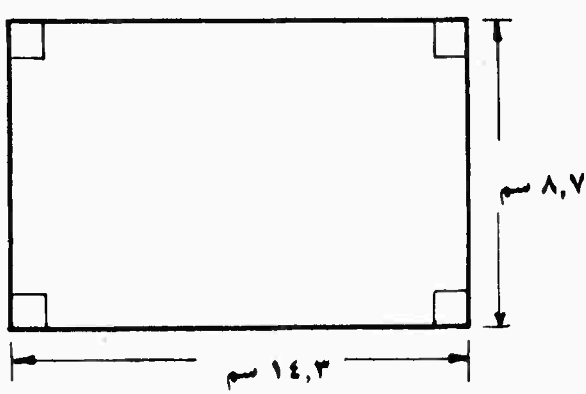
شكل [٦ ـ ٤]

[٦ ـ ٢] تدريبــات :

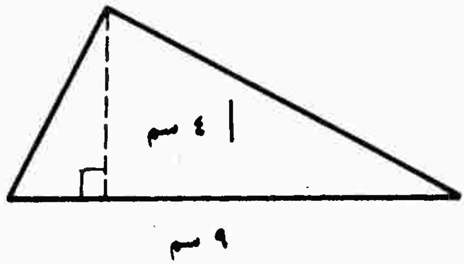
(١) باستخدام ما تعلمته فى الجزئين الأول والثانى ، أوجب مساحة الأشكال التالية :



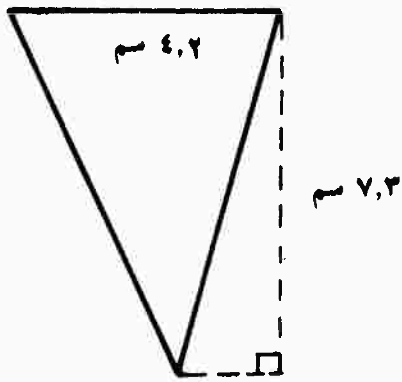
شكل [٦ ـ ٥] أ



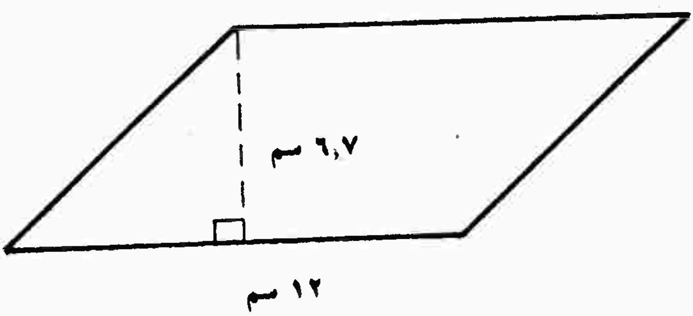
شكل [٦ ـ ٥] ب



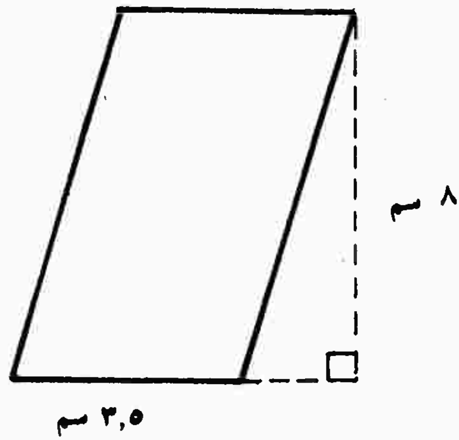
شكل [٦ ـ ٥] جـ



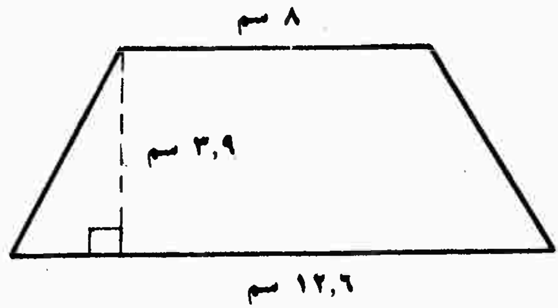
شكل [٦ ـ ٥] د



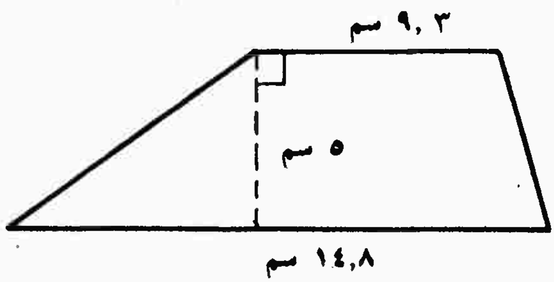
شكل [٦ ـ ٥] هـ



شكل [٦ ـ ٨] و



شكل [٦ ـ ٨] ز



شكل [٦ ـ ٨] ح

(٢) أوجد مساحة مربع طول ضلعه ١٣,٥ سم .

(٣) احسب مساحة قطعة أرض مستطيلة طولها ١٥,٧ متراً وعرضها ٦,٩ متراً .

(٤) مثلث ا ب جـ قائم الزاوية فى ب ، طول ضلعى القائمة ب ا = ٩,٣ سم ، ب جـ = ٢,٧ سم ، احسب مساحة المثلث .

(٥) مثلث ا ب جـ قائم الزاوية فى ب وأطوال أضلاعه هى ٦ ، ٨ ، ١٠ سم ، فاحسب طول العمود النازل من رأس القائمة ب على أطول ضلع بالمثلث .

□ للإسترشاد :

[يمكنك حساب مساحة المثلث ، ثم اعتبار الضلع الأطو ل بالمثلث كقاعدة ، ومن هنا احسب الارتفاع المطلوب بمعرفة المساحة] .

(٦) متوازى أضلاع ، طول ضلعين منه ١٤ سم ، ٨ سم ومساحته ٤٩ سم^{٢} ، فاحسب المسافة العمودية بين كل زوج من أضلاعه المتوازية .

(٧) شبه منحرف طول قاعدتيه المتوازيتين ١٨ سم ، ١٢ سم ويبعدا عن بعضهما بمسافة عمودية تدرها ٧ سم ، احسب مساحته

(٨) مثل ا ب جـ مساحته ٩٠ سم^{٢} فيه ب جـ = ١٦ سم :

(أ) احسب المسافة العمودية بين الرأسى ا والضلع ب جـ .

(ب) يبلغ عرض مستطيل ، ١٠ سم بينما تبلغ مساحته ٣ أضعاف مساحة المثلث ا ب جـ ، فاحسب هذا المستطيل .

(٩) احسب مساحة الدوائر التالية :

(أ) دائرة نصف قطرها ١٥ سم .

(ب) دائرة قطرها ٣٧,٢ متراً .

(جـ) دائرة قطرها $\frac{٢٢}{٧}$ متر

(١٠) دائرة مساحتها ٣١٠ سم^{٢} احسب طول قطرها.

الدرس السابع :

مساحة المثلث

Area of a triangle

[٧ ـ ١] مقدمـــة :

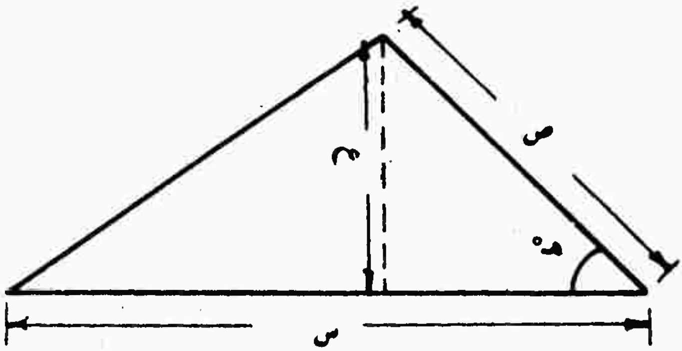
تعرضنا فى الجزء الأول لإيجاد مساحة المثلث بالاعتماد على طريقة القاعدة والارتفاع ، إلا أنه توجد طريقتان مستعملتان بكثرة ، كذلك لتعيين مساحة المثلث ، اعتماداً على المعلومات المعطاة لنا .

[٧ ـ ٢] الطريقة الأولى : بمعلومية ضلعين والزاوية المحصورة بينهما أو باستخدام النسب المثلثية

The trigonometric method

تستخدم هذه الطريقة فى إيجاد مساحة المثلث عندما يكون لدينا ومعروفاً ضلعين من أضلاع المثلث ، والزاوية المحصورة بينهما .

انظر شكل (٧ ـ ١) :



شكل [٧ ـ ١]

مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ س × ع

ولكن $\frac{ع}{ص}$ = جا هـ ∴ ع = ص جا هـ

∴ مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ س × ص × حا هـ

∴ مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب أى ضعلين مضروباً فى جيب الزاوية المحصورة بينهما .

□ ملحوظة :

حا هـ هى أحد النسب المثلثية والتى سوف نتعرض لها بالتفصيل مؤخراً فى هذا الكتاب .

وباستخدام الآلة الحاسبة ، فإنه يمكن إيجاد جيب أى زاوية ، وذلك بتسجيل قيمة الزاوية ثم الضغط على مفتاح **Sin X** .

□ مثـال :

استخدم آلتك الحاسبة فى إيجاد قيم جيوب الزاويا الآتية :

(١) جا ٣٠° (٢) حا ٦٠° (٣) حا ٨٩° (٤) حا ٩٠°

□ الحـل :

يرمز للجيب بالرمز جا وسوف نستخدم المقابل له وهو Sin عند التعرض لإيجاده بالآلة الحاسبة .

(١) حا ٣٠° = Sin 30 ،

(أ) نُدخل رقم ٣٠ على الآلة الحاسبة .

(ب) نضغط على مفتاح Sin X فنحصل على الإجابة مباشرة

∴ حا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$

(٢) حا ٦٠° = Sin 60 وبنفس الخطوات السابقة .

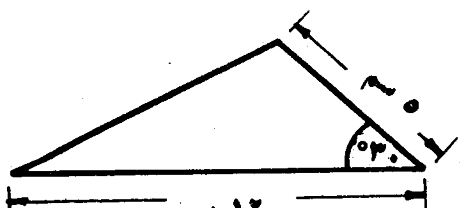
∴ حا ٦٠° = ٠,٨٦٦ تقريباً .

(٣) حا ٨٩° = ٠,٩٩٩٨٥ تقريباً

(٤) حا ٩٠° = ١

□ مثال (١) :

لإيجاد المساحة بطريقة النسب المثلثية السابقة أوجد مساحة المثلث المبين فى شكل (٧ ـ ٢)



شكل [٧ ـ ٢]

□ الحل :

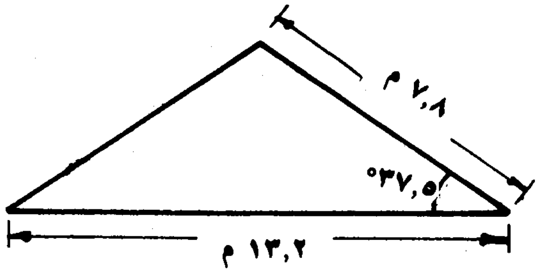
المساحة = $\frac{١}{٢}$ × ٥ × ١٢ حا ٣٠

= ٣٠ × $\frac{١}{٢}$ = ١٥ سم^{٢}

□ مثال (٢) :

أوجد مساحة قطعة أرض على شكل مثلث فى شكل (٧ ـ ٣) ، طول ضلعين من أضلاعه (٧,٨ متر) ، (١٣,٢ متر) والزاوية المحصورة بينهما مقدارها (٣٧,٥°) درجة ،

□ **الحـــل :**



شـكل [٧ ـ ٣]

المساحة : $\frac{١}{٢}$ س ص × حا هـ كما سبق

= $\frac{١}{٢}$ × ٧,٨ × ١٣,٢ × حا (٣٧,٥°) .

= ٣١,٣٣٩ = تقريباً ٣١,٣ متر^{٢}

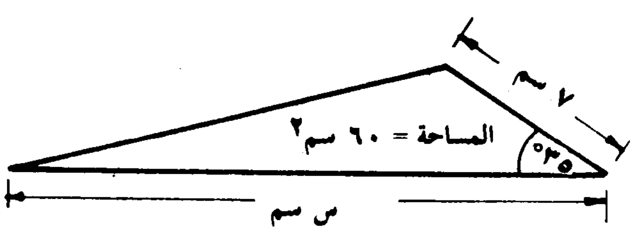
[نُسجل أولاً ٣٧,٥ ثم نضغط على مفتاح Sin X ثم نضرب فى ٧,٨ ثم فى ١٣,٢ ثم فى $\frac{١}{٢}$ فنحصل على الجواب] .

ويلاحظ بالقانون السابق أنه يمكن إيجاد طول ضلع من أضلاع المثلث إذا علمنا مساحة المثلث وأحد أضلاعه والزاوية المحصورة بين الضلع المجهول والضلع المعروف .

□ **مثـــال :**

أوجد طول الضلع المجهول بالمثلث المبين بشكل (٧ ـ ٤) والمرموز له بالرمز س سم .

□ **الحـل :**



شـكل [٧ ـ ٤]

المساحة : $\frac{١}{٢}$ × ٧ × س × حا ٣٥

∴ ٦٠ = $\frac{٧}{٢}$ س × حا ٣٥

∴ ١٢٠ = ٧ × حا ٣٥ × س

∴ س = $\frac{١٢٠}{٧ \text{ حا } ٣٥}$

ويكون تسلسل الخطوات على الآلة الحاسبة كالتالى :

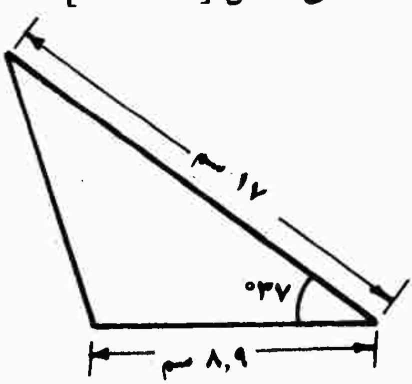
نسجل رقم ١٢٠ ثم مفتاح ÷ ثم ندخل الرقم ٧ ثم مفتاح ÷ ثم ندخل رقم ٣٥ ثم مفتاح Sin X ثم مفتاح =

فنحصل على الإجابة وهى :

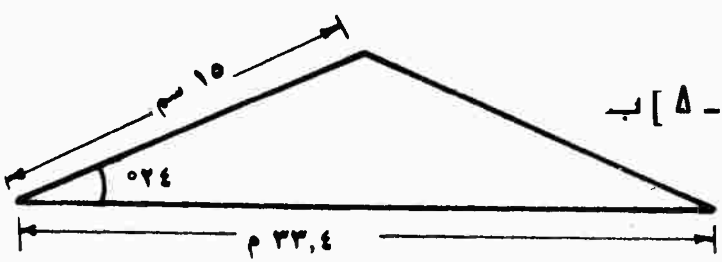
س = ٢٩,٨٨ سم تقريباً وهو طول الضلع المجهول .

[٧ ـ ٣] تدريبـــات :

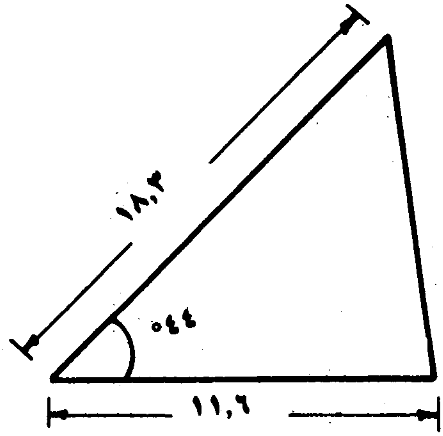
(١) أوجد مساحة المثلثات المبينة فى شكل [٧ ـ ٥]



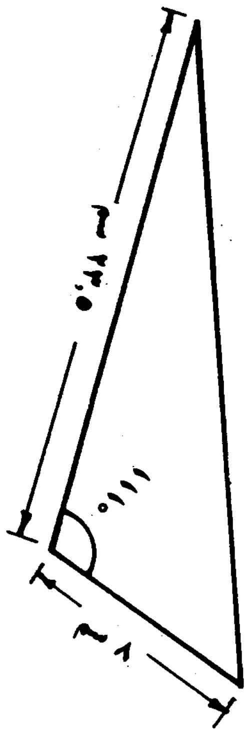
شكل [٧ ـ ٥] أ



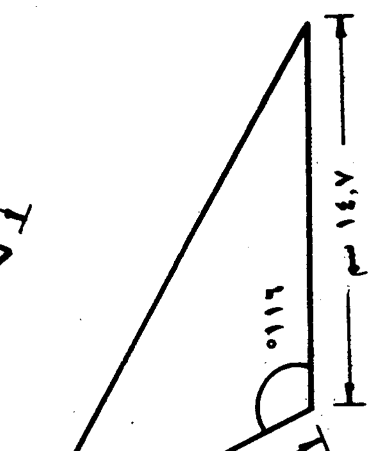
شكل [٧ ـ ٥] ب



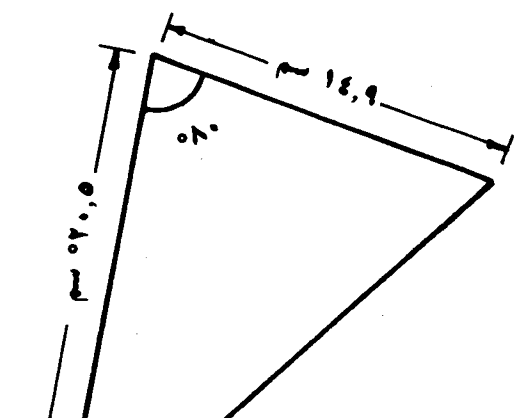
شكل [٧ ـ ٨] جـ



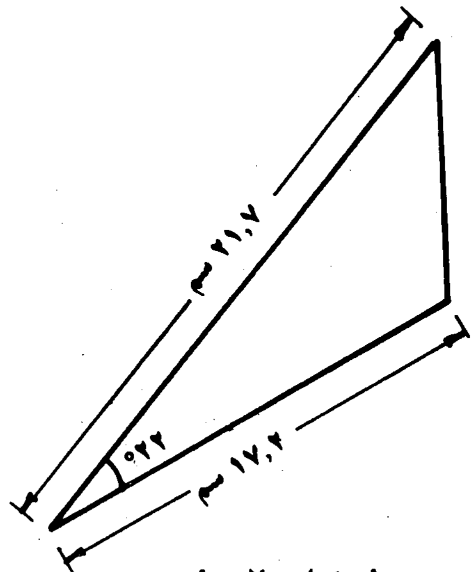
شكل [٨ ـ ٨] د



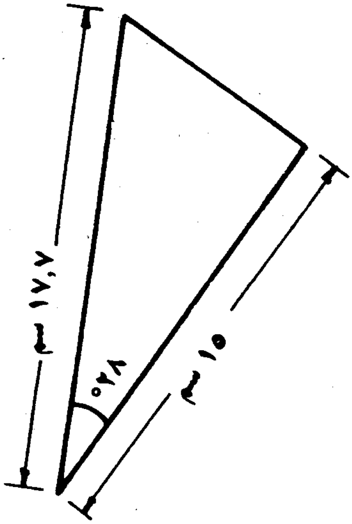
شكل [٧ ـ ٨] هـ



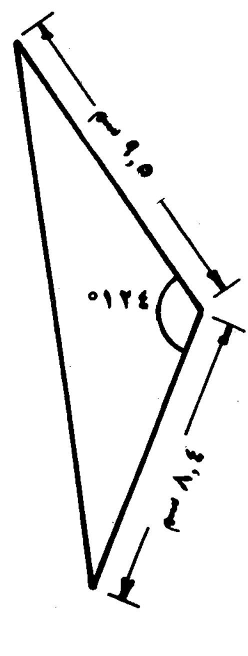
شكل [٧ ـ ٨] و



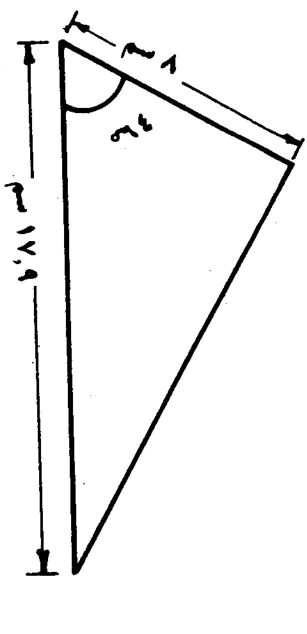
شكل [٧ ـ ٥] ز



شكل [٧ ـ ٥] ح



شكل [٧ ـ ٥] ط



شكل [٧ ـ ٥] ك

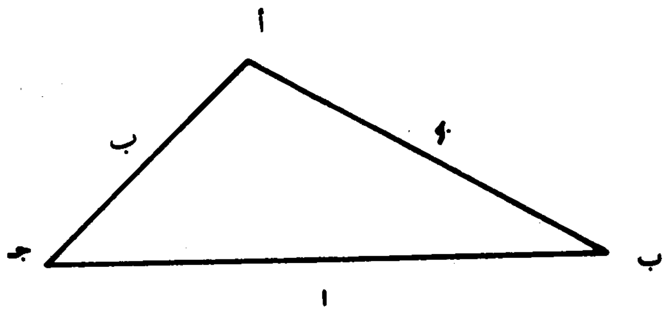
[٧ ـ ٤] الطريقة الثانية : طريقة هيرو

Hero's method

يُعتبر هيرو ، من قدامى علماء الرياضيات ، أول من اكتشف العلاقة بين مساحة المثلث وأطوال أضلاعه الثلاثة والمحيط وتنص هذه العلاقة على ما يلى :

مساحة المثلث = $\sqrt{\text{ح (ح − ا) (ح − ب) (ح − جـ)}}$

انظر شكل (٧ ـ ٦) ،



شكل [٧ ـ ٦]

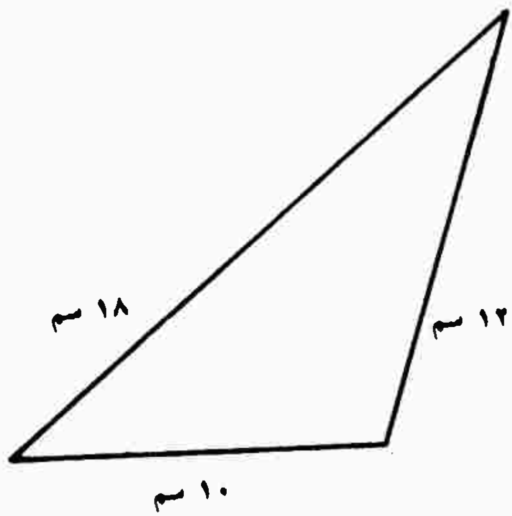
حيث ح = $\frac{١}{٢}$ محيط المثلث = $\frac{١}{٢}$ (ا + ب + حـ)

□ **مثال (١) :**

أوجد مساحة مثلث أطوال أضلاعه : ١٠ سم ، ١٢ سم ، ١٨ سم

□ **الحل :**

أولاً يلزم إيجاد طول محيط المثلث ومن ثم إيجاد قيمة ح



شكل [٧ ـ ٧]

∴ ح = $\frac{١}{٢}$ [ا + ب + جـ]

= $\frac{١}{٢}$ [١٠ + ١٢ + ١٨] = $\frac{١}{٢}$ × ٤٠ = ٢٠ سم

∴ المساحة = $\sqrt{\text{ح (ح − ا) (ح − ب) (ح − جـ)}}$

= $\sqrt{\text{٢٠ (٢٠ − ١٠) (٢٠ − ١٢) (٢٠ − ١٨)}}$

= $\sqrt{\text{٢٠ × ١٠ × ٨ × ٢}}$

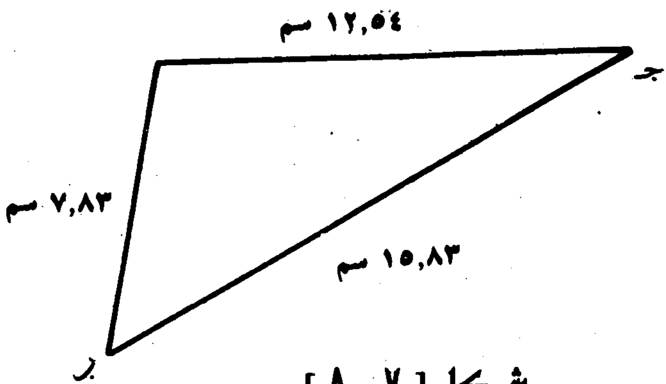
= $\sqrt{\text{٣٢٠٠}}$ = ٥٦,٥٧ سم^{٢} تقريباً .

□ مثال (٢) :

أوجد مساحة المثلث ا ب جـ الذى أطوال أضلاعه كالتالى : ب جـ = ١٥,٨٣ سم ، جـ ا = ١٢,٥٤ سم
، ا ب = ٧,٨٣

□ الحل :

انظر شكل (٧ ـ ٨)



شكل [٧ ـ ٨]

ح = $\frac{١}{٢}$ [ب جـ + جـ ا + ا ب]

= $\frac{١}{٢}$ [١٥,٨٣ + ١٢,٥٤ + ٧,٨٣] .

= $\frac{١}{٢}$ [٣٦,٢] = ١٨,١ سم

∴ المساحة = $\sqrt{\text{ح (ح − ا) (ح − ب) (ح − جـ)}}$

= $\sqrt{\text{١٨,١(١٨,١−١٥,٨٣)×(١٨,١−١٢,٥٤)×(١٨,١−٧,٨٣)}}$

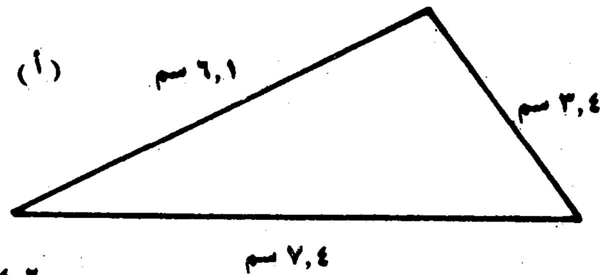
= $\sqrt{\text{١٨,١ × ٢,٢٧ × ٥,٥٦ × ١٠,٢٧}}$ = $\sqrt{\text{٢٣٤٦}}$ سم^{٢}

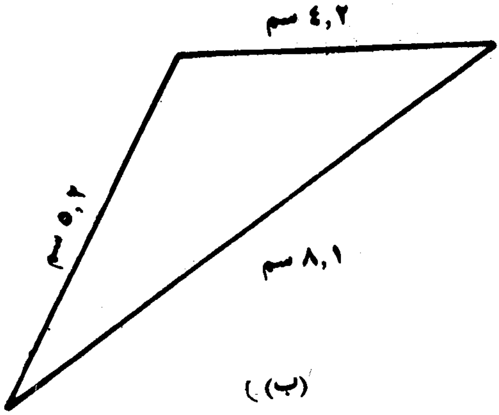
= ٨,٤٤ سم^{٢}

[٧ ـ ٥] تدريبات :

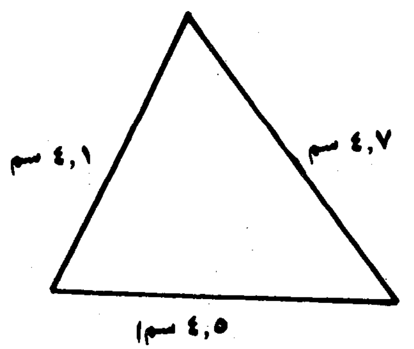
١) أوجد مساحة المثلثات المبينة فى شكل [٧ ـ ٩] .

(أ)

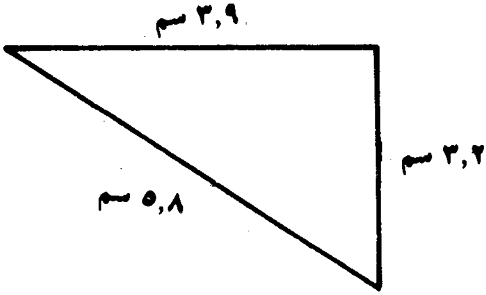




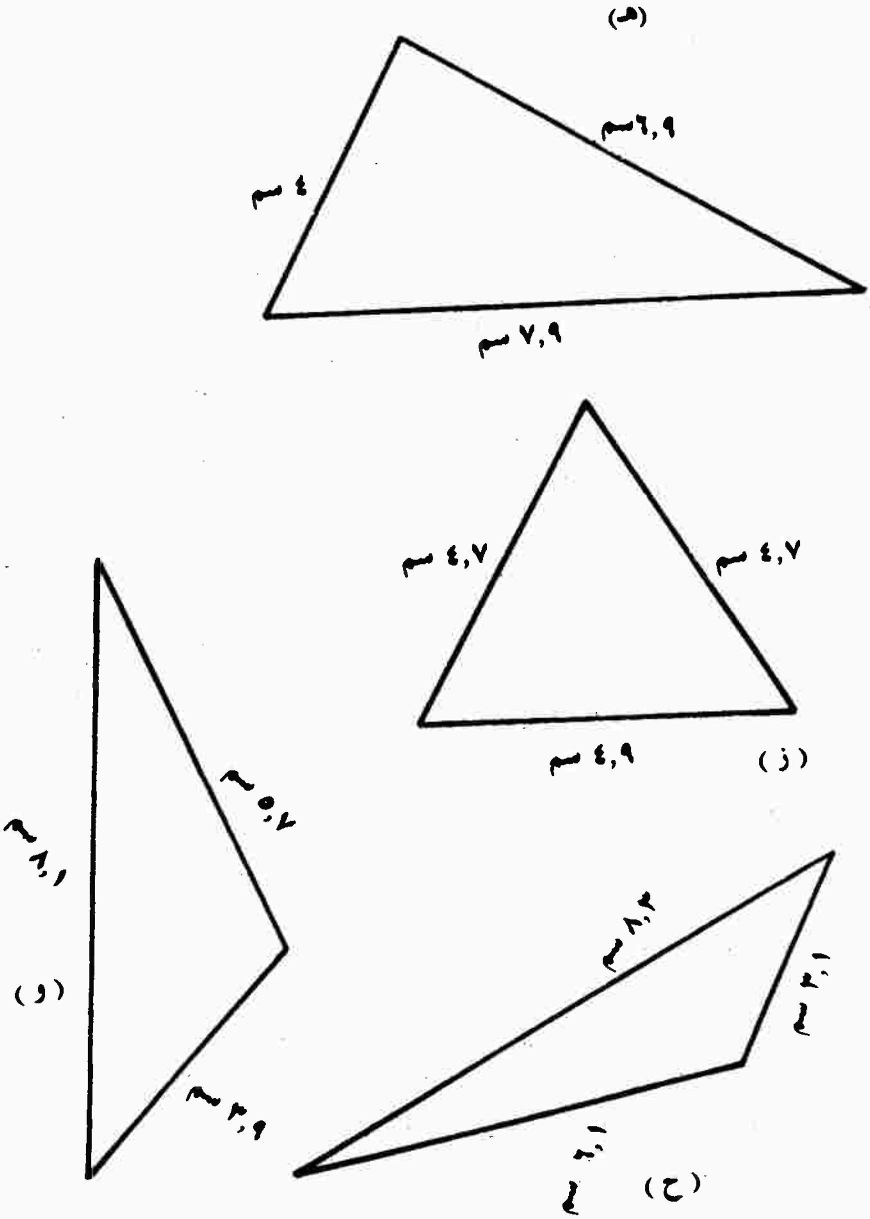
(ب)



(جـ)

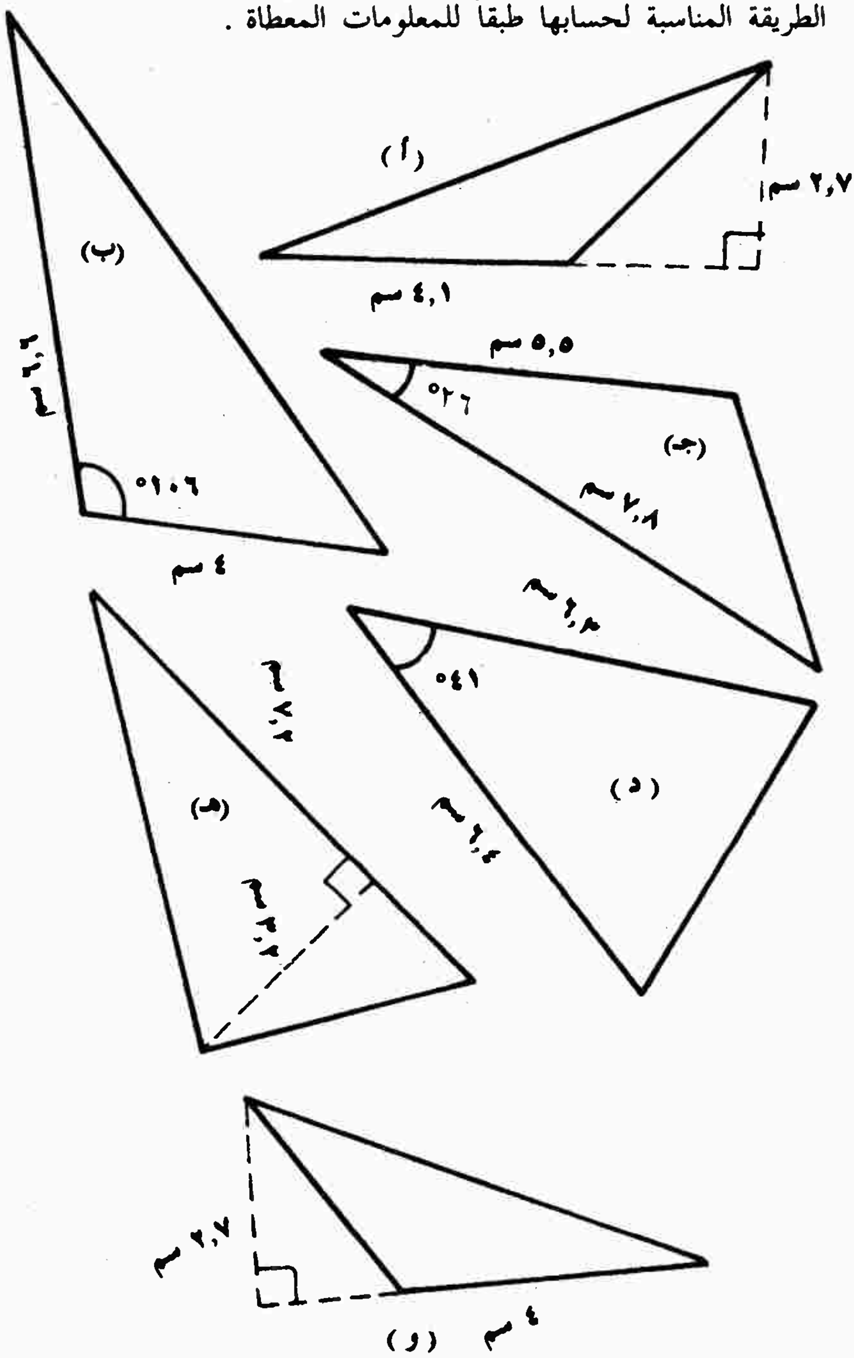


(د)



شكل [٧ ـ ٩] (أ ـ ح)

(٢) أوجد مساحة المثلثات المبينة فى شكل [٧ ـ ١٠] ، مستخدماً الطريقة المناسبة لحسابها طبقاً للمعلومات المعطاة .



شكل [٧ ـ ١٠] (أ ـ و)

الدرس الثامن :

مساحة متوازى الأضلاع
Area of a parallelogram

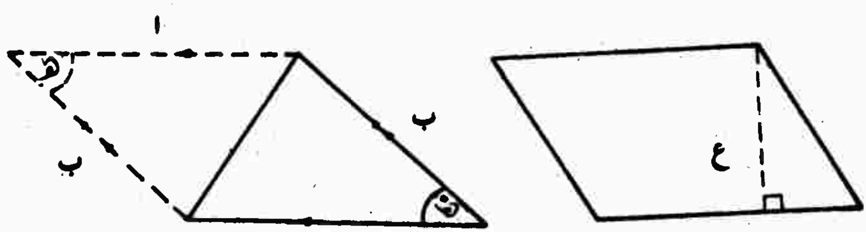
[٨ ـ ١] عــام :

علمنا من الجزء الأول أن مساحة متوازى الأضلاع
= طول القاعدة × الارتفاع العمودى عليها .

أى س = ا × ع

إلا أنه توجد طريقة أخرى لحساب مسلحتة مبنية على نفس فكرة حساب مساحة المثلث بمعلومية النسب المثلثية ،

وحيث أن مساحة المثلث يمكن حسابها كما سبق فى الدرس السابع بند (٧ ــ ٢) بمعلومية ضلعين والزاوية المحصورة بينهما وذلك باعتبار أن متوازى الأضلاع ، عبارة عن مثلثين متساويين فى المساحة تماماً ، انظر شكل (٨ ــ ١) .



المساحة = ا × ع

المساحة = ا ب جا هـ

(أ) شكل [٨ ـ ١] (أ ، ب) (ب)

وعلى ذلك فإن مساحة متوازى الأضلاع بطريقة النسب المثلثية :

trigono metric method

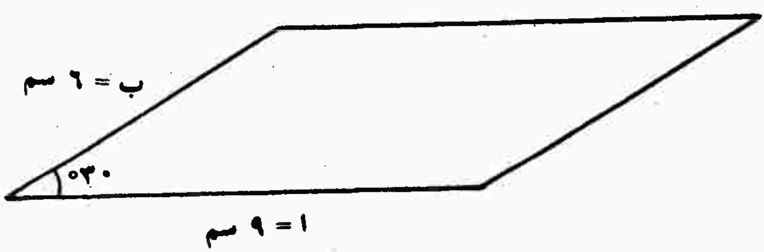
= ضعف [$\frac{١}{٢}$ ا × ب جا هـ]

= ا ب جا هـ .

☐ مثـال (١) :

أوجد مساحة متوازى الأضلاع الموضح مشكل (٨ — ٢]

☐ الحـل :



شـكل [٨ ـ ٢]

المساحة = ا ب حا هـ

= ٩ × ٦ جا ٣٠

= ٥٤ × $\frac{١}{٢}$ = ٢٧ سم^{٢}

ونعود مرة ثانية لنؤكد على أنه إذا عُلمت مساحة وطول أحد ضلعيه والزاوية المحصورة . فإنه يمكن إيجاد طول الضلع الآخر .

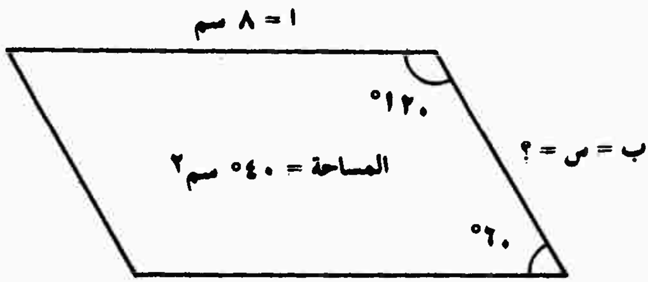
□ مثال (٢) :

فى شكل [٨ ــ ٣] ، متوازى أضلاع مساحته = ٤٠ سم٢ وطول أحد ضلعيه ٨ سم والزاوية بين ضلعيه هى ١٢٠° فأوجد طول الضلع المجهول ؛

□ الحــل :

المساحة : ا ب حا ١٢٠

∴ ٤٠ = ٨ × س × ٠,٨٦٦



شكل [٨ ـ ٣]

∴ $س = \frac{٤٠}{٨ \times ٠,٨٦٦} = ٥,٧٧$ سم . وهو طول الضلع المجهول

ويلاحظ أن حا ١٢٠ = حا ٦٠ = حا (١٨٠ − ١٢٠)

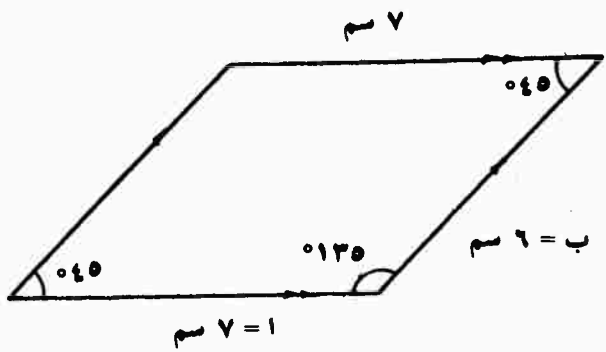
= حا (١٨٠ − هـ)

ومن ثم فالمساحة = ا ب حا ٦٠

□ **مثال (٣) :**

أوجد مساحة متوازى الأضلاع بالشكل [٨ ـ ٤]

□ **الحـــل :**



شـكل [٨ ـ ٤]

المساحة = ا × ب × حا ١٣٥

= ا × ب × حا ٤٥

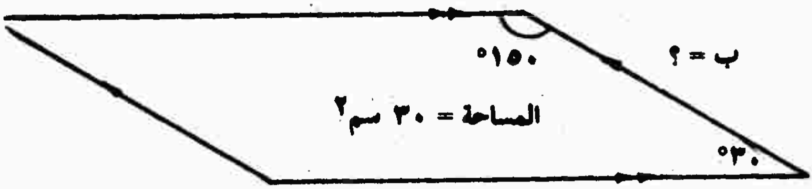
= ٧ × ٦ × ٠,٧٠٧

= ٢٩,٧ سم^{٢}.

□ **مثال (٤) :**

أوجد مساحة متوازى الأضلاع بالشكل [٨ − ٥]

□ **الحـــل :**



شكل [٨ ـ ٥]

الحل

المساحة = ا × ب × حا ٣٠

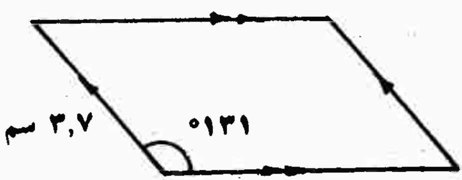
∴ ٣٠ = ١٠ × ب × $\frac{١}{٢}$ = ٥ ب

∴ ب = ٦ سم

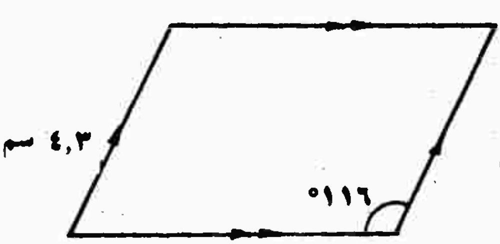
[٨ ـ ٢] تدريبات :

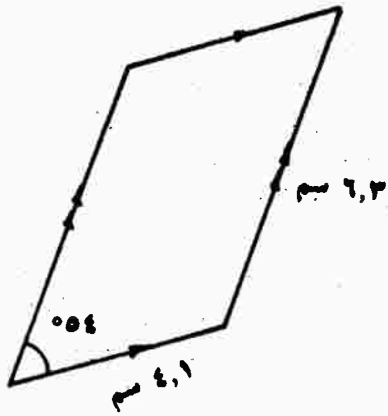
(١) أوجد مساحة متوازيات الأضلاع التالية مستخدماً طريقة النسب المثلثية ، انظر شكل [٨ ـ ٦] .

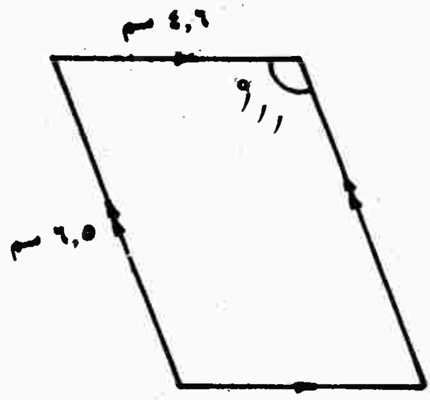
(أ)



(ب)



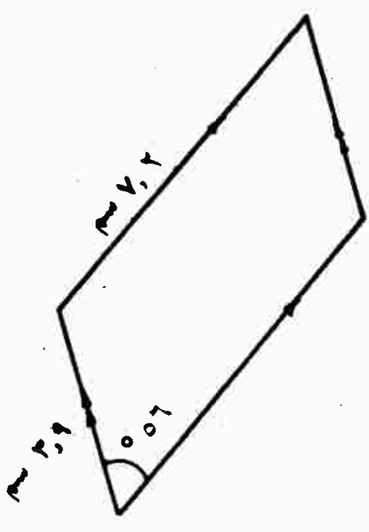


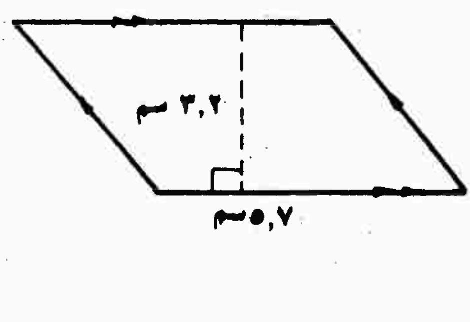


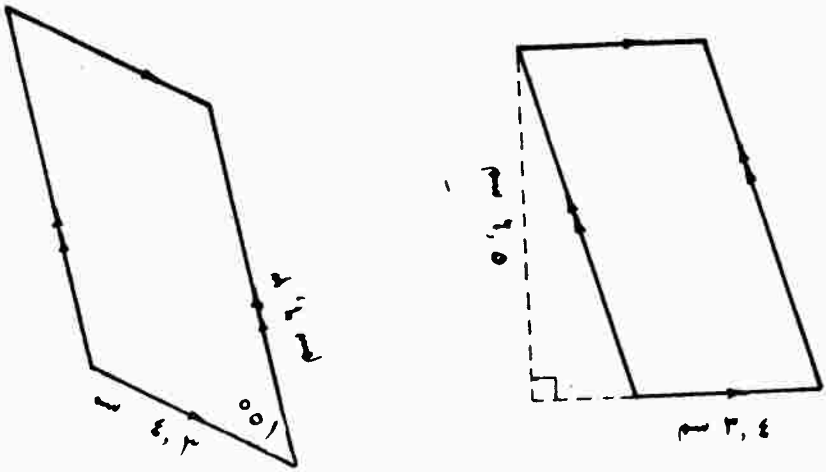
(جـ)

شكل [٨ ـ ٦] (أ ، بـ ، جـ ، د)

(٢) أوجد مساحة متوازيات الأضلاع التالية مستخدماً الطريقة المناسبة لذلك ، انظر شكل [٨ ـ ٧] .

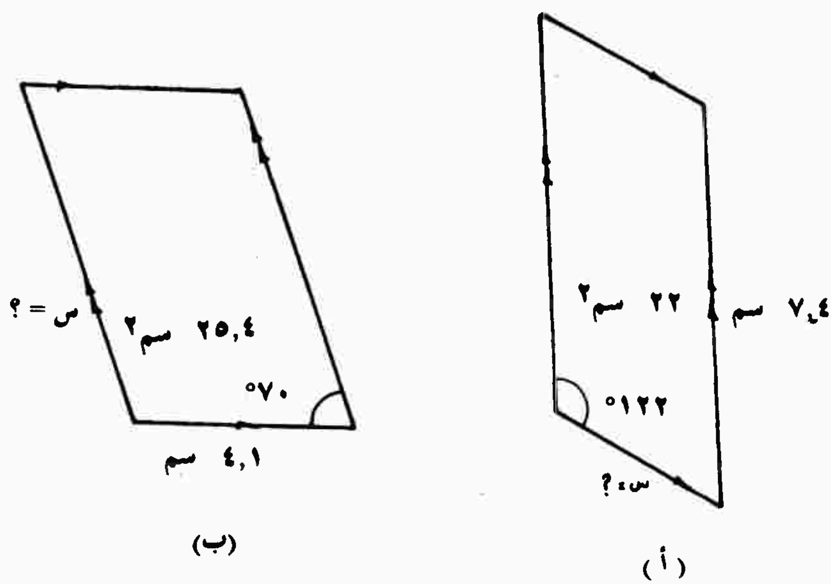


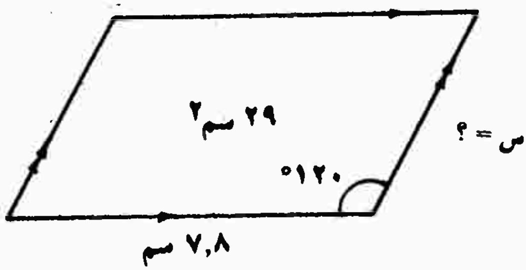




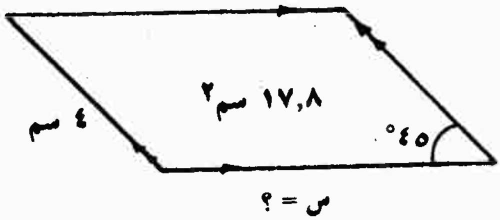
شكل [٨ ـ ٧] (أ ، ب ، جـ ، د)

(٣) أوجد طول الضلع المجهول فى متوازيات الأضلاع التالية ، والمرموز له بالرمز س ، انظر شكل [٨ ـ ٨]





(جـ)



(د)

شكل [٨ ـ ٨] (أ ، بـ ، جـ ، د)

(٤) أوجد مساحة المثلث ا ب حـ ، الذى فيه ا ب = ٨ سم ، ب جـ = ٩ سم ، زاوية ا ب جـ = ٥٧°

(٥) أوجد مساحة المثلث ا ب جـ ، الذى فيه ا ب = ٧,٢ سم ، ب جـ = ١٣,٤ سم ، زاوية ا ب جـ = ١٠٠° .

(٦) أوجد مساحة متوازى أضلاع طولا ضلعيه المتجاورين ، ٩ سم ، ١١ سم والزاوية المحصورة بينهما = ١٣٥° .

(٧) مساحة متوازى أضلاع ٤٣ سم٢ فيه طولا ضلعين متجاورين ٧ سم ، ٩ سم ، احسب الزاوية المحصورة بينهما الحادة والمنفرجة .

الدرس التاسع :

المساحة الدائرية

Circular area

[٩ ـ ١] مقدمة :

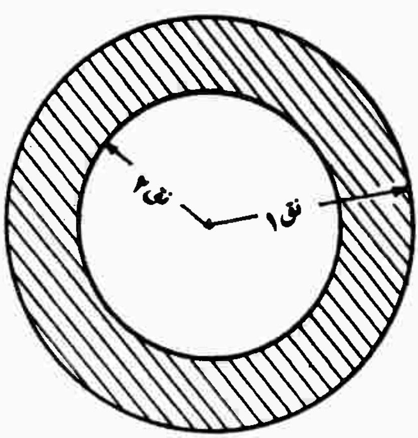
تعرضنا فى الجزء السابق (الكتاب الثانى) إلى كل من مساحة ومحيط الدائرة ونحن الآن بصدد التعمق أكثر لمعرفة كيفية حساب مساحة حلقة دائرية أو طول قوس ومساحات القطاعات الدائرية .

[٩ ـ ٢] مساحة الحلقة الدائرية

Areas of rings, Washers

فى شكل (٩ ـ ١) ، تُسمى المساحة المظللة بالحلقة ، ويمكن بسهولة حسابها وذلك بطرح مساحة الدائرة الداخلية من مساحة الدائرة الكلية (الكبرى ـ الخارجية) .

ويجب أن لا نغفل ، عن أن مساحة الدائرة = ط نق^{٢} حيث ط هى النسبة الثابتة ، نق هو نصف قطر الدائرة .



شكل [٩ ـ ١]

ولنفترض أن نصف قطر الدائرة الخارجية هو $\text{نق}_{١}$ ، وأن نصف قطر الدائرة الداخلية هو $\text{نق}_{٢}$ ، كما هو مبين بالشكل .

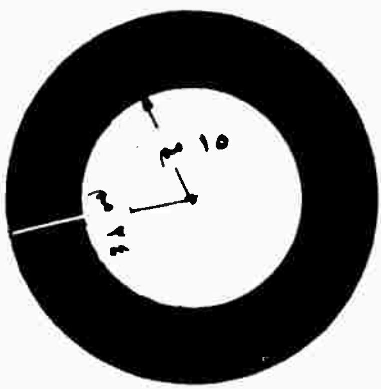
∴ مساحة الجزء المظلل ـ الحلقى = ط $\text{نق}_{١}^{٢}$ ـ ط $\text{نق}_{٢}^{٢}$ = ط ($\text{نق}_{١}^{٢}$ − $\text{نق}_{٢}^{٢}$)

□ مثـال :

أوجد مساحة وردة 'Washer' . قطرها الخارجى ٤٨ مم وقطرها الداخلى ٣٠ مم ، اعتبر ط = $\frac{٢٢}{٧}$ ،

□ الحـل :

انظر شكل [٩ ـ ٢]



شكل [٩ ـ ٢]

من معطيات المسألة :

∴ $\text{نق}_{١}$ = $\frac{٤٨}{١٠}$ ÷ ٢ = ٢,٤ سم

، $\text{نق}_{٢}$ = $\frac{٣٠}{١٠}$ ÷ ٢ = ١,٥ سم

وتكون مساحة الجزء المظلل = ط $نق_{١}^{٢}$ ـ ط $نق_{٢}^{٢}$

= ط ($نق^{٢}_{١}$ − $نق^{٢}_{٢}$)

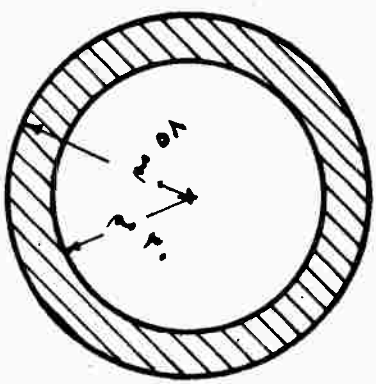
= $\frac{٢٢}{٧}$ [$(٢,٤)^{٢}$ ـ $(١,٥)^{٢}$]

= $\frac{٢٢}{٧}$ [٥,٧٦ − ٢,٢٥] = $\frac{٢٢}{٧}$ × ٣,٥١ = ١١٠٣ $مم^{٢}$

= ١١,٠٣ $سم^{٢}$ تقريباً .

[٩ ـ ٣] تدريبـــات :

(١) احسب المساحة المظللة فى الشكل (٩ ـ ٣) .



شكل [٩ ـ ٣]

(٢) وردة معدنية ، قطرها الخارجى ٥,٥ سم وقطرها الداخلى ٢,٣ سم ، أوجد مساحة سطح المعدن [اعتبر ط = $\frac{٢٢}{٧}$]

(٣) بحيرة اصطناعية يحيط بها طريق منتظم ، عرضة ٣ أمتار فإذا كانت مساحة سطح البحـيرة هى ١٥٤٠٠ متر مربع ، باعتبار ط = $\frac{٢٢}{٧}$ ، أوجد مساحة الطريق بالأمتار المربعة .

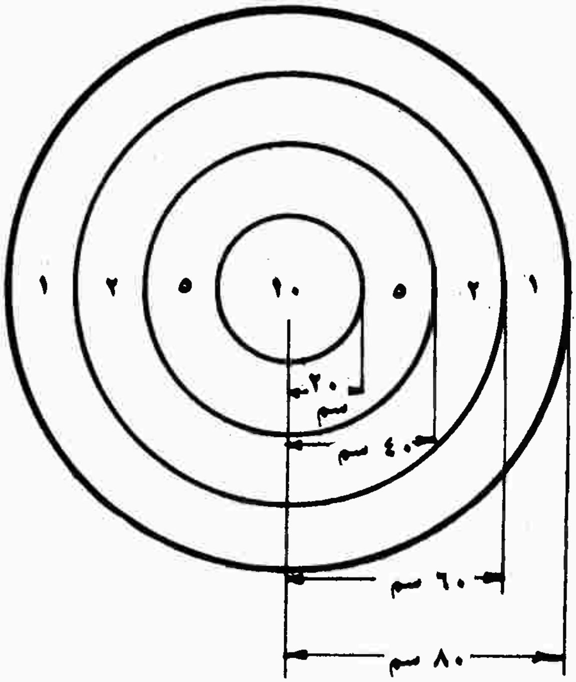
(٤) شكل [٩ ــ ٤] يوضح إحدى علامات النيشان للتدريب على الرماية ، وباعتبار ط = $\frac{٢٢}{٧}$ ، أوجد :

(أ) مساحة مركز علامة التنشين العلامة « ١٠ »

(ب) مساحة الحلقة « ٥ » .

(جـ) مساحة الحلقة « ٢ » .

(د) مساحة الحلقة « ١ »

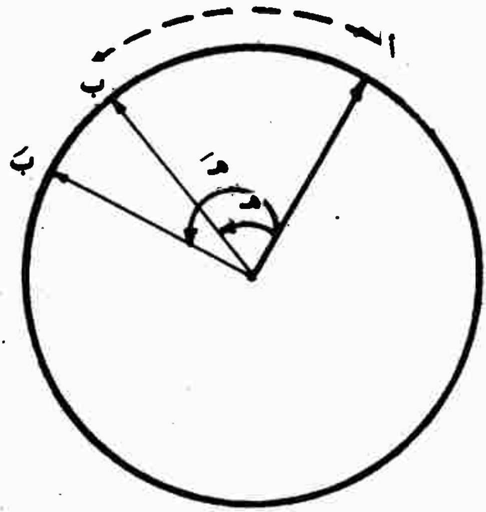


شكل [٩ ـ ٤]

(٥) نافورة مياه نصف قطرها ٧ أمتار يراد تبليط طريق حولها بعرض ٢,٥ متر ، احسب المساحة المراد تبليطها .

[٩ ــ ٤] حساب طول القوس الدائرى وزاوية القطاع الدائرى :

من شكل [٩ ــ ٥] يتضح أن هنالك علاقة بين طول جزء من محيط أى دائرة ، والزاوية المركزية المقابلة لهذا القوس .



شكل [٩ ـ ٥]

ومن الواضح أن نسبة طول القوس إلى طول المحيط كنسبة زاوية القوس إلى ٣٦٠° .

أى $\frac{\text{هـ}}{٣٦٠^\circ}$

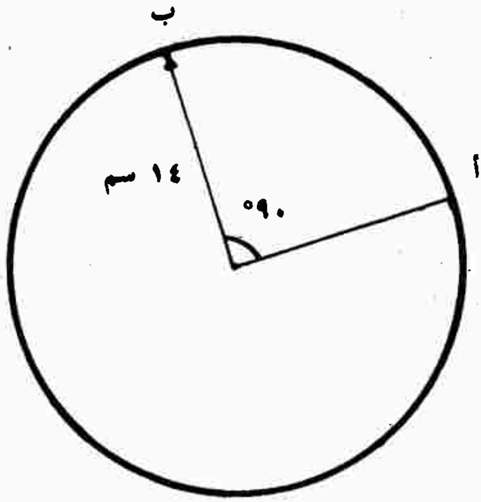
وعلى ذلك فطول القوس ا ب = $\frac{\text{هـ}}{٣٦٠}$ × ٢ ط نق

حيث (٢ ط نق = طول محيط الدائرة)

□ مثال (١) :

أوجد طول القوس ا ب بالدائرة الموضحة فى شكل (٩ ـ ٦) ، اعتبر ط = $\frac{٢٢}{٧}$

□ **الحــل :**



شكل [٩ ـ ٦]

محيط الدائرة = ٢ ط نق

$= ٢ \times \frac{٢٢}{٧} \times ١٤$

= ٨٨ سم

وطول القوس = $\frac{٩٠}{٣٦٠}$ × ٢ ط نق = $\frac{٩٠}{٣٦٠}$ × ٨٨ = ٢٢ سم

ويلاحظ أن الزاوية ٩٠ يقابلها $\frac{١}{٤}$ محيط الدائرة . وعلى ذلك فطول القوس يمكن حسابه بطريقة أخرى وهى :

ا ب = $\frac{١}{٤} \times ٢ \times \frac{٢٢}{٧} \times ١٤ = ٢٢$ سم

وبطريقة عكسية فإنه إذا علم نصف قطر الدائرة وطول القوس فإنه يمكن إيجاد الزاوية المقابلة للقوس .

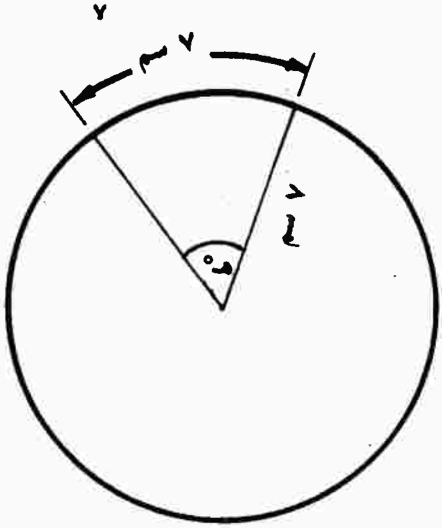
□ **مثال (٢) :**

أوجد طول الزاوية المركزية المقابلة لقوس من محيط دائرة نصف قطرها ٧ سم ، وطول هذا القوس ٧ سم كذلك ، اعتبر ط = $\frac{٢٢}{٧}$

□ **الحـــل :**

انظر شكل [٩ ـ ٧] ،

طول محيط الدائرة = ٢ ط نق = ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٧ = ٤٤ سم



شكل [٩ ـ ٧]

∴ $\frac{\text{هـ}}{٣٦٠} = \frac{٧}{٤٤}$

∴ $\hat{\text{هـ}}$ = ٧ × $\frac{٣٦}{٤٤}$ = ٥٧,٢٧٢٧°

[٩ ـ ٥] تدريبـــات :

أولاً : عبر عن كل زاوية مما يلى ، فى أبسط صورة ، ككسر من ٣٦٠°

(أ) ٢٤	(و) ١٢٠
(ب) ٣٠	(ز) ١٣٦
(جـ) ٣٦	(ح) ١٨٠
(د) ٥٧,٢٧	(ط) ٢٠٠
(هـ) ١٠٠	(ى) ٣١٠

ثانياً : أوجد طول القوس لكل من الدوائر التالية المدرجة فى جدول (٩ ــ ١) المبين به محيط الدائرة والزاوية المركزية المقابلة للقوس المطلوب حسابه .

محيط الدائرة	زاوية القطاع
٣٠ سم	١٢٠°
٤٥ متر	٧٥°
٣٠٠ سم	٥٣°
٤٤٠ سم	١٤٠°
٥٠٠ متر	٢٦٠°

جدول (٩ ـ ١)

ثالثاً : أوجد طول القوس لكل من الدوائر التالية المدرجة فى جدول (٩ - ٢) ، المبين به نصف قطر الدائرة والزاوية المركزية المقابلة للقوس المطلوب حسابه ؛

نصف القطر	زاوية القطاع
٩ سم	°٦٠
١٥ متر	°٤٥
٨ سم	°٩٠
٧,٥ سم	°١٢٠
٢٠ م	°١٨٠

جدول (٩ - ٢)

رابعاً : أوجد زاوية القطاع المقابلة للقوس طبقاً للجدول المرفق ، جدول (٩ - ٣) .

المحيط	طول القوس
٣٠ سم	٥ سم
٥٠ متر	١٠ متر
٧٠ متر	١٤ متر
٢٠ سم	٧,٥ سم
٧٠ سم	٢١ سم

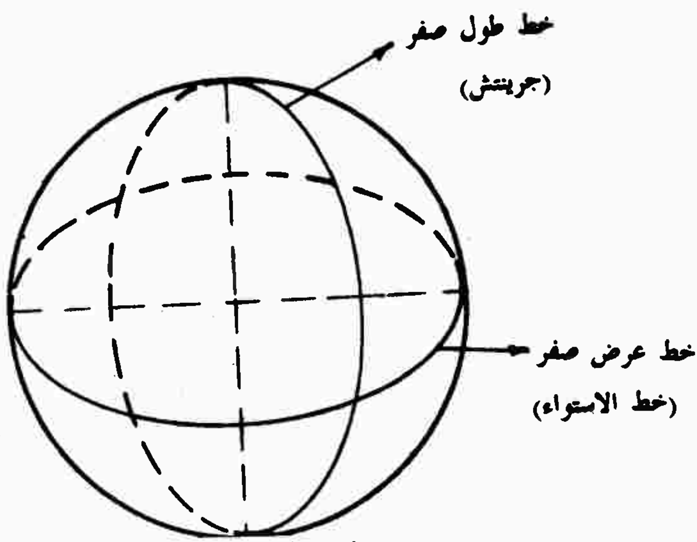
جدول (٩ - ٣)

[٩ ـ ٦] تطبيقات على إيجاد طول قوس دائرة ، حساب المسافات بين الأماكن المختلفة ، خطوط الطول والعرض :

يعتبر حساب المسافة بين مدينتين أو مكانين على نفس خط الطول على سطح الأرض (أو على نفس خط العرض) ، هو تطبيق عملي مباشر لحساب طول قوس من دائرة .

وخطوط الطول ، هي خطوط وهمية تقسم سطح الأرض طولياً (رأسياً) وتبدأ من القطب الشمالي وتنتهي بالقطب الجنوبي ، وهي مرسومة على خرائط سطح الكرة الأرضية وتعرف بخطوط الزوال وعددها ٣٦٠ خطاً ، منها ١٨٠ خطاً شرق جرينتش ، ١٨٠ خطاً غرب جرينتش وتبلغ المسافة الزمنية بين كل خط والثانى ٤ دقائق .

(٣٦٠ خط × ٤ دقائق = ١٤٤٠ دقيقة ÷ ٦٠ = ٢٤ ساعة)



شكل [٩ ـ ٨]

أما خطوط العرض فهى خطوط عرضية تخيلية (أفقية) وعددها ١٨٠ خطاً ، ٩٠ خطاً منها شمال خط الاستواء ، ٩٠ خطاً منها جنوب خط الاستواء .

وباستخدام خطوط الطول والعرض وتقاطع كل منهما يتحدد أى مكان على سطح الكرة الأرضية . وتكون المسافات المحسوبة بهذه الطريقة تقديرية وذلك لأننا نعتبر نصف قطر الأرض ثابت ، والحقيقة غير ذلك .

□ ملحوظة :

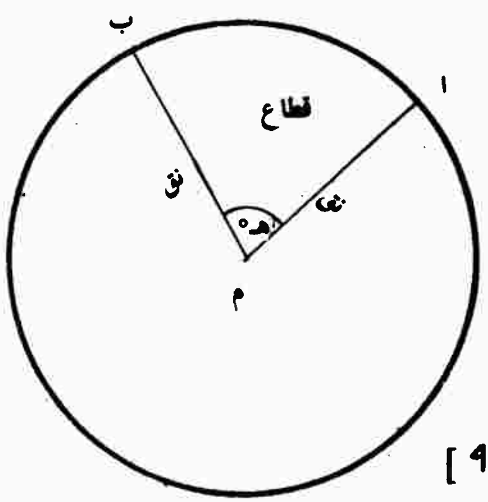
عند كتابة خطوط طول وعرض أى مكان فإنه عادة ، يكتب أولاً خط عرض المكان ثم خط طوله بعد ذلك . مثل مدينة « أ » (٤٥° شمالاً ، ٩٠° شرقاً) .

[٩ ـ ٧] مساحة القطاع الدائرى **Sector area**

يُوضح شكل (٩ ــ ٩) ، قطاع دائرى وكما اتبعنا عند إيجاد طول قوس بالنسبة للمحيط ، فإنه يتم نفس الشيء عند الرغبة فى إيجاد مساحة قطاع مقارنة بالمساحة الكلية إلا أنه سيتم استخدام المساحة بدلاً من المحيط وبذلك فإن مساحة القطاع

$$= \frac{\text{زاوية القطاع المراد حساب مساحته « هـ° »}}{٣٦٠°} \times \text{ط نق}^٢$$

حيث ط نق٢ هى المساحة الكلية للدائرة .



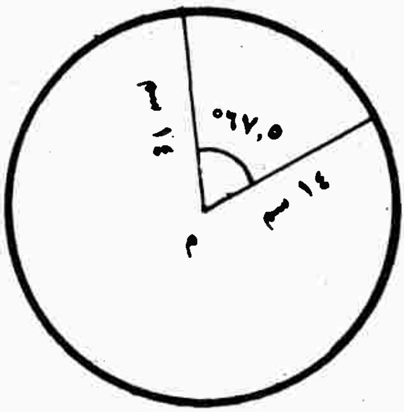
شكل [٩ ـ ٩]

□ مثـــال :

أوجد مساحة القطاع الدائرى لدائرة نصف قطرها ١٤ سم ، والذى يقابل زاوية مركزية مقدارها ٦٧,٥° عند مركز الدائرة ، اعتبر ط = $\frac{٢٢}{٧}$

□ الحـــل :

نرسم المسألة كما هو موضح بشكل [٩ ـ ١٠] مبيناً عليه كل مُعطيات المسألة .



شكل [٩ ـ ١٠]

مساحة الدائرة = ط نق^{٢} = $\frac{٢٢}{٧}$ × ١٤ × ١٤ = ٦١٦ سم^{٢}

وحيث أن الزاوية المقابلة للقطاع هى ٦٧,٥°

∴ مساحة القطاع = $\frac{٦٧,٥}{٣٦٠}$ × ٦١٦

= ٠,١٨٧٥ × ٦١٦ = ١١٥,٥ سم^{٢}

[٩ ـ ٨] تدريبات : على مساحة القطاع الدائرى وطول القوس بالدائرة :

أولاً : أوجد مساحة القطاعات الدائرية ، للدوائر المبينة فى جدول (٩ ـ ٤) .

مساحة الدائرة	زاوية القطاع
(أ) ١٢٠ سم²	٦٠°
(ب) ٣٢٥ سم²	٣٥°
(جـ) ١٨٠ سم²	١٧٠°
(د) ٢١٧ سم²	٨٥°
(هـ) ٨٧ سم²	٥٣°

جدول (٩ ـ ٤)

ثانياً : أوجد الزاوية المركزية للقطاعات المبينة بالجدول (٩ ـ ٥) ، فى الدوائر المناظرة لكل منها .

مساحة القطاع	مساحة الدائرة
(أ) ٧٠ م²	٥٠٠ م²
(ب) ٩٠ سم²	٢٨٠ سم²
(جـ) ١٥ سم²	٧٠ سم²
(د) ٢٧ م²	١٨٩ م²
(هـ) ١٧٨ سم²	٦٣٠ سم²

جدول (٩ ـ ٥)

ثالثاً : أوجد مساحة القطاعات الدائرية بالدوائر المبينة بجدول (٩ ـ ٦) مبين الزاوية المركزية المقابلة لكل قطاع منها .

اعتبر ط = $\frac{٢٢}{٧}$

نصف قطر الدائرة	زاوية القطاع
(أ) ٨٤ سم	٣٦°
(ب) ٤٢ مم	٥٤°
(جـ) ٥٦ سم	١٨٠°
(د) ٧٠ متر	٢١٠°
(هـ) ١٠٥ متر	٧٢°

جدول (٩ ـ ٦)

رابعاً : أوجد مساحة القطاع للدوائر التالية بجدول (٩ ـ ٧) والمبين به أنصاف أقطار الدوائر والزاوية المركزية المقابلة لكل قطاع .

نصف قطر الدائرة	زاوية القطاع
(أ) ٢ سم	١٣٥°
(ب) ٦٠ سم	٢٧٠°
(جـ) ٣٠ متر	٤٠°
(د) ٧٠ مم	٦٠°
(هـ) ٣٦ مم	٤٥°

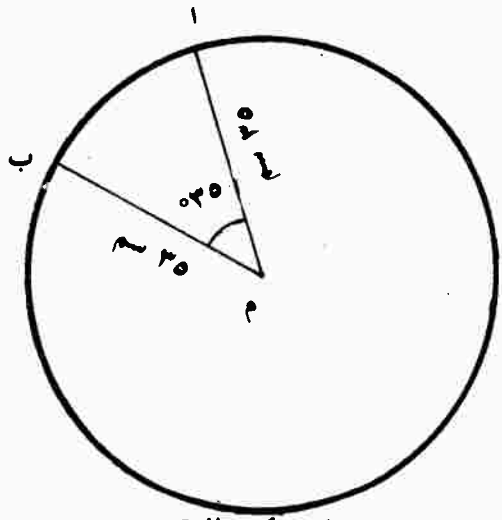
جدول (٩ ـ ٧)

خامساً : فى شكل (٩ – ١١) ، أوجد الآتى :

(أ) طول القوس ا ب

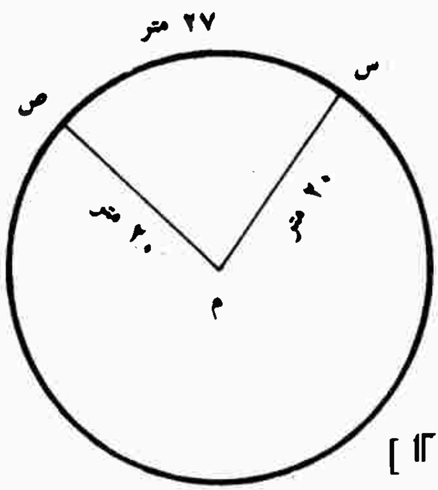
(ب) مساحة القطاع ا م ب

، اعتبر ط = $\frac{٢٢}{٧}$



شكل [٩ – ١١]

سادساً : فى شكل (٩ – ١٢) ، احسب الزاوية المركزية المقابلة للقوس س ص الذى طوله ٢٧ متراً ، نصف قطر الدائرة ٢٠ متر .

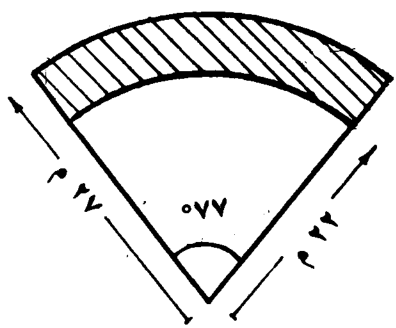


شكل [٩ – ١٢]

سابعاً : احسب المساحة التى يغطيها عقرب الدقائق فى إحدى ساعات الحائط ، التى يبلغ قطرها ٣٠ سم ، طول عقرب الدقائق ١٣ سم وذلك عند تحركه لمدة ٢٣ دقيقة اعتبر ط ٣,١٤٢ .

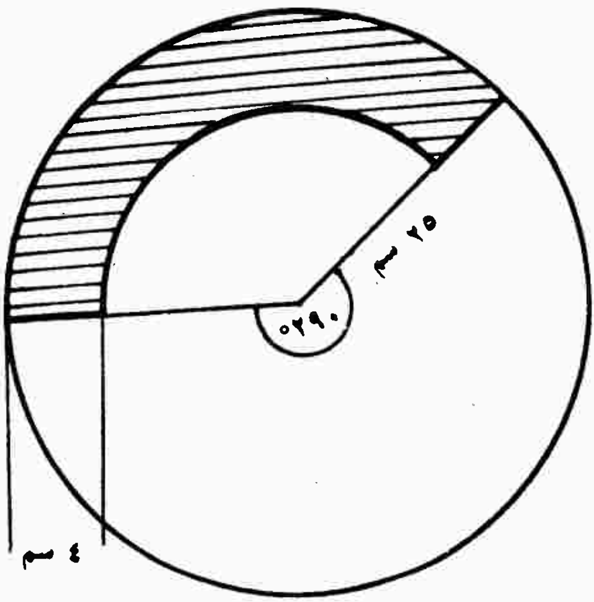
ثامناً : احسب الزاوية المركزية المناظرة لقطاع طول قوسه ٢٨ سم فى دائرة نصف قطرها ٢١ سم اعتبر ط = $\frac{٢٢}{٧}$

تاسعاً : احسب مساحة الجزء المظلل المبين فى شكل (٩ ــ ١٣) ، اعتبر ط = ٣,١٤٢ .



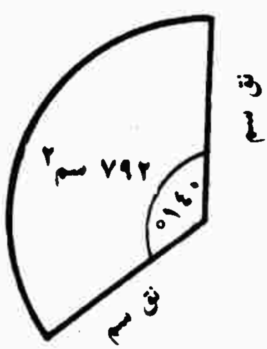
شكل [٩ ـ ١٣]

عاشراً : احسب مساحة الجزء المظلل فى شكل (٩ ـ ١٤) ، اعتبر ط = ٣,١٤٢ .



شكل [٩ ـ ١٤]

حادى عشر : احسب نصف قطر القطاع الدائرى المبين فى شكل (٩ ـ ١٥) ، اعتبر ط = $\frac{٢٢}{٧}$



شكل [٩ ـ ١٥]

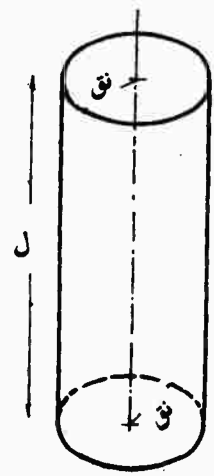
الدرس العاشر :

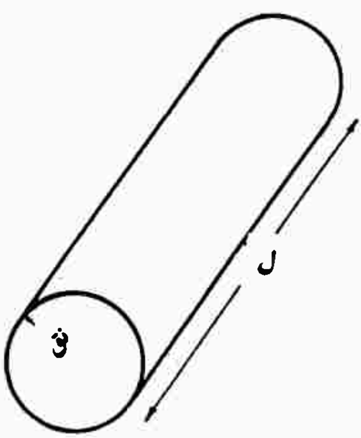
الاسطـــوانــة Cylinder

[١٠ ـ ١] حجـم الاسطوانــة :

علمنا فى الجزء الثانى « الكتاب الثانى » من هذه السلسلة أن حجم المجسمات ذات المقطع المنتظم ، عبارة عن مساحة المقطع مضروباً فى الطول .

والاسطوانة لها مقطع منتظم عبارة عن دائرة ، انظر شكل (١٠ ـ ١) .





شكل [١٠ ـ ١] (أ ، بـ)

∴ حجم الأسطوانة = مساحة المقطع × الطوال .

= ط نق^{٢} × ل

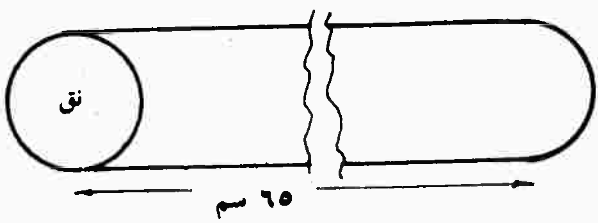
= ط نق^{٢} × ع

□ **مثال :**

قضيب معدنى ذو شكل اسطوانى منتظم المقطع قطره ٩,٢ سم ، طوله ٦٥ سم ، أوجد حجم هذا القضيب مُعتبراً ط = ٣,١٤٢

□ **الحـل :**

انظر شكل (١٠ ـ ٢) .



شكل [١٠ ـ ٢]

حجم القضيب = مساحة المقطع × الطول

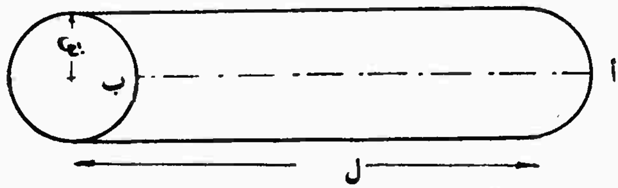
= ط نق^{٢} × ل

= ٣,١٤٢ × ٩,٢ × ٩,٢ × ٦٥ = ١٧٢٨٦ سم^{٣} تقريباً

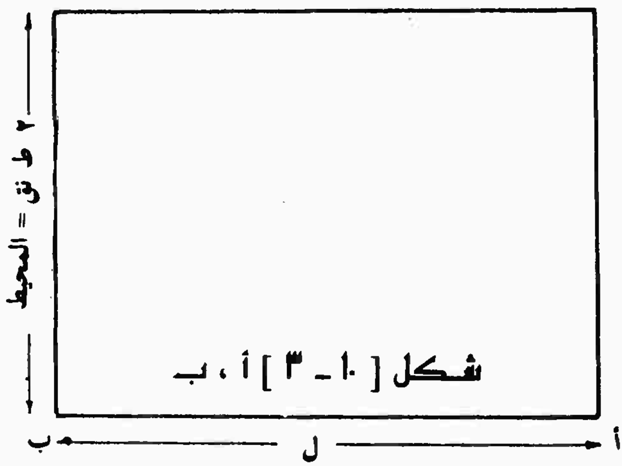
[١٠ ـ ٢] المساحة السطحية للأسطوانة :

لنتصور أن لدينا اسطوانة مفرغة من الورق الكرتون نصف قطرها نق ، وقمنا بقطعها فى اتجاه طولها ، إتجاه الخط المتقطع بالشكل (١٠ ـ ٣) ، ثم قمنا بإفرادها ، بحيث يصبح شكلها مستطيلاً [أو مربعاً] .

هنا ، تكون المساحة الجانبية للاسطوانة ، معادلة . لمساحة المستطيل .



(أ)



(ب)

شكل [١٠ ـ ٣] أ ، ب

وحيث أن مساحة المستطيل = الطول × العرض .

= ل × ٢ ط نق

∴ المساحة الجانبية للاسطوانة = ٢ ط نق ل وحدة مربعة .

وفى حالة الاسطوانة المفرغة ، إذا كان لها قاعدة واحدة ، فإن المساحة السطحية الكلية = المساحة الجانبية + مساحة قاعدة واحدة ... (١)

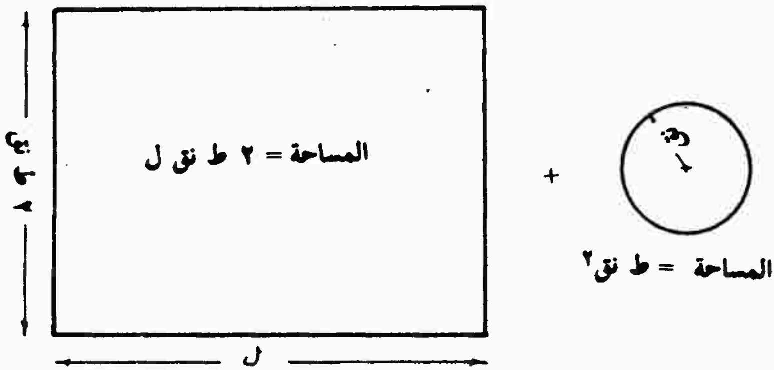
أما إذا كانت الأسطوانة المفرغة لها قاعدة وقمة (قاعدتين) أو فى حالة الأسطوانة المصمتة ، فإن المساحة السطحية الكلية فى هذه الحالة :

المساحة السطحية الكلية = المساحة الجانبية + ضعف مساحة القاعدة ...(٢)

انظر شكل (١٠ ـ ٤) .

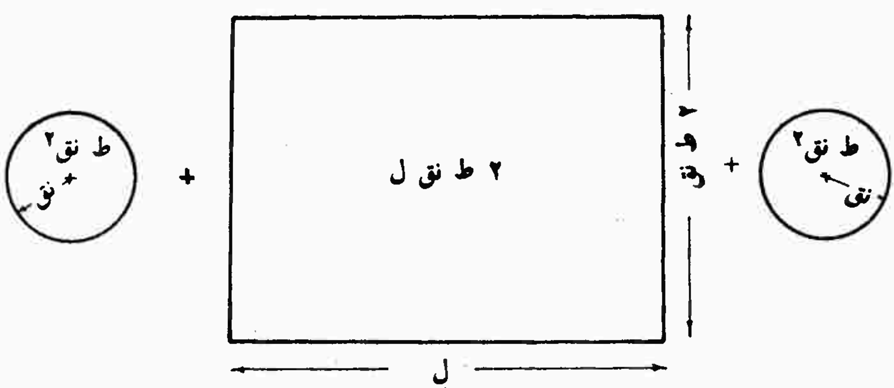
ففى الحالة (١) : المساحة الكلية = ٢ ط نق ل + ط $نق^٢$

وفى الحالة (٢) : المساحة الكلية = ٢ ط نق ل + ٢ ط $نق^٢$



حالة (١)   اسطوانة مفرغة وقاعدة واحدة

المساحة = ٢ ط نق ل + ط نق^{٢}



حالة (٢)   أسطوانة مفرغة وقاعدتين

المساحة = ٢ ط نق ل + ٢ ط نق^{٢}

شكل [١٠ ـ ٤]

□ **مثـال :**

أوجد حجم علبة صفيح اسطوانة الشكل وبدون غطاء ، ارتفاعها ٣٠ سم ونصف قطر قاعدتها ٧ سم ، ومن ثم احسب المساحة السطحية الكلية للعلبة ، اعتبر ط = $\frac{٢٢}{٧}$.

□ **الحـل :**

كما بالشكل (١٠ ــ ٥) .

الحجم = مساحة القاعدة × الارتفاع

ط نق^{٢} × ع = $\frac{٢٢}{٧}$ × ٧ × ٧ × ٣٠ = ٤٦٢٠ سم^{٣}

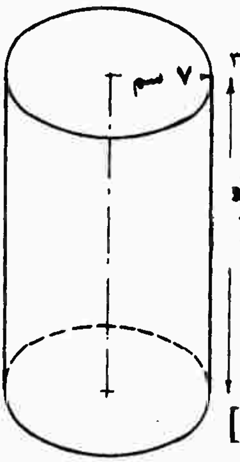
= ٤,٦٢ لتر

المساحة السطحية الكلية = ٢ ط نق × ل + ط نق^{٢}

= ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٧ × ٣٠ + $\frac{٢٢}{٧}$ × ٧ × ٧

= ٢٢ [٦٠ + ٧] = ٢٢ × ٦٧

= ١٤٧٤ سم^{٢} .



شكل [١٠ ـ ٥]

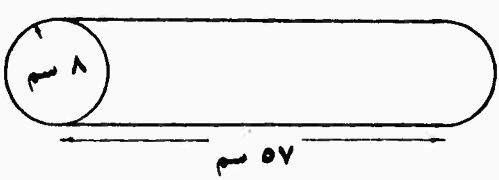
[١٠ ـ ٣] تدريبات على الحجوم والمساحات السطحية للاسطوانات :

(١) في الاسطوانة المبينة في شكل (١٠ ــ ٦) ، أوجد :

(أ) المساحة الجانبية للسطح المنحنى « بدون القاعدتين » .

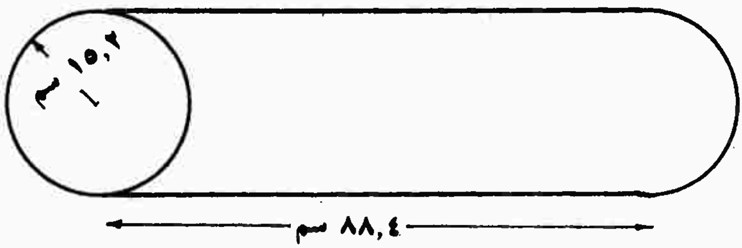
(ب) الحجــم .

اعتبر ط = $\frac{٢٢}{٧}$



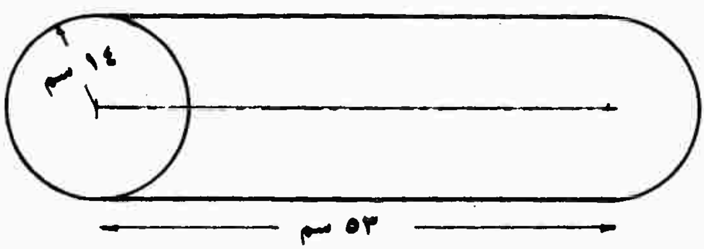
شكل [١٠ ـ ٦]

(٢) فى الأسطوانة المبنية فى شكل (١٠ ــ ٧) ، أوجد الحجم والمساحة السطحية الكلية ، والأسطوانة مغلقة من أحد طرفيها فقط اعتبر ط = ٣,١٤٢



شكل [١٠ ـ ٧]

(٣) أوجد الحجم والمساحة السطحية الكلية للأسطوانة المبينة فى شكل (١٠ ــ ٨) ، وهى مغلقة من طرفيها ، اعتبر ط = ٣,١٤٢

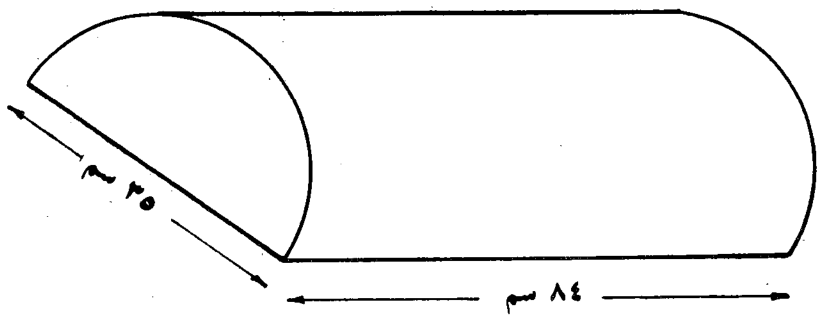


شكل [١٠ ـ ٨]

(٤) اسطوانة معدنية مُفرغة مُغلقة من أحد طرفيها ، رتفاعها ٣٥ سم وقطرها ١٥ سم ، أوجد حجمها ومساحتها السطحية ، (ط = ٣,١٤٢) .

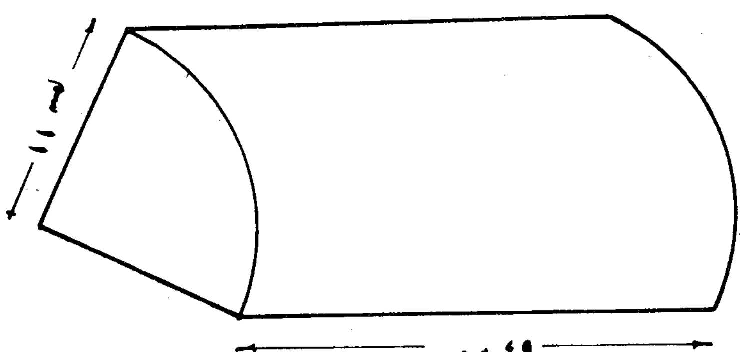
(٥) اسطوانة حجمها ٢٩٣٠ سم^{٣} ونصف قطرها ٨ سم ، أوجد ارتفاعها .

(٦) أوجد حجم المنشور النصف دائرى ، المبين فى شكل (١٠ – ٩) ومن ثم أوجد مساحته السطحية « بما فيها القاعدة » .



شكل [١٠ـ٩]

(٧) أوجد حجم المنشور الربع دائرى ، المبين فى شكل (١٠ – ١٠) وأوجد مساحته السطحية الكلية .



شكل [١٠ـ١٠]

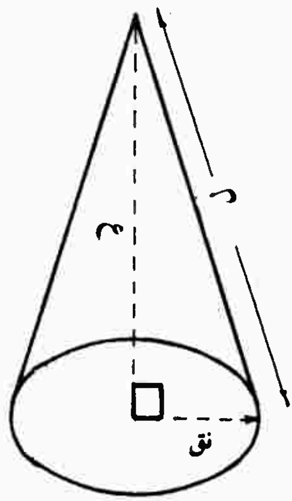
الدرس الحادى عشر :

المخروط والهرم

The cone and the Pyramid

[١١ ـ ١] حجـم المخـروط :

يوضح شكل (١١ ـ ١) مخروط دائرى قائم ، مبيناً عليه أبعاده الرئيسية .



شكل [١١ ـ ١]

وحجم المخروط = ثلث مساحة القاعدة الدائرية × الإرتفاع العمودى للمخروط

$$ح_{م} = \frac{١}{٣} \text{ ط نق}^{٢} \text{ ع}$$

[١١ ـ ٢] المساحة السطحية للمخروط :

المساحة السطحية للمخروط الدائرى القائم = ط نق ل

والإرتفاع المائل للمخروط أو طول حرفه الجانبى أو طول راسمة **slant**

height ، ل ، يمكن حسابه ، إن لم يكن معروفاً وذلك بمعرفة نصف قطر لقاعدة والإرتفاع العمودى وتطبيق نظرية فيثاغورث ويكون الراسم هو وتر مثلث قائم الزاوية وأحد ضلعى القائمة هو نصف القطر والضلع الآخر للقائمة هو الإرتفاع العمودى وعندما يكون المخروط مصمتاً فإن المساحة الكلية للمخروط ، عبارة عن مساحته الجانبية مضافاً لها مساحة قاعدة المخروط .

∴ المساحة السطحية الكلية للمخروط :

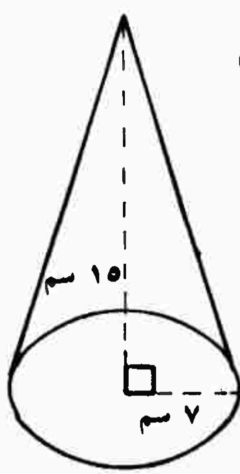
= ط نق^{٢} + ط نق ل = ط نق (نق + ل)

□ مثـال :

أوجد الحجم والمساحة السطحية الكلية لمخروط قائم مصمت نصف قطر قاعدته ٧ سم وارتفاعه ١٥ سم ، اعتبر ط = $\frac{٢٢}{٧}$

□ الحـل :

انظر شكل (١١ ـ ٢)



شكل [١١ ـ ٢]

حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ ط نق^{٢} ع

= $\frac{١}{٣}$ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٧ × ٧ × ١٥

= ٢٢ × ٧ × ٥ = ٧٧٠ سم^{٣}

المساحة السطحية للمخروط = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة .

ط نق ل + ط نق^{٢}

$$= \frac{٢٢}{٧} \times ٧ \times ل + \frac{٢٢}{٧} \times ٧ \times ٧$$

$= (٢٢$ ل $+ ١٥٤)$ سم^{٢}

ولإيجاد قيمة ل ، نطبق قاعدة فيثاغورث

ل$^{٢} = ٧^{٢} + ١٥^{٢} = ٤٩ + ٢٢٥ = ٢٧٤$

$\therefore$ ل $= \sqrt{٢٧٤} = ١٦,٥٥$ سم تقريباً

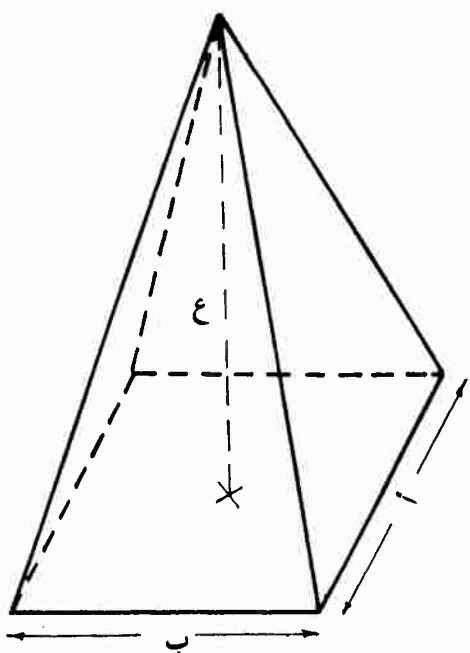
$\therefore$ المساحة السطحية الكلية للمخروط $= (٢٢ \times ١٦,٥٥ + ١٥٤)$

$= [٣٦٤,١ + ١٥٤]$

$= ٥١٨$ سم^{٢} تقريباً .

[١١ ـ ٣] حجـم الهـرم :

وحجم الهرم يساوى كذلك ثلث مساحة القاعدة × الإرتفاع العمودى .



شكل [١١ ـ ٣]

انظر شكل [١١ ـ ٣] ، وهو يوضح هرم رباعى [قاعدته رباعية الأضلاع] ، قائم ، قاعدته مستطيلة الشكل ،

حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ × ا × ب × ع

$\frac{١}{٣}$ ا ب ع وحدة مكعبة .

والمساحة السطحية الكلية للهرم هى هى عبارة عن مجموع مساحات وجهة المثلثة بالإضافة لمساحة سطح القاعدة .

[١١ ـ ٤] تدريبــات :

(١) أوجد حجم مخروط دائرى قائم ، إرتفاعه ٩ سم ونصف قطر قاعدته ٤ سم ، ط = $\frac{٢٢}{٧}$

(٢) أوجد حجم مخروط دائرى ، إرتفاعه العمودى ١٣٠ مم ونصف قطر قاعدته ٢٤ مم ، ط = ٣,١٤٢

(٣) مخروط دائرى قائم نصف قطره ٥ سم وإرتفاعه ١٤ سم أوجد الآتى :

(أ) طول الراسم ــ أو الإرتفاع الجانبى .

(ب) المساحة السطحية المنحنية للمخروط .

(جـ) المساحة السطحية الكلية للمخروط .

(د) حجم المخروط .

(٤) هرم رباعى قائم قاعدته مربعة الشكل طول ضلعه ١٣ سم وإرتفاعه العمودى ٣٥ سم ، أوجد حجمه ومساحته السطحية الكلية (بما فيها القاعدة) .

(٥) هرم ثلاثى ، قاعدته على شكل مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ١٠ م (عشرة أمتار) ، وارتفاعه ٣٠ م أوجد :

(أ) حجمه

(ب) مساحته السطحية .

(جـ) مساحته السطحية الكلية .

(٦) هرم رباعى قائم قاعدته على شكل مستطيل بعداه ٨٥ سم × ٦٥ سم فإذا كان إرتفاعه العمودى هو ١٠٠ سم ، فاحسب :

(أ) حجمه .

(ب) مساحته السطحية .

(جـ) مساحته السطحية الكلية .

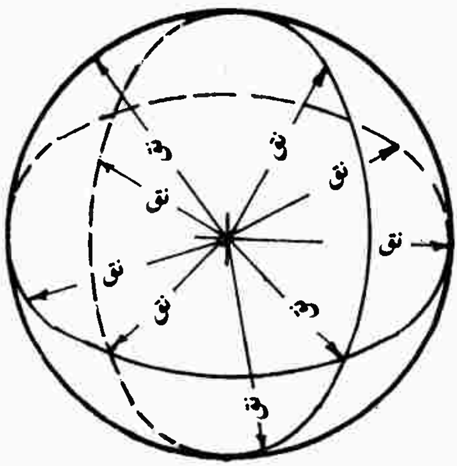
الدرس الثاني عشر :

الكــرة The sphere

[١٢ ـ ١] حجم الكــرة :

حجم الكرة الموضحة في شكل (١٢ ـــ ١) هو :

الحجم = $\frac{٤}{٣}$ ط نق^{٣}



شكل [١٢ ـ ١]

[١٢ ـ ٢] مساحة سطح الكرة :

مساحة سطح الكرة = ٤ ط نق^{٢}

□ **مثال :**

أوجد حجم ومساحة سطح كرة نصف قطرها ١٤ سم ، اعتبر ط = $\frac{٢٢}{٧}$

□ **الحــل :**

الحجم = $\frac{٤}{٣}$ ط نق^{٣}

= $\frac{٤}{٣} \times \frac{٢٢}{٧} \times ١٤ \times ١٤ \times ١٤ = ٣٢٨٥,٣$ سم^{٣}

مساحة السطح = ٤ ط نق^{٢}

= $٤ \times \frac{٢٢}{٧} \times ١٤ \times ١٤ = ٢٤٦٤$ سم^{٢}

[١٢ ـ ٣] تدريبــات :

(١) أوجد حجم الكرات التالية ومساحاتها السطحية :

(أ) كرة ماء قطرها ٢١ سم

(ب) منطاد كروى نصف قطره ٢٥ متراً .

(جـ) بالونة نصف قطرها ٣٥ سم .

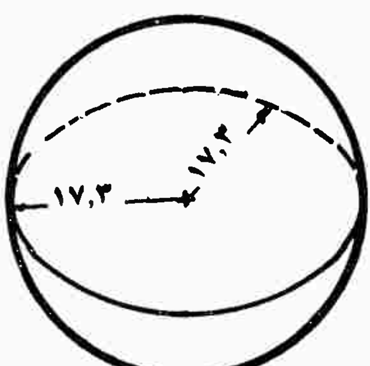
(د) كرة نصف قطرها ٩ سم

(هـ) كرة نصف قطرها ٢٨ سم

(و) كرة اسكواش قطرها ٤ سم .

عتبر ط = $\frac{٢٢}{٧}$

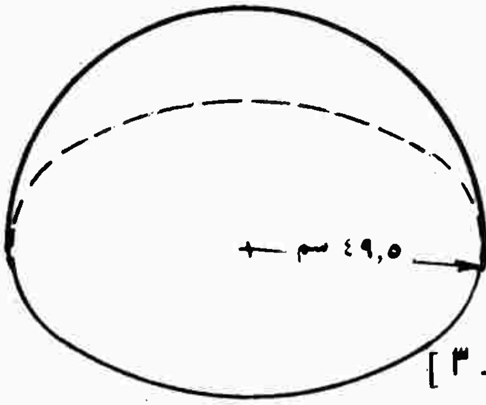
(٢) أوجد حجم ومساحة سطح الكرة الموضحة بالشكل (١٢ — ٢) معتبراً ط = ٣,١٤٢



شكل [١٢ ـ ٢]

(٣) أوجد الحجم والمساحة السطحية لنصف الكرة الموضح بالشكل (١٢ ـ ٣) اعتبر ط = ٣,١٤٢

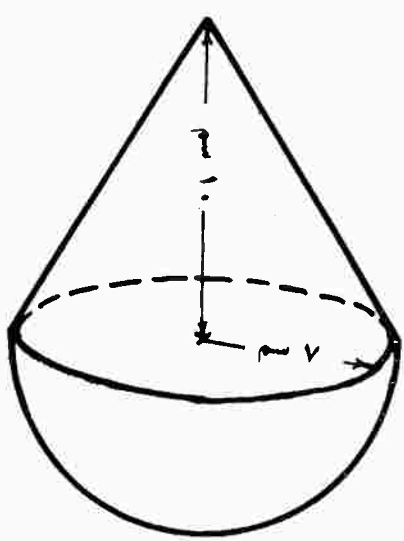
« قاعدة نصف الكرة من جملة المساحة الكلية »



شكل [١٢ ـ ٣]

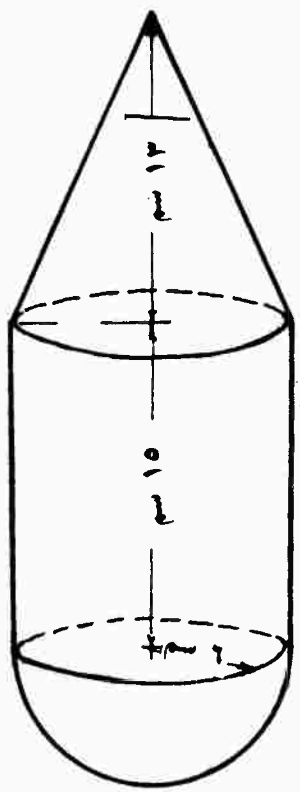
(٤) وعاء ماء نصف كروى (سلطانية) ، نصف قطره ٨ سم أوجد حجم الماء اللازم لملئه تماماً ، اعتبر ط = ٣,١٤٢ .

(٥) احسب المساحة السطحية الكلية للشكل الموضح ، شكل (١٢ ـ ٤) وهو عبارة عن نصف كرة ومخروط ، ارتفاع المخروط ١٠ سم ونصف قطر الكرة = ٧ سم ، ط = ٣,١٤٢



شكل [١٢ ـ ٤]

(٦) احسب الحجم والمساحة السطحية للجسم الموضح بشكل (١٢ ـــ ٥) ، نصف قطـــر الاسطوانـــة = ٦ سم ، ارتفـــاع المخروط = ١٣ سم ، الاسطوانة ١٥ سم ، ط = ٣,١٤٢



شكل [١٢ ـ ٥]

(٧) أنبوبة معدنية سمكها ٤ مم وقطرها الداخلى ٣٠ سم وطولها ١٠٠ سم ، احسب حجم المعدن بهذه الأنبوبة ، ط = ٣,١٤٢

(٨) أسطوانة وكرة متساويان فى الحجم ، فإذا كان نصف قطر كل منهما هو ٣٠ سم ، فاحسب طول الأسطوانة ، ط = ٣,١٤٢ .

الدرس الثالث عشر :

الحجوم والكثافة والكتلة

volume, density and mass

[١٣ ـ ١] عـــام :

بمعلومية حجم المجسمات المصمتة أو المفرغة ، فإنه أصبح بإمكاننا الآن أن نوجد كتلتها ، إذا ما عرفنا كثافة المادة المصنوعة منها .

والكثافة ببساطة هى مقياس لكتلة وحدة الحجوم من المادة . وعادة تقاس بالجرام لكل سنتميتر مكعب (جم/سم^{٣})

وفيما يلى العلاقة التى تربط فيما بين الحجم والكثافة والكتلة .

الكتلة = الحجم × الكثافة

بالجرام = سم^{٣} × حم/سم^{٣}

لنعتبر أن لدينا مكعب طول ضلعه ٣ سم مصنوع من مادة كثافتها ٨ جم/سم^{٣}

فتكون كتلة هذا المكعب = الحجم × الكثافة

= (٣)^{٣} × ٨

= ٢٧ × ٨ = ٢١٦ جم

[١٣ ـ ٢] تدريبـــات :

(١) متوازى مستطيلات من الخشب ، الذى كثافته ٠,٥ جم/سم^3 ، أبعاده ٢ م × ٠,٢٥ م × ١ م ، احسب كتلته بالكيلوجرام .

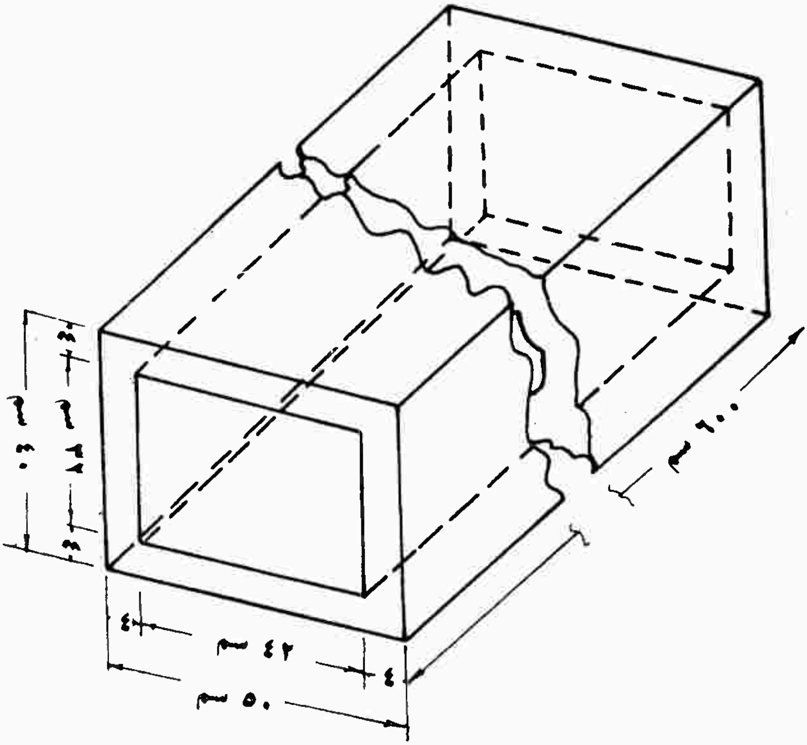
(٢) مخروط دائرى قائم مصنوع من معدن كثافته ٨ جم/سم^3 ، إرتفاعه ٣٠ سم ونصف قطر قاعدته ٧ سم ، احسب كتلته بالكيلوجرام .

(٣) قضيب اسطوانى من النحاس الذى كثافته ٨,٥ جم/سم^3 ، طوله ٧٥ سم وقطره ٥ سم ، احسب كتلته بالكيلوجرام .

(٤) هرم رباعى قائم قاعدته مربع طول ضلعه ١٦ سم وإرتفاعه ٤٥ سم مصنوع من الخشب الذى كثافته ٠,٥ جم/سم^3 ، إحسب وزنه بالكيلوجرام .

(٥) أحد أعمدة ربط السفن بأرصفة الموانىء ، مصنوع من الخرسانة وعلى شكل كتلة إسطوانية قطرها ٦٣ سم وبإرتفاع ١ متر فإذا كانت كثافة الخرسانة ٢,٠٥ جم/سم^3 فاحسب حجم هذا العمود بالمتر المكعب ومن ثم احسب كتلته بالطن .

(٦) إنبوب حرسانى ذو مقطع مستطيل ، أبعاده مبينة بالشكل [١٣ ـــ ١] وبطول ٦ متر وسمك ٤ سم ، كثافة الخرسانة ٢,٠٥٠ طن/م^3 ، احسب كتلة هذه الأنبوبة .



شكل [١٣ ـ ١]

(٧) أسطوانة معدنية مفرغة من النحاس طولها ٣ متر وقطرها الخارجى ٦٠ سم وسمكها ٤ سم فإذا كانت كثافة النحاس ٨.٥ جم سم^{٣} ، احسب كتلتها بالكيلوجرام .

الدرس الرابع عشر :

المسافة ، السرعة والزمن

Distance, Speed and time

إذا قلنا أن سيارة تسير بسرعة ٨٠ كيلومتر فى الساعة (٨٠ كم/س) وبسرعة منتظمة ، فإن هذا يعني أن هذه السيارة تقطع مسافة قدرها ٨٠ كيلومتر بعد مرور ساعة واحدة عند السير بهذه السرعة .

، وفى خلال ٣٠ دقيقة فإنها تقطع مسافة مقدارها ٤٠ كم وفى ربع ساعة تقطع مسافة مقدارها ٢٠ كيلومتر ، وهكذا .

، وعندما تتحرك أى سيارة على الطريق فإنه لظروف المرور ولاعتبارات كثيرة أخرى فإن السيارة تتحرك بسرعات مختلفة طبقاً لحالة الطريق ، والسيارة ، والسائق وخلافه .

وفى مثل هذه الحالات فإنه يمكننا إيجاد متوسط سرعة السيارة وذلك بقسمة المسافة الكلية المقطوعة بالسيارة على الزمن الكلى .

وبذلك فإن :

$$\text{السرعة المتوسطة} = \frac{\text{المسافة الكلية المقطوعة}}{\text{الزمن الكلى}}$$

ويجب التأكد من وحدات السرعة والمسافة والزمن فى هذا الموضوع لأن السرعة عادة يعبر عنها بالكيلومتر/ساعة أو بالمتر/ثانية ويجب الأخذ فى الاعتبار أن هناك وحدات أخرى للسرعة مثل متر/دقيقة ، كم/دقيقة ، كم/ثانية ، سم/ساعة ؛ وهكذا .

□ مثـــال (١) :

سيارة تقطع مسافة ٢٥٠ كيلومتراً فى خمس ساعات احسب السرعة المتوسطة لهذه السيارة .

□ الحـــل :

السرعة المتوسطة = $\frac{٢٥٠}{٥٠}$ = ٥٠ كم/ساعة

□ مثـــال (٢) :

سائق سيارة يسير فى رحلة ، قطع المائة كيلومتر الأولى فى ساعة ونصف ثم أصلح إطار سيارته فى ربع ساعة ثم أكمل رحلته بسرعة ١٠٠ كيلومتر/ساعة لمدة ساعتان ثم أخذ راحة للغذاء قدرها ساعة ، ثم تابع السير حتى نهاية الرحلة فقطع ٥٠ كيلومتر فى ٢٠ دقيقة فأوجد سرعته المتوسطة خلال هذه الرحلة .

□ الحـــل :

المسافة الكلية المقطوعة :

$= ١٠٠ + ١٠٠ \times ٢ + ٥٠ = ٣٥٠$ كيلو متراً

، الزمن الكلى للرحلة :

$$= ١\frac{١}{٢} + ١ + \frac{١}{٤} + ٢ + ١ + \frac{٢٠}{٦٠} = ٤\frac{١}{٢} + \frac{١}{٤} + \frac{١}{٣}$$

$$= ٤\frac{٦}{١٢} + \frac{٣}{١٢} + \frac{٤}{١٢} = ٤\frac{١٣}{١٢} = ٥\frac{١}{١٢} = \frac{٦١}{١٢}$$ ساعة

∴ السرعة المتوسطة

$$= \frac{\text{المسافة الكلية}}{\text{الزمن الكلى}} = \frac{٣٥٠}{\left(\frac{٦١}{١٢}\right)} = \frac{٣٥٠ \times ١٢}{٦١}$$

= ٦٨,٨٥ كم/ساعة

ويمكن معرفة المسافة أو الزمن المقطوعان بمعرفة أحدهما بالإضافة للسرعة المتوسطة .

□ مثـال (٣) :

دراجة تسير بسرعة متوسطة مقدارها ٢٠ كم/ساعة فكم كيلومترا تقطعها فى $\frac{١}{٢}$ ٤ ساعة .

□ الحـــل :

حيث أنها تقطع ٢٠ كيلومتر فى ساعة واحدة

∴ فهى تقط فى زمن قدره $\frac{١}{٢}$ ٤ ساعة :

٢٠ × $\frac{١}{٢}$ ٤ = ٩٠ كيلومترًا

وعليه فإن :

المسافة المقطوعة = السرعة المتوسطة × الزمن

$$\text{، الزمن} = \frac{\text{المسافة المقطوعة}}{\text{السرعة المتوسطة}}$$

تدريبـــات :

(١) سيارة تسير على أحد الطرق بسرعة متوسطة قدرها ١٠٠ كم/ساعة فأوجد المسافة التى تقطعها فى خلال :

(أ) ٢٠ دقيقة (ب) ١٠٠ ثانية

(جـ) ١٢ دقيقة

(د) ٣ $\frac{١}{٤}$ ساعة .

(هـ) $\frac{١}{٢}$ ساعة

(و) ٤٥ دقيقة .

(٢) تقطع سيارة مسافة ٣٦٠ كيلومتر فى ٦ ساعات فكم تبلغ سرعتها المتوسطة .

(٣) تحركت سلحفاة مسافة ٦ أمتار فى ربع ساعة ، فكم تبلغ سرعتها المتوسطة بالسنتيمتر فى الثانية .

(٤) سيارة تسير مسافة ٣٠٠ كم بسرعة متوسطة قدرها ٦٠ كم/ساعة ، فكم من الزمن يمضى لتقطع هذه المسافة .

(٥) يقطع قطار مسافة المائة كيلومتر الأولى من رحلته فى ساعتان ثم يقطع المائتين وستون الباقية فى ساعتين كذلك فكم تبلغ سرعته المتوسطة .

(٦) فى رحلة لأحد العائلات بالسيارة ، تحركت السيارة لمسافة ٦٠ كم فقطعتها فى ساعة ثم توقفت نصف ساعة ، واستمرت فى الرحلة فقطعت ٢٤٠ كم فى ثلاث ساعات ثم توقفت لمدة $\frac{١}{٢}$ ساعة أخرى ثم أنهت الرحلة بقطع مسافة ١٠٠ كم فى ساعة فكم تبلغ سرعتها المتوسطة خلال هذه الرحلة .

(٧) حول :

(أ) سرعة ٦٠ كم/ساعة إلى أمتار فى الثانية .

(ب) سرعة ٤٠ كم/ساعة إلى سنتيمترات / ثانية .

(جـ) سرعة ٣٥ م / ث إلى كيلومترات / ساعة .